7. Spezielle Relativitätstheorie

Eine große Anzahl von Untersuchungen, besonders die berühmten Experimente von Michelson und Morley, haben gezeigt, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen immer gleich ist, und daß sie unabhängig von den relativen gleichförmigen Bewegungen des Beobachters, des übertragenden Mediums und der Lichtquelle ist. Die Galileische Transformation (2.3.1) kann deshalb nicht richtig sein (siehe Kap. 7.1.2) und muß durch eine andere, die *Lorentz-Transformation*, ersetzt werden, die die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen erhält.

Einstein zeigte, daß eine solche Transformation die Revision der in der Newton-Mechanik gewohnten Begriffe von Zeit und Gleichzeitigkeit erfordert. Er ging noch weiter: aus der experimentellen Tatsache, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen konstant ist, verallgemeinerte er als grundlegendes Postulat, daß alle Erscheinungen der Physik in allen gleichförmig bewegten Systemen gleich erscheinen. Dieses sogenannte *Äquivalenzpostulat* behauptet, daß es im Sinn einer physikalischen Messung unmöglich ist, ein Koordinatensystem als wirklich *stationär* oder *gleichförmig bewegt* zu kennzeichnen; man kann nur schließen, daß sich zwei Systeme *relativ* zueinander bewegen. Somit müssen Messungen, die vollständig *innerhalb* eines Systems gemacht werden, ungeeignet sein, das System von allen anderen zu unterscheiden, die sich ihm gegenüber gleichförmig bewegen. Das Äquivalenzpostulat fordert, daß alle physikalischen Gesetze für alle gleichförmig bewegten Systeme in identischer Weise ausgedrückt werden müssen. Die Behauptung zum Beispiel, daß die Lichtgeschwindigkeit überall c ist, bedeutet, daß eine skalare Wellengleichung der Form

$$\vec{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{7.1.1}$$

die Lichtfortpflanzung in allen Systemen beschreibt.

Das Programm der speziellen Relativitätstheorie besteht deshalb aus zwei Teilen. Zuerst muß eine Transformation zwischen zwei gleichförmig bewegten Systemen gewonnen werden, die die Lichtgeschwindigkeit erhält. Zweitens müssen die Gesetze der Physik bezüglich ihrer Transformationseigenschaften gegenüber dieser Lorentz-Transformation überprüft werden. Die Gesetze, deren Form nicht invariant ist, sind so zu verallgemeinern, daß sie dem Äquivalenzpostulat genügen (sog. *kovariante Formulierung physikalischer Gesetze*).

7.1 Die Lorentz-Transformation

7.1.1 Ableitung der Transformationsgleichungen

Man denke sich zwei Bezugssysteme K und K', die sich in x-Richtung mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit $\vec{V}$ zueinander bewegen (Abb. 7.1). Aufgrund der Isotropie des Raums ist keine Richtung besonders ausgezeichnet, sodaß wir die x-Achse parallel zu $\vec{V}$

wählen können.

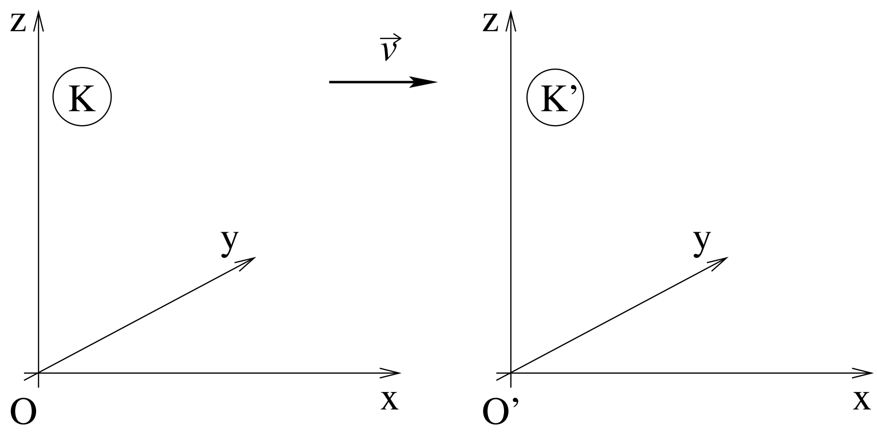

Abb. 7.1: Die Bezugssysteme K und $K^{'}$.

Zur Zeit $t = 0$ fallen die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme zusammen. Zu diesem Zeitpunkt strahle eine im Ursprung des ungestrichenen Systems befestigte Lichtquelle einen Lichtblitz aus. Ein Beobachter, der sich bezüglich dieses Systems in Ruhe befinden, wird eine sich ausbreitende Kugelwelle sehen, die mit der Geschwindigkeit c fortschreitet. Die Gleichung der beobachteten Wellenfront lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (7.1.2)$$

Das experimentelle Faktum der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit bedeutet, daß auch ein Beobachter im bewegten System K das Licht auch so sieht, als breite es sich als Kugelwelle um *seinen* Ursprung aus. Die entsprechende Gleichung der Wellenfront lautet:

$$x^{'2} + y^{'2} + z^{'2} = c^2 t^{'2} \qquad (7.1.3)$$

Wie müssen die Transformationen von (x, y, z, t) auf $(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t^{'})$ gewählt werden, damit die Gleichungen (7.1.2) und (7.1.3) erfüllt sind?
Nach Voraussetzung liegt die Relativgeschwindigkeit $\vec{V}$ in x-Richtung. Man kann daher davon ausgehen, daß die Komponenten y und z bei der Transformation unangetastet bleiben, d.h.

$$y^{'} = y, \quad z^{'} = z \qquad (7.1.4)$$

Für $x^{'}$ und $t^{'}$ setzen wir lineare Transformationsgleichungen der Art

$$x^{'} = ax + \ bt \qquad (7.1.5a)$$

$$t^{'} = ex + \ ft \qquad (7.1.5b)$$

an, wobei a, b, e, f Konstanten sind, die von V und c abhängen.
Mit den Gleichungen (7.1.2) – (7.1.5) folgt

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 = a^2x^2 + 2abxt + b^2t^2 - c^2(e^2x^2 + 2efxt + f^2t^2) \tag{7.1.6}$$

Die Gleichung (7.1.6) gilt für unabhängige Werte von x und t, sodaß die Koeffizienten vor x^2, t^2 und xt einzeln verschwinden müssen:

$$a^2 - c^2e^2 = 1, \tag{7.1.7}$$

$$b^2 - c^2f^2 = -c^2 \tag{7.1.8}$$

und

$$ab - c^2ef = 0, \tag{7.1.9}$$

sodaß wir drei Gleichungen für vier Unbekannte (a, b, e, f) haben.
Die vierte Bestimmungsgleichung folgt aus der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ die Nullpunkte der Koordinatensysteme zusammenfallen. Dies impliziert, daß die Position des Ursprungs O' durch $x' = 0$ oder $x = Vt$ gegeben ist. Nach Gleichung (7.1.5a) heißt das

$$0 = aVt + bt$$

oder

$$b = -Va \tag{7.1.10}$$

Ebenso ist die Position des Ursprung O durch $x = 0$ oder $x' = -Vt'$ gegeben, sodaß nach Gleichungen (7.1.5)

$$-Vt' = 0 + bt, \quad t' = 0 + ft,$$

woraus sofort

$$b = -Vf \tag{7.1.11}$$

folgt. Der Vergleich der Gleichungen (7.1.10) und (7.1.11) liefert dann

$$a = f \tag{7.1.12}$$

Setzen wir Ergebnis (7.1.11) in Gleichung (7.1.8) ein, so erhalten wir

$$V^2f^2 - c^2f^2 = -c^2$$

oder

$$f^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \gamma^2$$

mit

$$\gamma \equiv (1 - \frac{V^2}{c^2})^{-1/2} \tag{7.1.13}$$

und mit Gleichung (7.1.12) gilt

$$a = f = \gamma \tag{7.1.14}$$

In der Definition (7.1.13) haben wir die positive Wurzel gewählt, damit wir für kleine ($V << c$ sodaß $\gamma \simeq 1$) Relativgeschwindigkeiten aus den Transformationen (7.1.5) wieder die Galilei-Transformation (2.3.1) erhalten.
Aus Gleichungen (7.1.11) und (7.1.14) folgt weiterhin

$$b = -V\gamma \tag{7.1.15}$$

und Gleichung (7.1.9) liefert

$$e = \frac{b}{c^2} = -\frac{V\gamma}{c^2} \tag{7.1.16}$$

Mit diesen Werten ist Gleichung (7.1.7) dann ebenfalls erfüllt, denn

$$a^2 - c^2e^2 = \gamma^2 - c^2\frac{V^2\gamma^2}{c^4} = \gamma^2(1 - \frac{V^2}{c^2}) = 1$$

Für die Transformationsgleichungen (7.1.5) erhalten wir somit

$$x^{'} = \gamma(x - \ Vt) \tag{7.1.17a}$$

$$t^{'} = \gamma(-\frac{Vx}{c^2} + \ t) \tag{7.1.17b}$$

Als Umkehrtransformation ergibt sich

$$x = \gamma(x^{'} + \ Vt^{'}) \tag{7.1.18a}$$

und

$$t = \gamma(\frac{Vx^{'}}{c^2} + \ t^{'}) \tag{7.1.18b}$$

Es is üblich, das Verhältnis

$$\beta \equiv \frac{V}{c} \tag{7.1.19}$$

einzuführen und die Gleichungen (7.1.17b) und (7.1.18b) mit c zu multiplizieren. Wir erhalten dann neben der Beziehung (7.1.4)

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{7.1.20}$$

und

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \tag{7.1.21}$$

Die Gleichungen (7.1.4), (7.1.20) und (7.1.21) werden als *Lorentz-Transformation* bezeichnet.
Im Grenzfall $\beta << 1$ folgt sofort mit $\gamma \simeq 1 + (\beta^2/2) \simeq 1$ aus Gleichung (7.1.20) die Galilei-Transformation $x' \simeq x - Vt$ und $t' \simeq t$.
Für manche Anwendungen ist es nützlich, die Transformationsformeln auch für den allgemeinen Fall, daß die Relativgeschwindigkeit $\vec{V}$ nicht in Richtung der x-Achse zeigt, zu kennen. Man erhält diese, indem man den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \tag{7.1.22}$$

in einen Anteil $\vec{r}_{\parallel} \parallel \vec{V}$ und $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{V}$ aufspaltet. Aus Gleichungen (7.1.4) und (7.1.17) folgt dann

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}, \quad \vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t), \quad t' = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2}) \tag{7.1.23}$$

Weil aber

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2}, \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$$

folgen mit Gleichungen (7.1.23)

$$\begin{gathered} \vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} + \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t) = \\ \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2} + \gamma(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2} - \vec{V}t) = \vec{r} + \frac{\gamma - 1}{V^2}(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V} - \gamma\vec{V}t \end{gathered} \tag{7.1.24}$$

und

$$t' = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2}}{c^2}) = \gamma(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}) \tag{7.1.25}$$

als allgemeine Transformationgleichungen.
Bevor wir einige der bekanntesten Konsequenzen der Lorentztransformation ableiten, betrachten wir das Verhalten der skalaren Wellengleichung (7.1.1) bei Galilei-Transformation und Lorentz-Transformation.

7.1.2 Verhalten der skalaren Wellengleichung bei Galilei-Transformation

Mit der Galilei-Transformation $x^{'} = x - Vt$, $y^{'} = y$, $z^{'} = z$ und $t^{'} = t$ und ihrer Umkehrung $x = x^{'} + Vt$, $y = y^{'}$, $z = z^{'}$ und $t = t^{'}$ folgt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x^{'}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t^{'}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x^{'}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t^{'}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -V\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'},$$

sodaß

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \tag{7.1.26}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'})(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}) = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2V\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} \tag{7.1.27}$$

Setzen wir die Ergebnisse (7.1.26) – (7.1.27) in die skalare Wellengleichung (7.1.1) ein, so geht diese von der Form

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

in die Form

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} + (1 - \frac{V^2}{c^2})\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + 2\frac{V}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

über. Damit ist bewiesen, daß bei Galilei-Transformation die skalare Wellengleichung nicht forminvariant ist.

7.1.3 Verhalten der skalaren Wellengleichung bei Lorentz-Transformation

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der skalaren Wellengleichung bei der Lorentz-Transformation (7.1.18) und (7.1.4). In diesem Fall erhalten wir für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x^{'}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t^{'}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x^{'}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t^{'}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -V\gamma\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}.$$

Damit folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = (\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'})(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}) = \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{V^2\gamma^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{V\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (\gamma\frac{\partial}{\partial t'} - V\gamma\frac{\partial}{\partial x'})(\gamma\frac{\partial}{\partial t'} - V\gamma\frac{\partial}{\partial x'}) = \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + V^2\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 V\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}$$

Mit den beiden letzten Ergebnissen folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{V^2\gamma^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{V\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{V^2\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2\gamma^2 V}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}$$

$$= \gamma^2(1 - \frac{V^2}{c^2})\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + (\frac{V^2}{c^2} - 1)\frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

Damit ist die Forminvarianz der skalaren Wellengleichung bei Lorentz-Transformation bewiesen.

7.1.4 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Wir betrachten jetzt zwei aufeinander folgende Lorentz-Transformationen vom System K mit der Geschwindigkeit $\beta_1 = V_1/c$ in das System K', und anschließend vom System K' mit der Geschwindigkeit $\beta_2 = V_2/c$ in das System K''. Wir berechnen den Wert der Geschwindigkeit $\beta_3 = V_3/c$, mit der sich das System K'' relativ zum System K bewegt.
Zum einen gilt nach dem Transformationsgesetz (7.1.20)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_3 \\ -\beta_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \tag{7.1.28}$$

wobei $\gamma_3 = (1-\beta_3^2)^{-1/2}$. Zum anderen ist

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \tag{7.1.29}$$

wobei $\gamma_{1,2} = (1-\beta_{1,2}^2)^{-1/2}$. Gleichung (7.1.29) ergibt

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \gamma_2\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \beta_1 ct \\ -\beta_1 x + ct \end{pmatrix} = \gamma_2\gamma_1 \begin{pmatrix} x - \beta_1 ct - \beta_2(-\beta_1 x + ct) \\ -\beta_2(x - \beta_1 ct) - \beta_1 x + ct \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_2\gamma_1 \begin{pmatrix} (1+\beta_1\beta_2)x - (\beta_1+\beta_2)ct \\ -(\beta_1+\beta_2)x + (1+\beta_1\beta_2)ct \end{pmatrix} = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \begin{pmatrix} x - \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}ct \\ -\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}x + ct \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \\ -\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}. \tag{7.1.30}$$

Aus der Gleichheit der Ausdrücke (7.1.28) und (7.1.30) folgt das *Additionstheorem der Geschwindigkeiten*

$$\beta_3 = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \tag{7.1.31}$$

oder

$$V_3 = \frac{V_1+V_2}{1+\frac{V_1V_2}{c^2}} \tag{7.1.32}$$

Das Additionstheorem (7.1.31) impliziert

$$\gamma_3 = (1-\beta_3^2)^{-1/2} = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}} = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1+2\beta_1\beta_2+\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^2-2\beta_1\beta_2-\beta_2^2}} =$$

$$\frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1+\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^2-\beta_2^2}} = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}} = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$$

Gleichung (7.1.31) besagt, daß $\beta_3 \leq 1$ immer kleiner als 1 ist $\forall\beta_1 \leq 1$ und $\forall\beta_2 \leq 1$. Es gibt also keine Relativgeschwindigkeiten $V > c$, die größer als die Lichtgeschwindigkeit sind.

7.1.5 Längenkontraktion

Wir betrachten einen starren Stab, der bezüglich des ungestrichenen Systems in Ruhe ist und auf der x-Achse liegt. Er habe die Länge $l = x_2 - x_1$.

Ein bewegter Beobachter im System K' mißt die Länge des Stabes, indem er die Lage der beiden Endpunkte x_1' und x_2' in seinem System zu einem Zeitpunkt t' lokalisiert. Nach Gleichung (7.1.18a) finden wir

$$x_1 = \gamma(x_1' + Vt'), \quad x_2 = \gamma(x_2' + Vt')$$

und damit für die scheinbare Länge

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{1}{\gamma}(x_2 - x_1) = \frac{l}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\,l \tag{7.1.33}$$

Der Stab erscheint dem bewegten Beobachter um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ verkürzt, dies ist die *sog. Längenkontraktion.*

Man beachte, daß nicht Gleichung (7.1.17a) zur Berechnung verwandt werden darf, da die Messung zum gleichen Zeitpunkt t' erfolgt.

7.1.6 Zeitdilatation

Wir setzen eine Uhr im ungestrichenen System an einen Punkt x_1. Zur Zeit t_1 nach dieser Uhr bemerkt ein Beobachter, der sich in diesem Punkt, jedoch im bewegten System, befindet, eine Zeit nach Gleichung (7.1.17b)

$$t_1^{'} = \gamma(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2})$$

Zur Zeit t_2 findet ein ähnlicher Beobachter in seinem System die Zeit

$$t_2^{'} = \gamma(t_2 - \frac{Vx_1}{c^2}),$$

sodaß das scheinbare Zeitintervall

$$t_2^{'} - t_1^{'} = \gamma(t_2 - t_1) = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.1.34}$$

ist. Wenn nach der stationären Uhr eine Stunde vergangen ist, findet der bewegte Beobachter, daß auf seiner Uhr $\gamma(> 1)$ Stunden vergangen sind. Er wird sagen, die stationäre Uhr gehe langsamer, sie gehe nach. Dies wird *Zeitdilatation* genannt.

Es gilt auch die Umkehrung, da kein System als ein stationäres System ausgezeichnet ist: Ein Beobachter im ungestrichenen System, der die Geschwindigkeit einer Uhr prüft, die fest im gestrichenen System ist, kommt ebenfalls zu dem Schluß, daß die Uhr im Vergleich zu seiner langsamer läuft.

7.2 Minkowski-Raum

Wenden wir uns jetzt der zweiten Aufgabe der speziellen Relativitätstheorie zu, nämlich der Prüfung physikalischer Gesetze auf Forminvarianz gegenüber der Lorentz-Transformation. Die Prüfung dieser Kovarianz wird sehr erleichtert, wenn man formal eine vierte Koordinate ct einführt. Der *Minkowski-Raum* (auch als *Welt-Raum* bezeichnet) besteht dann aus den drei Dimensionen des gewöhnlichen Ortsraums und einer vierten Dimension, die proportional zur Zeit t ist.

Ein Punkt in diesem vier-dimensionalen Raum erhält dann eine Darstellung in

$$\textit{kontravarianten}\ \text{Komponenten:}\ (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \tag{7.2.1}$$

und eine Darstellung in

$$\textit{kovarianten}\ \text{Komponenten:}\ (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z), \tag{7.2.2}$$

die durch Stellung der Indizes unterschieden werden. Ein Vektor im Minkowski-Raum mit griechischen Indizes erhält die Bezeichnung

$$(x_\mu) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Man verwendet die Einsteinsche Summenkonvention, daß in einem Produkt über gleiche griechische Indizes automatisch über diese von 0 bis 3 summiert wird, d.h.

$$x_\mu x^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu$$

Zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten besteht die Beziehung

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv (g^{\mu\nu} x_\nu) \tag{7.2.3}$$

Das Quadrat des Abstands im Minkowski-Raum wird definiert durch

$$\tau^2 \equiv \frac{1}{c^2} x_\mu x^\mu \tag{7.2.4}$$

Gemäß Gleichung (7.2.3) gilt

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2} x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu,$$

d.h $g^{\mu\nu}$ definiert den Abstand und wird daher *metrischer Tensor* oder einfach *Metrik* genannt.

Gehen wir jetzt auf infinitesimale Abstände über, so ist das Quadrat des Abstands von zwei nahe benachbarten Ereignissen durch

$$(d\tau^2) = \frac{1}{c^2}(dx_\mu)(dx^\mu) = \frac{1}{c^2}[c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2] \tag{7.2.5}$$

Die Geichungen (7.1.2) und (7.1.3) implizieren, daß für $ds = cd\tau = 0$ ebenfalls auch $ds^{'} = cd\tau^{'} = 0$ im relativ bewegten System erfüllt ist. Es folgt, daß $ds = ads^{'}$, und weil weder das ruhende noch das bewegte System ausgezeichnet sind, auch $ds^{'} = ads$. Daher muß $a^2 = 1$ oder $a = 1$ sein und

$$ds = cd\tau = ds^{'} = cd\tau^{'} \tag{7.2.6}$$

ist invariant unter Lorentz-Transformation.

Zur anschaulichen Bedeutung von Gleichung (7.2.4) bemerken wir, daß im Ursprung des Koordinatensystems

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2} x_\mu x^\mu = \frac{1}{c^2}[c^2 t^2 - (x=0)^2 - (y=0)^2 - (z=0)^2] = t^2 \tag{7.2.7}$$

ist, d.h. τ entspricht der systemeigenen Zeit (*Eigenzeit, Weltzeit*).

Mit diesen Bezeichnungen können wir die Gleichungen (7.1.2) und (7.1.3) schreiben als

$$x_\mu x^\mu = x^{'}_\mu x^{'\mu} \tag{7.2.8}$$

Die Lorentztransformation (7.1.4) und (7.1.20) lauten

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu \tag{7.2.9}$$

mit

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2.10}$$

7.2.1 Vierer-Skalare, Vierer-Vektoren und Vierer-Tensoren

In Analogie zur Definition von Skalaren, Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Ortsraum (Kap. 1.5) definieren wir einen Vierer-Vektor (oder einen Tensor 1. Ordnung) als eine Menge von vier Komponenten, die sich gemäß Gleichung (7.2.10) transformieren, also das gleiche Transformationsverhalten zeigen wie der Vierer-Ortsvektor (7.2.1).
Ebenso ist ein Vierer-Tensor 2. Ordnung eine Größe mit 16 Komponenten, die sich gemäß

$$T'_{\mu\nu}(x'_\mu) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\eta T_{\alpha\eta}(x_\mu) \tag{7.2.11}$$

transformieren.
Ein Vierer-Skalar ist demnach ein Vierer-Tensor 0. Ordnung und ist invariant unter Lorentz-Transformation, d.h.

$$S'(x'_\mu) = S(x_\mu) \tag{7.2.12}$$

Das Abstandselement $(d\tau)^2$ ist ein Vierer-Skalar.
Wenn sich Vierer-Vektoren wie der Vierer-Ortsvektor transformieren, dessen Abstandselement ein Vierer-Skalar ist, dann ist auch das Skalarprodukt eines beliebigen Vierer-Vektors $Q_\mu = (Q_0, -Q_x, -Q_y, -Q_z)$ mit sich selbst ebenfalls invariant unter Lorentztransformation, d.h.

$$Q^2 = Q_\mu Q^\mu = Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 = const. \tag{7.2.13}$$

Ebenfalls folgt für zwei Vierer-Vektoren Q_μ und R_μ mit Gleichung (7.2.13)

$$(Q_\mu + R_\mu)^2 = Q_\mu Q^\mu + 2Q_\mu R^\mu + R_\mu R^\mu = Q^2 + P^2 + 2Q_\mu R^\mu = const.,$$

daß das Skalarprodukt

$$Q_\mu R^\mu = Q'_\mu R'^\mu \tag{7.2.14}$$

invariant ist.
Gelingt es, die physikalischen Gesetze mithilfe von Vierer-Tensoren gleicher Ordnung zu formulieren, ist die Kovarianz besonders leicht zu erkennen.

7.3 Lagrange-Formulierung der relativistischen Mechanik

Es seien ein Inertialsystem K und ein bewegtes Teilchen vorgegeben, das sich mit der momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu K bewegt. Es sei weiter K_0 das momentane Ruhesystem des Teilchens, wobei wir die Achsen des Bezugssystem K_0 parallel zu denen von K wählen. Die Verknüpfung dieser beiden Systeme ist dann durch die Lorentztransformation (7.1.24) zur Geschwindigkeit $\vec{V} = \vec{v}$ gegeben. Es gilt dann

$$(d\tau)^2 = \frac{1}{c^2}[c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2] = \frac{(dt)^2}{c^2}[c^2 - (\frac{dx}{dt})^2 - (\frac{dy}{dt})^2 - (\frac{dz}{dt})^2]$$
$$= (dt)^2\frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{(dt)^2}{\gamma^2},$$

oder für die Vierer-Invariante

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{7.3.1}$$

mit dem momentanen Lorentzfaktors des Teilchens

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \tag{7.3.2}$$

Das Äquivalenzpostulat erfordert die Gültigkeit des Hamilton-Prinzips in allen Inertialsystemen, d.h. es muß kovariant formulieren werden, d.h. es darf sich der Form nach unter einer Lorentz-Transformation nicht ändern.
Deshalb versucht man, daß Wirkungsintegral in den Koordinaten und Geschwindigkeiten des Minkowski-Raums und der Eigenzeit τ darzustellen:

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L^{'}(x_\mu, u_\mu, \tau), \tag{7.3.3}$$

wobei die Vierer-Geschwindigkeit u_μ definiert ist durch

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma(c, -\dot{x}, -\dot{y}, -\dot{z}) = \gamma c(1, -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z) \tag{7.3.4}$$

die Ableitung des Vierer-Ortsvektors x_μ nach der Invariante τ, und deshalb wieder ein Vierer-Vektor ist. Es gilt

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2[c^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)] = \gamma^2[c^2 - v^2] = c^2 \tag{7.3.5}$$

Die Variation des Wirkungsintegrals (7.3.3) führt auf die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau}(\frac{\partial L^{'}}{\partial u_\mu}) - \frac{\partial L^{'}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{7.3.6}$$

Man hat jetzt das Problem, daß man zur Berechnung der Lagrange-Funktion $L^{'}$ eine kovariante Form der Kräfte benötigt. Dies ist aber nur für die elektromagnetische Kraft der Fall, aber nicht bei der Gravitationskraft oder bei Zwangskräften.
Deshalb behandeln wir im folgenden nur die Lagrange-Formulierung des relativistischen freien Teilchens und von geladenen Teilchen im elektromagnetischen Feld.

7.3.1 Freies Teilchen

Wir definieren den *Vierer-Impuls* als

$$p^{\mu} = mu^{\mu} = \gamma m(c, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \tag{7.3.7}$$

Die Ortskomponenten ergeben im Grenzfall $\beta \to 0$ den bekannten Linear-Impuls p.
Wir setzen die Lagrange-Funktion für das freie Teilchen an als

$$L^{'} = \frac{m}{2} u_{\mu} u^{\mu}. \tag{7.3.8}$$

da dieser Ansatz zum einen im Grenzfall $\beta \to 0$ $L = mv^2/2$ ergibt. Zum anderen ist mit Gleichung (7.3.5) diese Lagrange-Funktion ein Vierer-Skalar und damit auch das Wirkungsintegral (7.3.3).
Die Lagrange-Gleichung (7.3.6) führt dann auf

$$\frac{d}{d\tau}(mu^{\mu}) = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = 0 \tag{7.3.9}$$

oder $p^{\mu} = const.$.
Wir definieren die relativistische Energie des freien Teilchens als

$$E = \gamma mc^2 \tag{7.3.10}$$

Damit ist dann $\gamma mc = E/c$ und der Vierer-Impuls (7.3.7) ist

$$p^{\mu} = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) \tag{7.3.11}$$

mit $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = m\gamma\vec{v}$. Nach Gleichung (7.3.5) ist dann

$$p_{\mu}p^{\mu} = m^2 u_{\mu} u^{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{m^2 c^4 \gamma^2}{c^2} - m^2\gamma^2 v^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2 c^2 = const. \tag{7.3.12}$$

oder

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \tag{7.3.13}$$

7.3.2 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Für ein Teilchen der Ladung e bietet sich als invariante Lagrange-Funktion

$$L^{'} = \frac{1}{2} m u_\mu u^\mu + \frac{e}{c} u_\mu A^\mu \tag{7.3.14}$$

an, wobei

$$A^\mu \equiv (\Phi, A_x, A_y, A_z) \tag{7.3.15}$$

das Vierer-Potential des elektromagnetischen Feldes ist, daß aus dem in Gleichung (3.13.5) eingeführten skalaren Potential Φ und den Komponenten des Vektorpotentials $\vec{A}$ gebildet wird.
Für den kanonisch konjugierten Vierer-Impuls folgt damit

$$p^\mu = \frac{\partial L^{'}}{\partial u_\mu} = m u^\mu + \frac{e}{c} A^\mu \tag{7.3.16}$$

Insbesondere für die Ortskomponenten ergibt sich wieder Gleichung (3.13.13)

$$p^i = m u^i + \frac{e}{c} A^i$$

Bilden wir die Lagrange-Gleichungen mit der Lagrange-Funktion (7.3.14) erhalten wir

$$\frac{d}{d\tau}(m u^\mu + \frac{e}{c} A^\mu) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\frac{e}{c} u_\nu A^\nu) = 0$$

oder

$$\frac{d}{d\tau}(m u^\mu) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\frac{e}{c} u_\nu A^\nu) - \frac{e}{c}\frac{dA^\mu}{d\tau} \tag{7.3.17}$$

Schreiben wir dies als generalisierte Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \tag{7.3.18}$$

so folgt die Minkowski-Kraft

$$F^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\frac{e}{c} u_\nu A^\nu) - \frac{e}{c}\frac{dA^\mu}{d\tau} \tag{7.3.19}$$

Im Grenzfall $\beta \to 0$ stimmen die Ortskomponenten der Minkowski-Kraft mit der früher abgeleiteten Beziehung (3.13.6) überein.