8. Kosmologie fast ohne Allgemeine Relativitätstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir die Friedmann-Gleichung für ein Newtonsches Universum ableiten, in dem alle Bewegungen nichtrelativistisch sind und die Gravitation aufgrund der Anziehung zwischen Massen zustandekommt. Wir folgen dabei der kürzlichen Arbeit von Jordan (2003, American J. Physics, im Druck, astro/ph/0309756).

Die Friedmann-Gleichung entspricht dann der Energierhaltungsgleichung für die Bewegung einer Galaxie (=Milchstraße) im expandierenden Universum. Durch Ersetzen der Massendichte durch die dazugehörige Energiedichte ergibt sich dann exakt die Friedmann-Gleichung der allgemeinen Relativitätstheorie. Berücksichtigt man die geleistete Arbeit durch den Druck des expandierenden Universums, so folgen die zwei Einstein-Gleichungen, die die Expansion des Universums beschreiben. Ergänzt wird dieses Gleichungssystem durch die Einbeziehung von Strahlungsdruck und Vakuumdruck. Wie wir sehen werden, können wir damit die grundlegende zeitliche Entwicklung des Universums nachvollziehen.

8.1 Die Friedmann-Gleichung

Zwei Gleichungen der Kosmologie bestimmen die Expansion des Universums. Beide lassen sich als Energiegleichungen verstehen. Die eine besagt, daß für die Bewegung einer Galaxie im Universum die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant ist. Die andere beschreibt die geleistete Arbeit, die durch den Druck im expandierenden Universum entsteht.

Die Expansion des Universums wird beobachtet als Bewegung von Galaxien zueinander. Das Universum verhält sich wie ein expandierendes Gas von Massenpunkten, wobei die einzelnen Galaxien den Massenpunkten entsprechen: eine einzelne Galaxie expandiert nicht. Hubble hat herausgefunden, daß die Geschwindigkeiten der sich von uns fortbewegenden Galaxien proportional ist zum Abstand R von uns:

$$\frac{dR}{dt} = HR, \tag{8.1.1}$$

wobei H als Hubble-Parameter bezeichnet wird.

Die Gültigkeit des Hubble-Gesetz (8.1.1) ist in einem sphärisch isotropen homogenen Universums zu erwarten. Wir nehmen an, daß es genauso gilt für Beobachter an jedem anderen Ort des Universums. Wir nehmen weiter an, daß das Universum in der Tat homogen ist, überall gleich zu jeder Zeit. Gegenwärtig kann diese Homogenität natürlich nur für Längenskalen gelten, die größer als Galxienhaufen sind.

Die Gravitationskraft zwischen einzelnen Galaxien wirkt gegen die Expansion. Die Gravitationskraft auf eine Galaxie mit der Masse m im Abstand R durch die ausgedehnte Masse

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \tag{8.1.2}$$

des homogenen ($\rho = const.$) Universums innerhalb der Kugel mit dem Radius R ist genauso groß als wenn diese gesamte Masse im Zentrum der Kugel konzentriert wäre (siehe Vorlesung Elektrodynamik (3.5.1)). Es existiert keine Gravitationskraft von Kugelschalen des homogenen Universums außerhalb der Kugelschale mit dem Radius R. Die Summe aus kinetischer und gravitativer potentieller Energie für die Bewegung der Galaxie mit der Masse m ist dann

$$\frac{1}{2}m(\frac{dR}{dt})^2 - \frac{GMm}{R} = E, \tag{8.1.3}$$

wobei G die Gravitationskonstante bezeichnet und die Konstante E positiv, negativ oder gleich Null sein kann. Mit dem Hubble-Gesetz (8.1.1) und Gleichung (8.1.2) folgt

$$\frac{2E}{mR^2} = H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho \tag{8.1.4}$$

Zu einer gegebenen Zeit unseres homogenen Universums sind H und ρ konstant im gesamten Raum des Universums. Deshalb muss auch die linke Seite dieser Gleichung $\frac{2E}{mR^2}$ für alle Galaxien gleich sein.

Ist die Konstante E verschieden von Null, können wir die Einheiten und einen Zeitpunkt t_1 so wählen, daß

$$|\frac{2E}{mR^2(t_1)}| = 1$$

ist. Gleichung (8.1.4) schreibt sich dann als

$$\frac{(dR/dt)^2}{R^2} - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kR^2(t_1)}{R^2}, \tag{8.1.5}$$

wobei $k = -2E/(mR^2(t_1))$ gleich $1, 0$ oder -1 ist, je nachdem ob E negativ, gleich Null oder positiv ist. $R^2(t_1)$ entspricht gerade dem Betrag von $2|E|/m$ und bleibt konstant, während sich R, dR/dt, H und ρ mit der Zeit ändern dürfen.

Aus der speziellen Relativitätstheorie (Kap. 7) kennen wir den Zusammenhang $E = mc^2$. Masse und Energie sind äquivalent. Wir benutzen speziell ein Einheitensystem, in dem die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist. ρ bezeichnet dann die Energiedichte des Universums. Mit ρ als Energiedichte wird Gleichung (8.1.5) identisch zur *Friedmann-Gleichung* der allgemeinen Relativitätstheorie, wobei die Werte von $k = -1, 0, 1$ anzeigen, ob die Krümmung des Raums positiv, Null oder negativ ist.

8.2 Die Einstein-Gleichungen

Die Friedmann-Gleichung (8.1.5) ist eine der beiden Einstein-Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie für das homogene Universum. Die zweite Gleichung folgt aus der Überlegung, daß bei der infinitesimalen Änderung dV eines Volumenelements V im Universum der Druck p im Volumenelement die Arbeit pdV leistet, die die Energie im Volumenelement so vermindert, daß für eine Kugel mit dem Radius R

$$d(\rho\frac{4}{3}\pi R^3) = -pd(\frac{4}{3}\pi R^3)$$

ist. Es folgt

$$\frac{d(\rho R^3)}{dt} = -p\frac{dR^3}{dt} \tag{8.2.1}$$

oder

$$R\frac{d\rho}{dt} + 3(\rho + p)\frac{dR}{dt} = 0 \tag{8.2.2}$$

Wir schreiben die Friedmann-Gleichung (8.1.5) als

$$(\frac{dR}{dt})^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - kR^2(t_1) \tag{8.2.3}$$

Wir berechnen die zeitliche Ableitung dieser Beziehung:

$$\frac{d}{dt}(\frac{dR}{dt})^2 = 2\frac{dR}{dt}\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{8}{3}\pi G[2R\frac{dR}{dt}\rho + R^2\frac{d\rho}{dt}],$$

d.h.

$$\frac{dR}{dt}\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi GR[2\frac{dR}{dt}\rho + R\frac{d\rho}{dt}]$$

Auf der rechten Seite benutzen wir Gleichung (8.2.2) für $R\frac{d\rho}{dt}$ mit dem Ergebnis

$$\frac{dR}{dt}\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi GR\frac{dR}{dt}[2\rho - 3(\rho + p)],$$

sodaß

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)R \tag{8.2.4}$$

Die beiden Gleichungen (8.2.3) und (8.2.4) werden als *Einstein-Gleichungen* der Kosmologie bezeichnet.

8.3 Dichte und Druck des Universums

Der Druck des Universums wird durch die Energiedichte der Bestandteile des Universums bestimmt. Die Energiedichte kommt durch Materie, Strahlung oder Vakuum zustande. Jeder dieser Komponente ergibt einen anderen Druck.
Die Energiedichte der Materie erzeugt keinen Druck, der die Expansion des Universums beeinflußt. In unserer Näherung stoßen Galaxien nicht zusammen und erzeugen daher keinen thermischen Druck, wie etwa Moleküle in einem Gas. Zwischen der Energiedichte und dem Druck elektromagnetischer Strahlung besteht der Zusammenhang

$$p_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma \tag{8.3.1}$$

Für jede einzelne Komponente des Universums gilt die Druckgleichung (8.2.1):

$$\frac{d(\rho_i R^3)}{dt} = -p_i \frac{dR^3}{dt}, \tag{8.3.2}$$

wobei i für m (Materie), γ (Strahlung) oder v (Vakuum) steht.

8.3.1 Materie

Für Materie ist $p_m = 0$, sodaß

$$\frac{d(\rho_m R^3)}{dt} = 0, \tag{8.3.3}$$

sodaß

$$\rho_m(t) \propto R^{-3}(t) \tag{8.3.4}$$

Die Energie in einer Materiekugel ändert sich bei Expansion nicht; die Energiedichte wird gemäß Gleichung (8.3.4) verdünnt.

8.3.2 Strahlung

Für Strahlung folgt aus den Gleichungen (8.3.1) und (8.3.2) für

$$\frac{d(\rho_\gamma R^4)}{dt} = \rho_\gamma R^3 \frac{dR}{dt} + R\frac{d(\rho_\gamma R^3)}{dt} = \rho_\gamma R^3 \frac{dR}{dt} - Rp_\gamma \frac{dR^3}{dt} = \rho_\gamma R^3 \frac{dR}{dt} - \frac{1}{3} R\rho_\gamma 3R^2 \frac{dR}{dt} = 0,$$

sodaß

$$\rho_\gamma(t) \propto R^{-4}(t) \tag{8.3.5}$$

Der Vergleich der zeitlichen Entwicklung von Materie (Gleichung (8.3.3)) und Strahlung (Gleichung (8.3.4)) zeigt, daß zu früheren Zeiten das Universums strahlungsdominiert war.

8.3.3 Vakuum

Die Energiedichte des Vakuums ändert sich nicht:

$$\frac{d\rho_v}{dt} = 0 \tag{8.3.6}$$

Diese Beziehung werden wir im Abschnitt 8.4 mit der Lorentz-Invarianz begründen. Gemäß Gleichung (8.3.2) folgt dann

$$\frac{d(\rho_v R^3)}{dt} = \rho_v \frac{dR^3}{dt} = -p_v \frac{dR^3}{dt}, \tag{8.3.7}$$

oder

$$\rho_v = -p_v \tag{8.3.8}$$

Vakuum besitzt also einen negativen Druck! Damit haben die Energie und der Druck des Vakuums den gleichen Effekt wie Einsteins kosmologische Konstante Λ in den Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Im der kosmologischen Literatur wird daher Λ oft zur Kennzeichnung von Vakuumenergie und Vakuumdruck benutzt.

8.3.4 Quintessenz

Nehmen wir an, daß im Universum eine Komponente existiert mit der Druck-Energie-Beziehung

$$p_w = w\rho_w, \tag{8.3.9}$$

wobei w konstant ist. Mit Gleichung (8.3.2) erhalten wir dann für

$$\begin{aligned}\frac{d(\rho_w R^{3+3w})}{dt} &= R^{3w}\frac{d(\rho_w R^3)}{dt} + \rho_w R^3 \frac{dR^{3w}}{dt} = -p_w R^{3w}\frac{dR^3}{dt} + 3w\rho_w R^{3w+2}\frac{dR}{dt} \\ &= -w\rho_w 3R^{3w+2}\frac{dR}{dt} + 3w\rho_w R^{3w+2}\frac{dR}{dt} = 0,\end{aligned} \tag{8.3.10}$$

sodaß

$$\rho_w(t) \propto R^{-3-3w}(t) \tag{8.3.11}$$

Die früheren Gleichungen (8.3.3), (8.3.5) und (8.3.6) ergeben sich gerade als Spezialfälle der Gleichung (8.3.11) für die Werte $w = 0$, $w = 1/3$ und $w = -1$. Eine Vielzahl von Hypothesen über die Bestandteile des Universums existieren unter dem Namen von *Quintessenz-Modellen*, bei denen man das Druck/Energie-Verhältnis w frei wählt, insbesondere kleiner als $-1/3$ wählt und auch als zeitabhängig untersucht.

8.4 Vakuumdruck

Die Energiedichte ist die Zeit-Zeit-Komponente T_{00} des relativistischen Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$. In einem homogenen gleichförmig expandierenden Universums verschwinden für einen Beobachter, der das Universum in Ruhe beobachtet, alle nichtdiagonalen Tensorelemente $T_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$, und es gilt

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{8.4.1}$$

Eine Lorentz-Transformation auf ein anderes Inertialsystem, das sich mit der Geschwindigkeit $-v$ in z-Richtung bewegt, ergibt gemäß Gleichung (7.2.11)

$$T_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\eta T_{\alpha\eta} \tag{8.4.2}$$

mit $(c = 1)$

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \tag{8.4.3}$$

Wir erhalten dann

$$T_{00}^{'} = \frac{\rho + v^2 p}{1 - v^2}, \quad T_{11}^{'} = T_{22}^{'} = T_{33}^{'} = \frac{p + v^2 \rho}{1 - v^2} \tag{8.4.4}$$

Die Forderung nach der Lorentz-Invarianz des Vakuums $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{'}$ liefert dann sofort

$$p = -\rho \tag{8.4.5}$$

als Zustandsgleichung für das Vakuum.

8.5 Zeitliche Entwicklung des Universums

Während der zeitlichen Entwicklung des Universums ändert sich die Energiedichte der Strahlung (8.3.5) schneller als die von Materie (8.3.4), wobei die Energiedichte von Vakuum (8.3.6) konstant bleibt. Zu früheren Zeiten muß daher die Strahlungsenergiedichte dominierend gewesen sein. Zu späten Zeiten muß die Vakuumenergiedichte dominieren. In einem gewissen mittleren Zeitabschnitt ist die Energiedichte durch Materie dominant.
Aufgrund dieser unterschiedlichen zeitlichen Abhängigkeiten der Energiedichten von Strahlung, Materie und Vakuum ist die zeitliche Entwicklung des Universums unterschiedlich zu verschiedenen Zeiten. Wir illustrieren dies anhand der Friedmann-Gleichung (8.2.3) für verschwindende $(k = 0)$ oder vernachlässigbare Werte des Parameters k. Es gilt dann

$$(\frac{dR}{dt})^2 \propto \rho R^2 \tag{8.5.1}$$

Wir betrachten alle einzelne Konstituenten des Universums einzeln.

8.5.1 Strahlung

Für Strahlung erhalten wir mit Gleichung (8.3.5)

$$\frac{dR}{dt} \propto \frac{1}{R}, \tag{8.5.2}$$

oder

$$R \propto t^{1/2} \tag{8.5.3}$$

8.5.2 Materie

Für Materie erhalten wir mit Gleichung (8.3.4)

$$\frac{dR}{dt} \propto \frac{1}{R^{1/2}}, \tag{8.5.4}$$

oder

$$R \propto t^{2/3} \tag{8.5.5}$$

8.5.3 Vakuum

Für Vakuum erhalten wir mit Gleichung (8.3.6)

$$\frac{dR}{dt} \propto R, \tag{8.5.6}$$

oder

$$R \propto e^{ht} \tag{8.5.6}$$

mit der Konstanten $h = (dR/dt)/R$. Die exponentielle Expansion durch Vakuum wird als *Inflation* bezeichnet.

8.5.4 Quintessenz mit $w = const.$

Für Quintessenz mit konstantem $w, w \neq -1$ erhalten wir mit Gleichung (8.3.11)

$$\frac{dR}{dt} \propto R^{\frac{-1-3w}{2}}, \tag{8.5.7}$$

oder

$$R \propto t^{\frac{2}{3+3w}} \tag{8.5.8}$$

8.5.5 Materie und Vakuum

Für Materie und Vakuum erhalten wir mit Gleichungen (8.3.4) und (8.3.6) geschrieben als

$$\rho_v = \rho_{v0} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

(als Definition von Λ) und

$$\rho_m = \rho_0 R_0^3 / R^3$$

und aus (8.1.5) (mit $k = 0$) die Differentialgleichung

$$(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt})^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R^3}$$

Durch Einsetzen zeigt man, daß die Lösung durch

$$R(t) = c_1 \sinh^{2/3}[\sqrt{3\Lambda}\frac{t}{2}] \propto \sinh^{2/3}[\sqrt{6\pi G \rho_v} t] \tag{8.5.9}$$

gegeben ist, wobei $c_1^3 = 8\pi G \rho_0 R_0^3/\Lambda = \rho_0 R_0^3/\rho_{v0}$.

8.6 Kritische Dichte

Für $k = 0$ ergibt die Friedmann-Gleichung (8.1.5)

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{8.6.1}$$

was als *kritische Dichte* bezeichnet wird. Wir setzen

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} \tag{8.6.2}$$

Wir schreiben die Friedmann-Gleichung (8.1.5) in der Form

$$H^2(\Omega - 1) = k\frac{R^2(t_1)}{R^2} \tag{8.6.3}$$

Wir erkennen, daß für $k = 0$ $\Omega = 1$ ist. Wenn $k = -1$ muß $\Omega < 1$ sein, während für $k = 1$ $\Omega > 1$ ist. Weil $H^2 R^2 \geq 0$ entspricht $k = 1$ oder $\Omega > 1$ einem geschlossenen Universum, $k = 0$ oder $\Omega = 1$ einem flachen Universum und $k = -1$ oder $\Omega < 1$ einem offenen Universum.

Neben dem Gesamt-Omega-Parameter (8.6.2) definieren wir noch

$$\Omega_v = \frac{\rho_v}{\rho}\Omega, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho}\Omega, \quad \Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho}\Omega \tag{8.6.4}$$

Die Friedmann-Gleichung (8.1.5) läßt sich auch schreiben als

$$\frac{\rho - \rho_c}{\rho} = \frac{\rho - (3H^2/8\pi G)}{\rho} = \frac{3kR^2(t_1)}{8\pi G \rho R^2} \tag{8.6.5}$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Anteil der Energiedichte dar, der von der kritischen Dichte abweicht. Aus Beobachtungen wissen wir, daß zur heutigen Zeit dieser Anteil sehr klein ist. Die rechte Seite von Gleichung (8.6.5) zeigt an, wie sich dieser Anteil als Funktion von R mit der Expansion des Universums entwickelt hat. Benutzen wir speziell Gleichung (8.3.5), so sehen wir, daß im frühen Universum, als Strahlung die Energiedichte bestimmt hat, der Anteil (8.6.5) proportional zu $\propto R^2$ angewachsen ist. Da der Anteil jetzt klein ist, muß er im frühen Universum sehr klein gewesen sein. Dies verlangt nach einer Erklärung. Man glaubt, daß es im sehr jungen Universum eine inflationäre Phase gegeben hat, in der die Energiedichte hauptsächlich durch Vakuumenergie bestimmt war (siehe Kap. 8.5.3). Da die Vakuumenergiedichte konstant war, fiel der Anteil (8.6.5) gemäß Gleichung (8.5.6) proportional zu $\propto R^{-2} = \exp(-2ht)$ auf sehr kleine Werte.

8.7 Zukünftige Beschleunigung des Universums

Für das Verhalten des gegenwärtigen und zukünftigen Universums betrachten wir nur Materie und Vakuum und vernachlässigen den Einfluß der Strahlung, die im frühen Universum wichtig war. Für die Einstein-Gleichung (8.2.4) erhalten wir dann mit $p_m = 0$ und $p_v = -\rho_v$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho_m - 2\rho_v)R \tag{8.7.1}$$

Die Beschleunigung ist positiv, Null oder negativ, je nachdem, ob $2\rho_v$ größer, gleich, oder kleiner als ρ_m ist. Mit den Omega-Parametern (8.6.4) gilt für Gleichung (8.7.1)

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_c(\Omega_m - 2\Omega_v)R \tag{8.7.2}$$

Wir beginnen mit dem vakuumfreien Fall $\Omega_v = 0$. Die Expansion stoppt, falls $\Omega_m > 1$, weil damit das Gesamt-Omega $\Omega > 1$ ist und gemäß Gleichung (8.6.3) dann $k = 1$ positiv ist. Gemäß Gleichung (8.1.3) ist die Konstante E dann negativ, und die potentielle Energie dominiert die kinetische Energie.

Als nächstes betrachten wir den Fall $\Omega_v \neq 0$. Allgemein hört die Expansion des Universums irgendwann einmal auf, falls d^2R/dt^2 negativ ist und negativ bleibt, bis $dR/dt = 0$ wird. Wir bezeichnen mit $\tilde{\rho}_m$ und $\tilde{R}$ die Werte, für die $d^2R/dt^2 = dR/dt = 0$ gilt, und mit ρ_m und R die heutigen Werte. Man beachte, daß $\tilde{\rho}_v = \rho_v$ konstant und immer gleich ist. Nach Gleichung (8.7.1) gilt dann

$$\tilde{\rho}_m - 2\rho_v = 0, \tag{8.7.3}$$

während Gleichung (8.2.3) für ein geschlossenes ($k = 1$) Universum auf

$$\frac{8}{3}\pi G(\tilde{\rho}_m + \rho_v)\tilde{R}^2 = kR^2(t_1) = R^2(t_1) \tag{8.7.4}$$

führt. Gleichung (8.3.3) impliziert

$$\rho_m R^3 = \tilde{\rho}_m \tilde{R}^3 \tag{8.7.5}$$

Das Einsetzen von Gleichungen (8.7.3) und (8.7.5) in Gleichung (8.7.4) ergibt

$$8\pi G \rho_v (\frac{\rho_m}{2\rho_v})^{2/3} = \frac{R^2(t_1)}{R^2} \tag{8.7.6}$$

Die Friedmann-Gleichung (8.1.5) für $k = 1$ lautet

$$\frac{R^2(t_1)}{R^2} = \frac{8}{3}\pi G \rho - H^2 \tag{8.7.7}$$

Das Gleichsetzen von Gleichungen (8.7.6) und (8.7.7) führt nach Division durch H^2 mit den Omega-Parametern (8.6.4) und $\Omega_\gamma = 0$ auf

$$1 - \Omega_m - \Omega_v + \frac{3}{2^{2/3}} \Omega_v^{1/3} \Omega_m^{2/3} = 0 \tag{8.7.8}$$

Zur Lösung dieser Gleichung setzen wir

$$x = 1 - \frac{1}{\Omega_m}, \quad y = (\frac{\Omega_v}{4\Omega_m})^{1/3} \tag{8.7.9}$$

Damit schreibt sich Gleichung (8.7.8) als

$$4y^3 - 3y + x = 0, \tag{8.7.10}$$

oder

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{x}{4} = 0$$

Die Zahl der reellen Lösungen hängt vom Wert der Diskriminante

$$D = (\frac{x}{8})^2 - (\frac{1}{4})^3 = \frac{x^2 - 1}{64} = \frac{1}{64\Omega_m^2}[1 - 2\Omega_m] \tag{8.7.11}$$

ab.
Für $D > 0$ oder $\Omega_m < 1/2$ erhalten wir als einzige reelle Lösung

$$y_1 = \frac{1}{2}[(\sqrt{x^2 - 1} - x)^{1/3} - (\sqrt{x^2 - 1} + x)^{1/3}]$$

und damit

$$\Omega_{v1} = 4\Omega_m y_1^3 = 1 - \Omega_m + \frac{3}{2}\Omega_m^{2/3}(\sqrt{1 - 2\Omega_m} + 1 - \Omega_m)^{1/3} - \frac{3}{2}\Omega_m^{2/3}(\sqrt{1 - 2\Omega_m} - 1 + \Omega_m)^{1/3} \tag{8.7.12}$$

Für $D = 0$ oder $\Omega_m = 1/2$ ist $x = -1$, und Gleichung (8.7.10) reduziert sich auf

$$4y^3 - 3y - 1 = 4(y-1)(y+\frac{1}{2})^2 = 0$$

mit den Lösungen $y_1 = 1$ und $y_2 = -1/2$, sodaß

$$\Omega_{v1} = 2, \;\; \Omega_{v2} = -\frac{1}{4} \tag{8.7.13}$$

Für $D < 0$ oder $\Omega_m > 1/2$ erhalten wir die drei reellen Lösungen

$$y_1 = \cos[\frac{1}{3}\arccos x], \tag{8.7.14}$$

$$y_2 = \cos[\frac{1}{3}\arccos x + \frac{\pi}{3}], \tag{8.7.15}$$

$$y_3 = \cos[\frac{1}{3}\arccos x - \frac{\pi}{3}], \tag{8.7.16}$$

oder

$$\Omega_{v1} = 4\Omega_m \cos^3[\frac{1}{3}\arccos x], \tag{8.7.17}$$

$$\Omega_{v2} = 4\Omega_m \cos^3[\frac{1}{3}\arccos x + \frac{\pi}{3}], \tag{8.7.18}$$

$$\Omega_{v3} = 4\Omega_m \cos^3[\frac{1}{3}\arccos x - \frac{\pi}{3}] \tag{8.7.19}$$

8.8 Rotverschiebung, Lichtlaufzeit und Alter des Universums

Licht, das von einer entfernten Galaxie bei der Wellenlänge λ emittiert wird, wird von einem Beobachter hier bei der Wellenlänge λ_0 beobachtet, wobei

$$\lambda_0 = \lambda(1+z) \tag{8.8.1}$$

z der *Rotverschiebungsparameter* ist. Mit der Expansion des Universums vergrößern sich die Wellenlängen proportional zum Abstand R. Mit dem gegenwärtigen Wert R_0 definieren wir

$$r = \frac{R}{R_0}, \tag{8.8.2}$$

sodaß zum Zeitpunkt der Lichtemission

$$r = \frac{1}{1+z} \tag{8.8.3}$$

Es bietet sich an, die Abstände als Funktion von r zu schreiben und die Zeit $t = \tau/H_0$ in Einheiten der gegenwärtigen Hubble-Zeit H_0^{-1} mit $H_0 = H(R_0)$ zu messen. Gleichungen (8.3.4) und (8.3.5) führen dann auf

$$\rho_m = \rho_{m0}(\frac{R_0}{R})^3 = \frac{\rho_{m0}}{r^3}, \quad \rho_\gamma = \rho_{\gamma 0}(\frac{R_0}{R})^4 = \frac{\rho_{\gamma 0}}{r^4}, \tag{8.8.4}$$

wobei $\rho_{m0} = \rho_m(R_0)$ und $\rho_{\gamma 0} = \rho_\gamma(R_0)$ die heutige Materiedichte und Strahlungsdichten sind und $\rho_v = \rho_{v0} = const.$
Für die Einstein-Gleichung (8.2.4) erhalten wir dann

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{\Omega_{\gamma 0}}{r^3} - \frac{\Omega_{m0}}{2r^2} + \Omega_{v0} r \tag{8.8.5}$$

Für das heutige Hubble-Gesetz gilt nach Gleichung (8.1.1)

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R,$$

oder

$$\frac{dr}{d\tau} = r = 1 \tag{8.8.6}$$

bei $r = 1$. Nach Multiplikation der Einstein-Gleichung (8.8.5) mit $dr/d\tau$ folgt

$$\frac{dr}{d\tau}\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\frac{dr}{d\tau})^2 = [-\frac{\Omega_{\gamma 0}}{r^3} - \frac{\Omega_{m0}}{2r^2} + \Omega_{v0} r]\frac{dr}{d\tau}$$

mit dem Integral

$$(\frac{dr}{d\tau})^2 = c_2 + [\frac{\Omega_{\gamma 0}}{r^2} + \frac{\Omega_{m0}}{r} + \Omega_{v0} r^2] \tag{8.8.7}$$

und der Integrationskonstanten c_2. Für $r = 1$ erhalten wir aus dieser Gleichung mit Gleichung (8.8.6)

$$c_2 = 1 - \Omega_{\gamma 0} - \Omega_{m0} - \Omega_{v0} = 1 - \Omega_0$$

Für Gleichung (8.8.7) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}(\frac{dr}{d\tau})^2 &= 1 - \Omega_{\gamma 0} - \Omega_{m0} - \Omega_{v0} + [\frac{\Omega_{\gamma 0}}{r^2} + \frac{\Omega_{m0}}{r} + \Omega_{v0} r^2] \\ &= 1 - \Omega_0 + [\frac{\Omega_{\gamma 0}}{r^2} + \frac{\Omega_{m0}}{r} + \Omega_{v0} r^2] \end{aligned} \tag{8.8.8}$$

oder

$$\frac{dr}{d\tau} = [1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_{\gamma 0}}{r^2} + \frac{\Omega_{m0}}{r} + \Omega_{v0} r^2]^{1/2} \tag{8.8.9}$$

mit der Lösung für die Lichtlaufzeit vom Ort r zu uns

$$t(r) = H_0^{-1}\tau(r) = H_0^{-1}\int_r^1 \frac{dx}{[1-\Omega_0+\frac{\Omega_{\gamma 0}}{x^2}+\frac{\Omega_{m0}}{x}+\Omega_{v0}x^2]^{1/2}} \tag{8.8.10}$$

Für $r = 0$ ergibt sich das Alter des Universums zu

$$t(0) = H_0^{-1}\int_0^1 \frac{dx}{[1-\Omega_0+\frac{\Omega_{\gamma 0}}{x^2}+\frac{\Omega_{m0}}{x}+\Omega_{v0}x^2]^{1/2}} \tag{8.8.11}$$

8.8.1 Strahlungsdominiertes Universums ($\Omega_{v0} = \Omega_{m0} = 0$)

Besteht die Energiedichte des Universum nur aus Strahlung ($\Omega_{v0} = \Omega_{m0} = 0$), so folgt für die Lichtlaufzeit (8.8.10)

$$\tau(r) = \int_r^1 dx \frac{x}{\sqrt{\Omega_{\gamma 0}+(1-\Omega_{\gamma 0})x^2}} = \frac{1}{1-\Omega_{\gamma 0}}[1-\sqrt{\Omega_{\gamma 0}+(1-\Omega_{\gamma 0})r^2}] \tag{8.8.12}$$

und für das Alter des Universums (8.8.11)

$$\tau(0) = \frac{1-\sqrt{\Omega_{\gamma 0}}}{1-\Omega_{\gamma 0}} = \frac{1}{1+\Omega_{\gamma 0}^{1/2}} \tag{8.8.13}$$

8.8.2 Materiedominiertes Universums ($\Omega_{v0} = \Omega_{\gamma 0} = 0$)

Besteht die Energiedichte des Universum nur aus Materie ($\Omega_{v0} = \Omega_{\gamma 0} = 0$), so folgt für die Lichtlaufzeit (8.8.10)

$$\tau(r, \Omega_{m0}) = \int_r^1 dx \frac{x}{\sqrt{\Omega_{m0}x+(1-\Omega_{m0})x^2}}$$

Für $\Omega_{m0} = 1$ erhalten wir

$$\tau(r, \Omega_{m0} = 1) = \frac{2}{3}(1-r^{3/2}), \tag{8.8.14}$$

sodaß das Alter durch

$$\tau(0, \Omega_{m0} = 1) = \frac{2}{3} \tag{8.8.15}$$

gegeben ist. Für nahe Objekte $r = 1/(1+z)$ mit $z << 1$ folgt aus Gleichung (8.8.14)

$$\tau((1+z)^{-1}, \Omega_{m0} = 1, z << 1) \simeq z - \frac{5}{4}z^2 \tag{8.8.15}$$

Für $\Omega_{m0} < 1$ gilt

$$\tau(r, \Omega_{m0} < 1) = \frac{1-\sqrt{\Omega_{m0}r+(1-\Omega_{m0})r^2}}{1-\Omega_{m0}}$$

$$-\frac{\Omega_{m0}}{2[1-\Omega_{m0}]^{3/2}}\ln\frac{2\sqrt{1-\Omega_{m0}}+2-\Omega_{m0}}{2\sqrt{(1-\Omega_{m0})[\Omega_{m0}r+(1-\Omega_{m0})r^2]}+2(1-\Omega_{m0})r+\Omega_{m0}} \qquad (8.8.16)$$

und für das Alter

$$\tau(0,\Omega_{m0}<1)=\frac{1}{1-\Omega_{m0}}-\frac{\Omega_{m0}}{2[1-\Omega_{m0}]^{3/2}}\ln\frac{2\sqrt{1-\Omega_{m0}}+2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \qquad (8.8.17)$$

Für $\Omega_{m0}>1$ gilt

$$\tau(r,\Omega_{m0}>1)=\frac{\sqrt{\Omega_{m0}r+(1-\Omega_{m0})r^2}-1}{\Omega_{m0}-1}$$
$$+\frac{\Omega_{m0}}{2[\Omega_{m0}-1]^{3/2}}[\arcsin\frac{\Omega_{m0}-2(\Omega_{m0}-1)r}{\Omega_{m0}}-\arcsin\frac{2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}] \qquad (8.8.18)$$

und für das Alter

$$\tau(0,\Omega_{m0}>1)=\frac{\Omega_{m0}}{2[\Omega_{m0}-1]^{3/2}}[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}]-\frac{1}{\Omega_{m0}-1} \qquad (8.8.19)$$

8.8.3 Vakuumdominiertes Universums ($\Omega_{m0}=\Omega_{\gamma0}=0$)

Besteht die Energiedichte des Universum nur aus Vakuum ($\Omega_{m0}=\Omega_{\gamma0}=0$), so folgt für die Lichtlaufzeit (8.8.10)

$$\tau(r)=\frac{1}{\Omega_{\mathrm{v}0}^{1/2}}[\mathrm{arsinh}\frac{\Omega_{\mathrm{v}0}^{1/2}}{1-\Omega_{\mathrm{v}0}^{1/2}}-\mathrm{arsinh}\frac{\Omega_{\mathrm{v}0}^{1/2}}{1-\Omega_{\mathrm{v}0}^{1/2}}\mathrm{r}] \qquad (8.8.20)$$

und für das Alter

$$\tau(0)=\frac{1}{\Omega_{\mathrm{v}0}^{1/2}}\mathrm{arsinh}\frac{\Omega_{\mathrm{v}0}^{1/2}}{1-\Omega_{\mathrm{v}0}^{1/2}} \qquad (8.8.21)$$

A. Anhang

A.1 Mathematischer Anhang

A.1.1 Näherungsformeln

Taylor-Entwicklung um den Punkt x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Für Werte $x << 1$ gelten folgende Näherungen aus der Taylor-Entwicklung:

$$\sin x \simeq x, \quad \cos x \simeq 1, \quad \tan x \simeq x$$

$$\sqrt{1 \pm x} \simeq 1 \pm \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{1 \mp x} \simeq 1 \pm x$$

und allgemein

$$(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$$

A.1.2 Eulersche Formeln und Umkehrung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

A.1.3 Darstellung des $\vec{\nabla}$-Operators in verschiedenen Koordinatensystemen

I) kartesisch:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

II) zylindrisch:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

III) sphärisch:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

A.1.4 Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$-Operator (vgl. auch 1.10)

I) Summenregeln

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \vec{\nabla}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\nabla}\times\vec{a} + \vec{\nabla}\times\vec{b}$$

II) Produktregeln

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{a}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}f)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$$

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{a}) = f(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\vec{\nabla}f)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})$$

III) Quotientenregeln

$$\vec{\nabla}(\frac{f}{g}) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{\vec{a}}{g}) = \frac{g(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}g)}{g^2}$$

$$\vec{\nabla}\times(\frac{\vec{a}}{g}) = \frac{g(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\vec{\nabla}g)}{g^2}$$

IV) Kombination vektorieller Differentialoperatoren

$$\text{div grad } f = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f$$

$$\text{rot grad } f = 0$$

$$\text{div rot } \vec{a} = 0$$

$$\text{rot (rot } \vec{a}) = \text{grad (div } \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

$$\text{div } (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\text{rot } \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\text{rot } \vec{b})$$

V) Für eine Funktion f, die nur vom Betrag $r = |\vec{x}|$ eines Vektors $\vec{x}$ abhängt, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(r) = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r}$$

und

$$\vec{\nabla} f(r) = f'(r) \frac{\vec{x}}{r}$$

A.2 Empfohlene Literatur

Bücher zur Theoretischen Mechanik:
Goldstein: Klassische Mechanik
Greiner: Mechanik I+II
Fließbach
Landau Lifschitz

Bücher für mathematische Formeln ("Grundausstattung") :
K. Rottmann, Mathematische Formelsammlung
I. N. Bronstein, K. A. Semedjajew, G. Musiol, H. Mühlig: Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch Verlag
M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards (oder Dover Publ.)
I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: Tabeles of Integrals, Series and Products (deutsche Übersetzung: Harri Deutsch Verlag)

Bücher für mathematische Physik ("Grundausstattung") :
G. Arfken: Mathematical Methods for Physicists, Academic Press
C. R. Wylie: Advanced Engineering Mathematics, McGraw-Hill
P. M. Morse, H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, Vol. I and II, McGraw-Hill