6. Bewegung des starren Körpers

6.1 Kinematik

Bisher haben wir nur die Bewegung von diskreten Massenpunkten betrachtet. Hier untersuchen wir jetzt Körper mit bestimmter, nicht vernachlässigbarer Ausdehnung.
Wir denken uns einen solchen Körper als ein System von Massenpunkten, wobei die Anzahl der Massenpunkte sehr groß ist. Desweiteren sollen sich die Körper nicht deformieren lassen, sodaß die Abstände zwischen den einzelnen Massenpunkten konstant sind. Es gelten also die Zwangsbedingungen

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_k| = c_{ik} = const. \tag{6.1.1}$$

Damit ist auch die Oberfläche des Körpers *starr*, was die Bezeichnung starrer Körper rechtfertigt.
Dreht man einen starren Körper, so ändert er im Gegensatz zum Massenpunkt seine Lage. Also muß man zur vollständigen Beschreibung eines Körpers im Raum auch seine Orientierung angeben. Es stellt sich die Frage: wieviel Koordinaten beschreiben die Lage eines starren Körpers vollständig? Wieviel Freiheitsgrade besitzt der starre Körper ?
Die Lage eines starren Körpers wird durch die Ortsvektoren dreier fester Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, vollständig beschrieben:

$$\vec{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \quad \vec{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)), \quad \vec{r}_3(t) = (x_3(t), y_3(t), z_3(t)) \tag{6.1.2}$$

Man braucht also 9 Koordinaten. Da es sich um einen starren Körper handelt, sind die Abstände der drei Punkte konstant und man hat zusätzlich nach Gleichung (6.1.1) noch die drei Bedingungen

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = c_{12}, \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = c_{13}, \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = c_{23} \tag{6.1.3}$$

Dadurch wir die Anzahl der Freiheitsgrade auf $f = 9 - 3 = 6$ eingeschränkt. Sechs Koordinaten reichen zur Beschreibung vollständig aus: drei beschreiben die Translation eines Massenpunktes des starren Körpers, drei zur Rotation um diesen Punkt (Theorem von Chasles). Welche Wahl der sechs Koordinaten ist zweckmäßig? Wir erinnern uns, daß zyklische Koordinaten auf Erhaltungssätze führen und damit die Bewegungsgleichungen vereinfachen.
Die *Translationsbewegung* des starren Körpers läßt sich durch die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{r} = \vec{r}(t)$ eines beliebigen festen Punkts des starren Körpers wiedergeben. Eine spezielle Wahl dieser drei Koordinaten ist der Schwerpunktvektor $\vec{R} = \vec{R}(t)$, der die Translations- und Rotationsbewegung entkoppelt, wie im Kap. 4.1 für das Zwei-Körper-Problem gezeigt wurde.

Jetzt muß noch durch die restlichen drei Koordinaten die Orientierung des Körpers im Raum wiedergegeben werden. Man führt hierzu ein körperfestes Koordinatensystem ein, indem man an den ausgezeichneten Punkt des starren Körpers (z.B. Schwerpunkt) gedanklich ein Koordinatensystem anheftet. Dieses soll alle Bewegungen des starren Körpers mit ausführen (siehe Abb. 6.1).

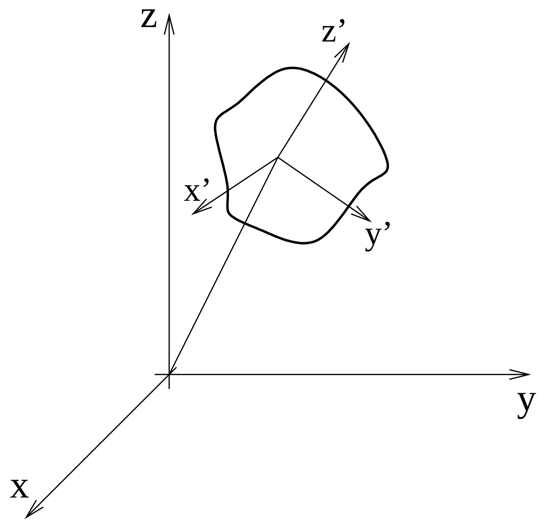

Abb. 6.1: Raumfestes und körperfestes Koordinatensystem.

Durch die Beschreibung der Bewegung des körperfesten Koordinatensystems im raumfesten Koordinatensystem wird dann die Rotationsbewegung des starren Körpers wiedergegeben. Im Folgenden gehen wir davon aus, daß der Ursprung des körperfesten Koordinatensystems und des raumfesten Koordinatensystems zusammenfallen (siehe Abb. 6.2), d.h. wir betrachten nur noch die Drehung des Körpers, sodaß sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei reduziert.

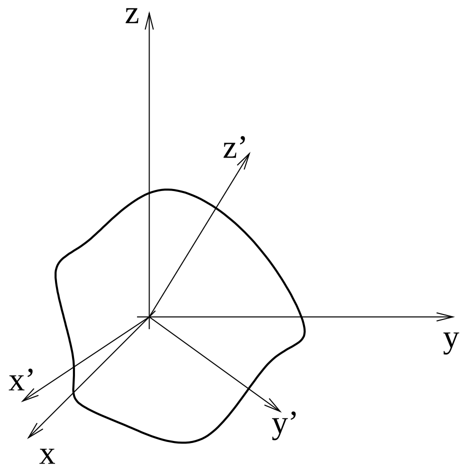

Abb. 6.2: Raumfestes und körperfestes Koordinatensystem mit gemeinsamen Koordinaten-

ursprung.

Die Lage eines beliebigen Massenpunktes des starren Körpers P läßt sich in beiden Koordinatensystemen angeben:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{x}^{'} = (x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}) \tag{6.1.4}$$

Da der tatsächliche Vektor unverändert bleibt, egal in welchem Koordinatensystem man seine Komponenten angibt, muß der Betrag des Vektors in beiden Systemen derselbe sein:

$$|\vec{x}^{'}|^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^{'2} = |\vec{x}|^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \tag{6.1.5}$$

Durch die Transformationsmatrix $A = (a_{ik})$ lassen sich die Koordinaten im raumfesten System in die Koordinaten im körperfesten System überführen:

$$\vec{x}^{'} = A\vec{x} \tag{6.1.6}$$

oder komponentenweise

$$x_i^{'} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.1.7}$$

Damit erhalten wir für Gleichung (6.1.5)

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^{'2} = \sum_{i=1}^{3} (\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j)(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k) = \sum_{j=1}^{3} (\sum_{k=1}^{3} (\sum_{i=1}^{3} a_{ij} a_{ik}) x_j) x_k = \sum_{j=1}^{3} x_j^2$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3 \tag{6.1.8}$$

ist. Transformation mit dieser Eigenschaft heißen *orthogonale Transformationen.*
Das Vertauschen der Indizes k und j in dieser Herleitung führt auf dieselbe Gleichung. Deshalb führen die neun Gleichungen (6.1.8) auf sechs Bedingungen für die Wahl der Matrixelemente a_{ij}. Damit bleiben drei Parameter übrig, um die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems im raumfesten Koordinatensystem anzugeben, z.B. die drei Eulerschen Winkel (siehe Kap. 6.7).
Der einfachste Fall einer Drehung ist die ebene Rotation (vergl. Kap. 1.5). Dreht man den starren Körper z.B. um die raumfeste Achse $\vec{e}_3$, so gilt $x_3^{'} = x_3$ und $x_1^{'}$ und $x_2^{'}$ müssen aus den Drehwinkel ϕ bestimmt werden. In diesem Fall ist nach Gleichung (1.5.6)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.1.9}$$

Eine konkrete Wahl der drei die Rotation eines starren Körpers beschreibenden Koordinaten wären die Drehwinkel um die drei festen Raumachsen. Jeder dieser drei Drehungen wird durch eine Matrix der Form (6.1.9) beschrieben. Drehungen, bzw. die zugehörigen Matrixmultiplikationen, sind aber im allgemeinen nicht kommutativ, sodaß es auf die Reihenfolge der Drehungen ankommt. Deshalb betrachten wir zunächst Drehungen, die sich als kommutativ erweisen werden.

6.2 Infinitesimale Drehungen

Wir betrachten die Verknüpfung zweier Drehungen, die durch die Drehmatrizen A und B wiedergegeben werden:

$$\vec{a} = A\vec{x}, \quad \vec{b} = B\vec{x}$$

Die zwei Möglichkeiten der Reihenfolge $\vec{c}_1 = BA\vec{x}$ und $\vec{c}_2 = AB\vec{x}$ sind für endliche Drehungen im allgemeinen verschieden $\vec{c}_1 \neq \vec{c}_2$, wie man am Beispiel einer Streichholzschachtel, die man in verschiedener Reihenfolge um 2 raumfeste Achsen jeweils um neunzig Grad dreht, leicht feststellt (Abb. 6.3).

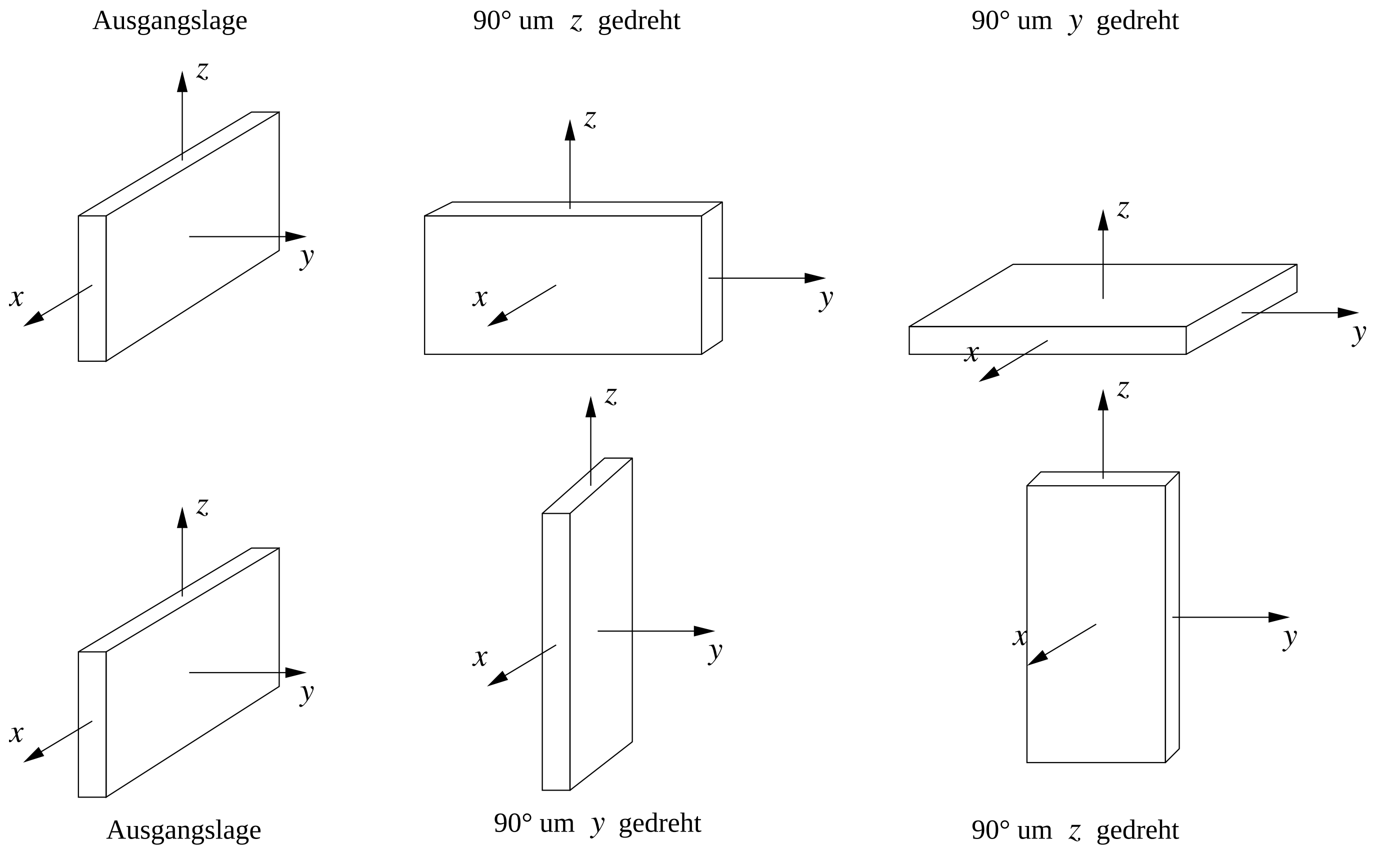

Abb. 6.3: Endliche Drehungen eines starren Körpers .

Für die Transformation einer Koordinate gilt nach Gleichung (6.1.7)

$$x_i^{'} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \tag{6.2.1}$$

Wir betrachten den Fall, daß es sich bei den Matrizen A und B jeweils um eine *nahezu identische Transformation* handelt, d.h.

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \epsilon_{ik}, \tag{6.2.2}$$

wobei ϵ_{ik} infinitesimal klein sein soll. Damit folgt für (6.2.1)

$$x_i^{'} = \sum_{k=1}^{3} (\delta_{ik} + \epsilon_{ik}) x_k \tag{6.2.3}$$

und somit

$$\vec{x}^{'} = (I + \mathrm{E})\vec{\mathrm{x}}, \tag{6.2.4}$$

wobei

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.2.5}$$

die Matrix der identischen Abbildung ist, und E eine Matrix mit infinitesimalen Einträgen ist.
Wir zeigen jetzt, daß solche infinitesimalen Drehungen kommutativ sind: mit $A = I + \mathrm{E}_1$ und $B = I + \mathrm{E}_2$ folgt

$$BA\vec{x} = (I + \mathrm{E}_2)(\mathrm{I} + \mathrm{E}_1)\vec{\mathrm{x}} = (\mathrm{I} + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2\mathrm{E}_1)\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{c}}_1$$

$$AB\vec{x} = (I + \mathrm{E}_1)(\mathrm{I} + \mathrm{E}_2)\vec{\mathrm{x}} = (\mathrm{I} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_1\mathrm{E}_2)\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{c}}_2$$

Da es sich um infinitesimale Drehungen handelt, vernachlässigen wir Terme höherer als 1. Ordnung in E_1 und E_2, sodaß

$$\vec{c}_2 = (I + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2)\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{c}}_1, \tag{6.2.6}$$

also sind infinitesimale Drehungen kommutativ.
$A^{-1} = I - \mathrm{E}_1$ ist die zu $A = I + \mathrm{E}_1$ inverse Drehung, denn

$$AA^{-1} = (I + \mathrm{E}_1)(\mathrm{I} - \mathrm{E}_1) = \mathrm{I} + \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_1\mathrm{E}_1 = \mathrm{I} \tag{6.2.7}$$

Für die infinitesimnale Drehung um die $\vec{e}_3$-Achse erhalten wir aus Gleichung (6.1.9) für kleine $\phi = d\phi_3 << 1$ mit $\cos\phi \simeq 1$ und $\sin\phi \simeq d\phi_3$

$$A = I + \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & d\phi_3 & 0 \\ -d\phi_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sodaß

$$\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & d\phi_3 & 0 \\ -d\phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\phi_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.8}$$

Diese Matrix ist antisymmetrisch ($\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$). Es läßt sich zeigen, daß die Matrix jeder infinitesimalen Drehung antisymmetrisch ist.
Die Matrizen für die infinitesimale Drehung um die $\vec{e}_1$- bzw. $\vec{e}_2$-Achse haben die Form

$$\mathrm{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\phi_1 \\ 0 & -d\phi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ d\phi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.9}$$

Dabei die vertauschen sich die Vorzeichen je nach Definition der Richtung der Drehung um die jeweilige Achse.
Eine allgemeine infinitesimale Drehung wird durch die Matrix

$$(I + \mathrm{E}_1)(\mathrm{I} + \mathrm{E}_2)(\mathrm{I} + \mathrm{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & d\phi_3 & -d\phi_2 \\ -d\phi_3 & 1 & d\phi_1 \\ d\phi_2 & -d\phi_1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathrm{I} + \mathrm{E} \tag{6.2.10}$$

beschrieben, also ist

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & d\phi_3 & -d\phi_2 \\ -d\phi_3 & 0 & d\phi_1 \\ d\phi_2 & -d\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.11}$$

mit insgesamt drei Parametern $d\phi_1$, $d\phi_2$ und $d\phi_3$. Kann man diese zu einem Vektor zusammenfassen? Dazu betrachten wir den Vektor $\vec{x}$ nach einer infinitesimalen Drehung: $\vec{x}' = (I + \mathrm{E})\vec{\mathrm{x}}$ und berechnen die Änderung des Vektors $d\vec{x} = \vec{x}' - \vec{x} = (I + \mathrm{E})\vec{\mathrm{x}} - \vec{\mathrm{x}} = \mathrm{E}\vec{\mathrm{x}}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d\phi_3 & -d\phi_2 \\ -d\phi_3 & 0 & d\phi_1 \\ d\phi_2 & -d\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 d\phi_3 - x_3 d\phi_2 \\ -x_1 d\phi_3 + x_3 d\phi_1 \\ x_1 d\phi_2 - x_2 d\phi_1 \end{pmatrix} = \vec{x} \times d\vec{\Omega}, \tag{6.2.12}$$

d.h. $d\vec{x} = \vec{x} \times d\vec{\Omega}$ kann als Kreuzprodukt von $\vec{x}$ mit $d\vec{\Omega}$ dargestellt werden, wobei

$$d\vec{\Omega} \equiv \begin{pmatrix} d\phi_1 \\ d\phi_2 \\ d\phi_3 \end{pmatrix} \tag{6.2.13}$$

$d\vec{\Omega}$ ist ein "Pseudovektor", da er für Spiegelungstransformationen invariant ist (Beweis siehe Goldstein, Kap. 4.7).

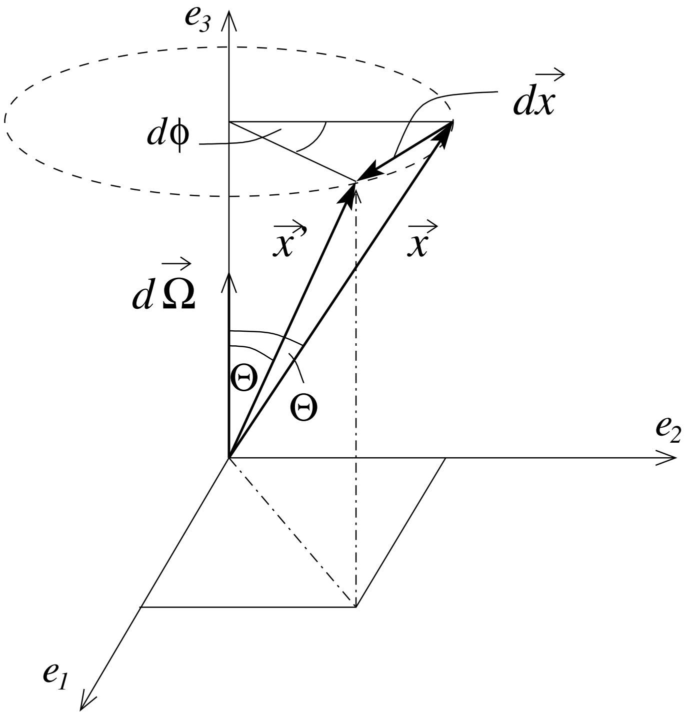

Abb. 6.4: Infinitesimale Drehung um die $\vec{e}_3$-Achse.

Betrachten wir als Beispiel noch einmal die Drehung um die $\vec{e}_3$-Achse (siehe Abb. 6.4). Mit $d\vec{\Omega} = (0, 0, d\phi_3)$ folgt

$$d\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \times (0, 0, d\phi_3) = (x_2 d\phi_3, -x_1 d\phi_3, 0)$$

Mit $x_1 = \rho \sin\phi_3$, $x_2 = \rho\cos\phi_3$ folgt

$$|d\vec{x}| = \sqrt{\rho^2 \cos^2\phi_3 d\phi_3^2 + \rho^2 \sin^2\phi_3 d\phi_3^2} = \rho d\phi_3$$

Damit haben wir nachträglich Gleichung (3.12.22) zur Darstellung infinitesimaler Drehungen bewiesen.

Wir betrachten jetzt die infinitesimale Bewegung eines beliebigen Vektors $\vec{G}$ im körperfesten Koordinatensystem. Gemäß unseren Ausführungen in Kap. 6.1 setzt sich diese zusammen aus der Bewegung des Körpers im raumfesten System und der Änderung der Koordianten von $\vec{G}$ aufgrund der Drehung der Körperachsen:

$$(d\vec{G})_{\text{körperfest}} = (d\vec{G})_{\text{raumfest}} + (d\vec{G})_{\text{rot}} \tag{6.2.14}$$

Die Änderung der Komponenten von $\vec{G}$ aufgrund der infinitesimalen Koordinatendrehung beträgt analog zu Gleichung (6.2.12)

$$(d\vec{G})_{\text{rot}} = \vec{G} \times d\vec{\Omega}, \tag{6.2.15}$$

sodaß

$$(d\vec{G})_{\text{raumfest}} = (d\vec{G})_{\text{körperfest}} + \ d\vec{\Omega} \times \vec{G}. \tag{6.2.16}$$

Für die Änderung des Vektors $\vec{G}$ erhalten wir damit die Beziehung

$$(\frac{d\vec{G}}{dt})_{\text{raumfest}} = (\frac{d\vec{G}}{dt})_{\text{körperfest}} + \ \vec{\omega} \times \vec{G} \tag{6.2.17}$$

mit der *Winkelgeschwindigkeit des Körpers*

$$\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\frac{d\Omega_1}{dt}, \frac{d\Omega_2}{dt}, \frac{d\Omega_3}{dt}) = (\frac{d\phi_1}{dt}, \frac{d\phi_2}{dt}, \frac{d\phi_3}{dt}) \tag{6.2.18}$$

Da der Vektor $\vec{G}$ beliebig ist, können wir Gleichung (6.2.17) auch als Operatorgleichung

$$(\frac{d}{dt})_{\text{raumfest}} = (\frac{d}{dt})_{\text{körperfest}} + \ \vec{\omega}\times \tag{6.2.19}$$

schreiben. Wenden wir diese Operatorgleichung auf die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ selbst an, so folgt

$$(\frac{d\vec{\omega}}{dt})_{\text{raumfest}} = (\frac{d\vec{\omega}}{dt})_{\text{körperfest}} \tag{6.2.20}$$

6.3 Scheinkräfte

Scheinkräfte sind Kräfte, die ein Körper im rotierenden Bezugssystem zusätzlich zu den äußeren Kräften erfährt. Aufgrund der Erddrehung ist die Erdoberfläche ein Beispiel für ein rotierendes System.

Wenden wir die Operatorgleichung (6.2.18) auf den Ortsvektor $\vec{r}$ an, so erhalten wir für die Geschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem

$$\vec{v}_R = (\frac{d\vec{r}}{dt})_R = (\frac{d\vec{r}}{dt})_K + \ \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_K + \ \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{6.3.1}$$

wobei die Indizes R für das raumfeste und K für das körperfeste (d.h. rotierende) Koordinatensystem stehen.

Wenden wir die Operatorgleichung (6.2.19) nochmals auf $\vec{v}_R$ an, so folgt für die Beschleunigung

$$\vec{a}_R = (\frac{d\vec{v}_R}{dt})_R = (\frac{d\vec{v}_R}{dt})_K + \ \vec{\omega} \times \vec{v}_R$$

und nach Einsetzen von Gleichung (6.3.1)

$$\begin{aligned}
\vec{a}_R &= (\frac{d\vec{v}_K}{dt})_K + (\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}))_K + \vec{\omega} \times \vec{v}_K + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \vec{a}_K + (\frac{d\vec{\omega}}{dt})_K \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\frac{d\vec{r}}{dt})_K + \vec{\omega} \times \vec{v}_K + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),
\end{aligned}$$

also

$$\vec{a}_R = \vec{a}_K + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_K + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{6.3.2}$$

Für die äußere Kraft gilt im raumfesten Inertialsystem $\vec{F}_R = m\vec{a}_R$; also erhalten wir mit Gleichung (6.3.2)

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_K + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_K + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{6.3.3}$$

Der mit dem körperfesten System mitbewegte Beobachter mißt also die Kraft

$$\vec{F}_K = m\vec{a}_K = \vec{F}_R - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_K - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{Bahnbeschleunigung}} + \vec{F}_{\text{Coriolis}} + \vec{F}_{\text{Zentrifugal}}, \tag{6.3.4}$$

wobei wir drei verschiedene *Scheinkräfte oder Trägheitskräfte* einführen:

$$\vec{F}_{\text{Bahnbeschleunigung}} \equiv -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}, \tag{6.3.5}$$

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} \equiv -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_K, \tag{6.3.6}$$

$$\vec{F}_{\text{Zentrifugal}} \equiv -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{6.3.7}$$

Die Scheinkräfte auf der Erdoberfläche können oft vernachlässigt werden, weil der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Erde mit $T = 24$ Stunden $= 86400$ s

$$\omega_{\text{Erde}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} = 7.25 \cdot 10^{-5} \quad s^{-1} \tag{6.3.8}$$

klein ist.

(a) Die Bahnbeschleunigungskraft (6.3.5) resultiert aus einer zeitlichen Änderung der Winkelgeschwindigkeit im rotierenden System.

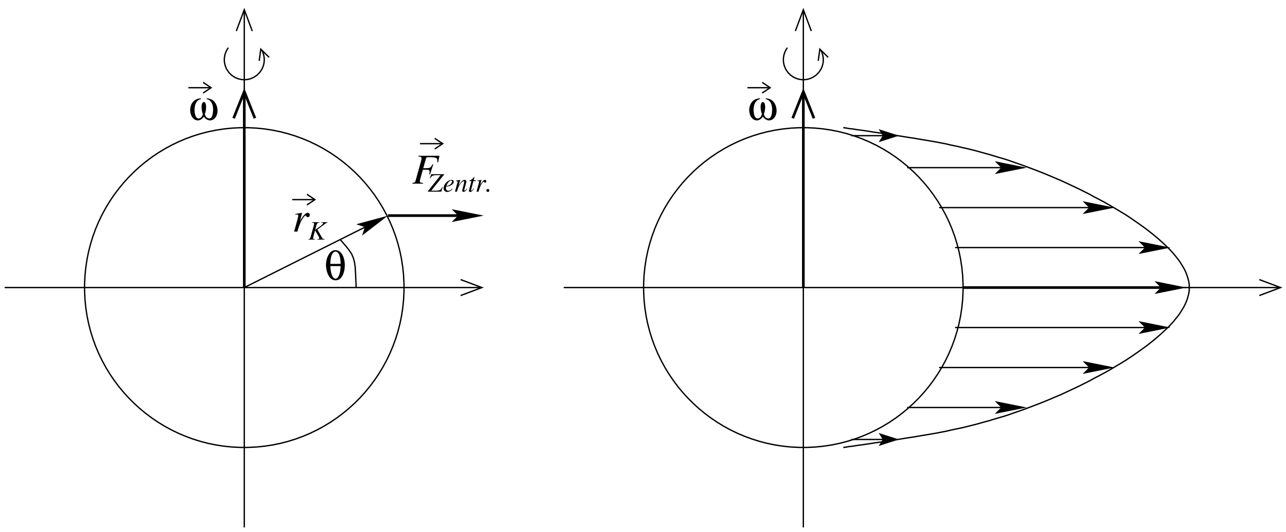

Abb. 6.5: Zur Zentrifugalkraft auf der Erde.

(b) Die Zentrifugalkraft (6.3.7) steht senkrecht auf der Drehachse und wirkt radial nach außen. Für das Beispiel der Erdoberfläche ist in Abb. 6.5 die Richtung der Zentrifugalkraft skizziert. Mit dem körperfesten Koordinatensystem auf der Erdoberfläche finden wir in Abhängigkeit vom Breitengrad θ für den Betrag der Zentrifugalkraft:

$$|\vec{F}_{\text{Zentrifugal}}| = m\omega^2 r \cos\theta \tag{6.3.9}$$

Diese ist also am Äquator ($\theta = 0$) am stärksten. Für die maximale Zentrifugalbeschleunigung ergibt sich mit $r_K = 6370$ km und Gleichungen (6.3.8) – (6.3.9)

$$|\vec{a}_{\text{Zentrifugal,max}}| = \omega^2 r = (7.25 \cdot 10^{-5})^2 (6.37 \cdot 10^6) = 0.034 \frac{m}{s^2} = 3.4 \frac{cm}{s^2}, \tag{6.3.10}$$

der mit dem Wert der Gravitationsbeschleunigung $g = 9.81$ ms^{-2} zu vergleichen ist.
Die Breitenwinkelabhängigkeit (6.3.9) der Zentrifugalkraft führt zur Abplattung der Erde.

(c) Die Corioliskraft (6.3.6) tritt erst bei Bewegung ($v_K \neq 0$) der Masse m im rotierenden Koordinatensystem auf. Sie steht senkrecht zur Drehachse $\vec{\omega}$ und senkrecht zur Bewegungsrichtung $\vec{v}_K$ der Masse.
Bewegt sich die Masse entlang eines Längengrads auf der Erdoberfläche, so bewirkt die Corioliskraft auf der Nordhalbkugel eine Rechtsabweichung und auf der Südhalbkugel eine Linksabweichung (siehe Abb. 6.6).

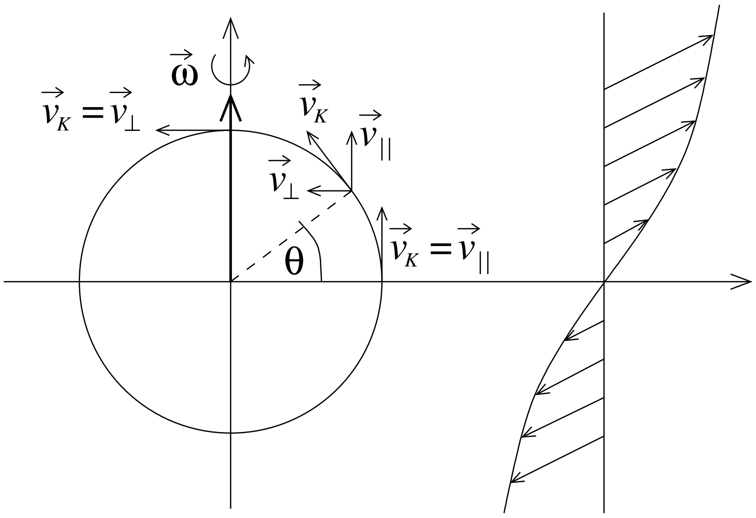

Abb. 6.6: Zur Wirkung der Corioliskraft bei Massenbewegung entlang eines Längengrades auf der Erde.

Der Betrag der Corioliskraft

$$|\vec{F}_{\text{Coriolis}}| = 2mv_K\omega|\sin\theta| \tag{6.3.12}$$

verschwindet am Äquator und hat an den Polen ihr Maximum.
Bewegt sich die Masse entlang eines Breitengrads auf der Erdoberfläche, so ist die Coriolisbeschleunigung zur Zentrifugalbeschleunigung parallel gerichtet. Falls sich die Masse dabei entgegengesetzt zur Rotationsrichtung bewegt (siehe Abb. 6.7), so gilt für die Summe der Beschleunigungswerte

$$a = a_{\text{Zentrifugal}} + a_{\text{Coriolis}} = \omega^2 r\cos\theta - 2\omega v_K = \omega r\cos\theta(\omega - \frac{2v_K}{r\cos\theta}) \tag{6.3.11}$$

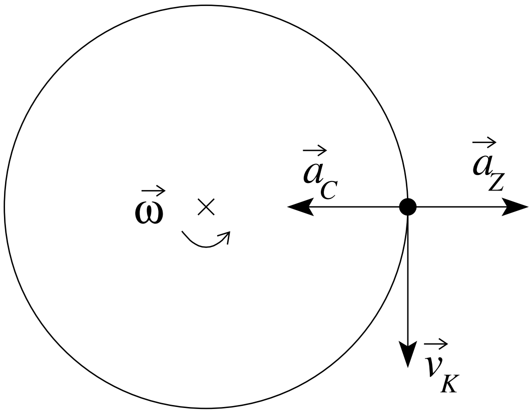

Abb. 6.7: Zur Wirkung der Corioliskraft bei Massenbewegung entlang eines Breitengrades entgegengesetzt zur Rotationsrichtung der Erde.

6.4 Trägheitstensor und Hauptachsentransformation

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen des starren Körpers ist es hilfreich, den sogenannten *Trägheitstensor* einzuführen. Dazu erinnern wir uns, daß der Drehimpuls $\vec{L}_i$ eines Massenpunktes m_i bezüglich des Koordinatenursprungs durch $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ definiert ist. Hat man ein System von N Massenpunkten, so ist der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \tag{6.4.1}$$

6.4.1 Trägheitstensor

Gemäß unserer Diskussion in Kap. 6.1 und 6.3 ist jede Bewegung des starren Körpers zusammengesetzt aus der Translation des Schwerpunkts und der Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Setzen wir das körperfeste Koordinatensystem mit dem Schwerpunktsystem gleich, so gilt nach Gleichung (6.3.1) für die Geschwindigkeit des i-ten Massenpunktes

$$\vec{v}_{i,R} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \tag{6.4.2}$$

wobei $\vec{V}$ die Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts des Systems ist. Für die gesamte kinetische Energie des Systems von N Massenpunkten erhalten wir dann

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{i,R}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i V^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

Mit der Spatproduktregel (1.4.2)

$$\vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{r}_i \cdot (\vec{V} \times \vec{\omega})$$

finden wir, daß der zweite Term aufgrund der Schwerpunktbedingung (siehe Kap. 3.12.2) verschwindet, d.h.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = (\vec{V} \times \vec{\omega}) \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 0$$

Damit setzt sich die gesamte kinetische Energie aus zwei Anteilen zusammen

$$T = T_{trans} + T_{rot} \tag{6.4.3}$$

mit

$$T_{trans} = \frac{M}{2} V^2 \tag{6.4.4}$$

und

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \tag{6.4.5}$$

Wenden wir erneut die Spatproduktregel (1.4.2) auf die Rotationsanteil der kinetischen Energien an,

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)],$$

so folgt

$$T_{rot} = \frac{\vec{\omega}}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \tag{6.4.6}$$

Setzen wir gemäß Gleichung (6.4.2) $\vec{v}_{i,K} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ in den Gesamtdrehimpuls (6.4.1) ein, so erhalten wir

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \tag{6.4.7}$$

Damit läßt sich Gleichung (6.4.6) schreiben als

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} \tag{6.4.8}$$

Mit der Identität (1.3.12) für das dreifache Kreuzprodukt in der Gleichung (6.4.7) erhalten wir

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \tag{6.4.9}$$

Für die drei Komponenten folgen dann

$$L_x = \sum_{i=1}^{N} m_i[\omega_x r_i^2 - x_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)] = \sum_{i=1}^{N} m_i[(r_i^2 - x_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z],$$

$$L_y = \sum_{i=1}^{N} m_i[\omega_y r_i^2 - y_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)] = \sum_{i=1}^{N} m_i[-x_i y_i \omega_x + (r_i^2 - y_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z],$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i[\omega_z r_i^2 - z_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)] = \sum_{i=1}^{N} m_i[-x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (r_i^2 - z_i^2)\omega_z],$$

lineare Abhängigkeiten von den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit ω_i. Mit Hilfe des *Trägheitstensors*

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{pmatrix} r_i^2 - x_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & r_i^2 - y_i^2 & -z_i y_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & r_i^2 - z_i^2 \end{pmatrix} \tag{6.4.10}$$

schreibt sich Gleichung (6.4.9) dann kurz als

$$\vec{L} = \hat{\Theta}\vec{\omega} \tag{6.4.11}$$

Da die Komponenten des Trägheitstensors reell und symmetrisch ($\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$) sind, kann die Matrix (6.4.10) durch eine Drehung des Koordinatensystems auf Diagonalgestalt gebracht werden:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \tag{6.4.12}$$

Die neuen Koordinatenachsen, die mit den Richtungen der Eigenvektoren dieser Matrix übereinstimmen, heißen *Hauptachsen* oder *Hauptträgheitsachsen*, die Diagonalelemente Θ_i *Hauptträgheitsmomente.*
Geht man vom Vielteichensystem zu einer kontinuierlichen Massenverteilung mit der Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ über, so berechnen sich die Komponenten des Trägheitstensors in Analogie zu (6.4.10) aus

$$\Theta_{ij} = \int_V dV \ \rho(\vec{r})(r^2\delta_{ij} - r_i r_j) \tag{6.4.13}$$

Als Beispiel zur Berechnung von Trägheitstensoren betrachten wir einen homogenen ($\rho = const.$) Würfel der Masse M mit der Kantenlänge b, der mit einer Ecke im Ursprung liegt (siehe Abb. 6.8).

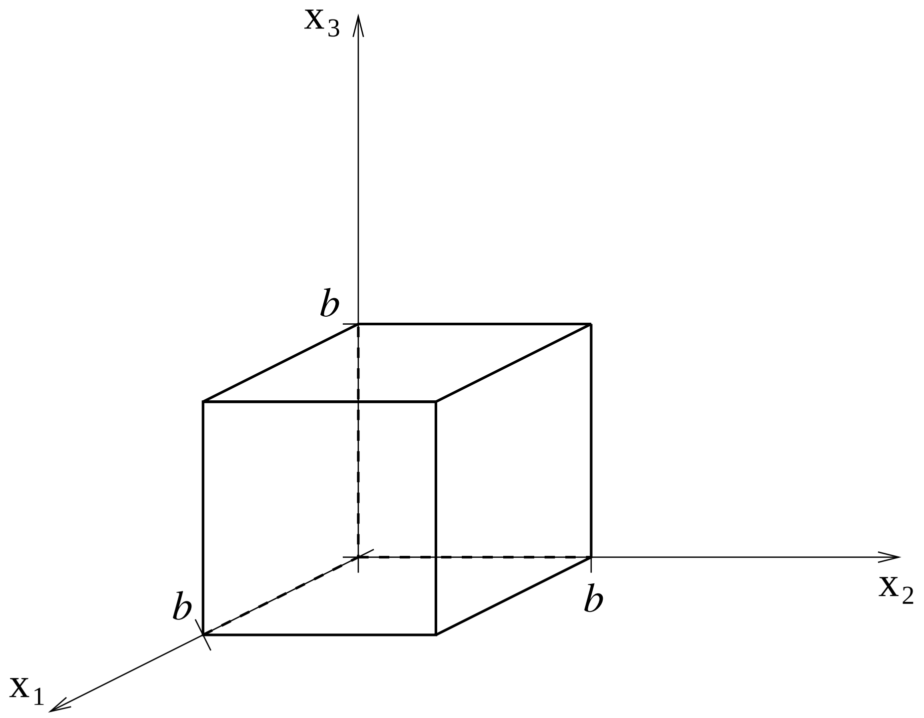

Abb. 6.8: Homogener Würfel mit einer Ecke im Ursprung.

Nach Gleichung (6.4.13) erhalten wir für

$$\Theta_{11} = \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_1 [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1^2] =$$

$$\rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_1 (x_2^2 + x_3^2) = \rho b \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 (x_2^2 + x_3^2) =$$

$$\rho b \int_0^b dx_3 (\frac{b^3}{3} + x_3^2 b) = \rho b (\frac{b^4}{3} + \frac{b^4}{3}) = \frac{2}{3}\rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2$$

weil $M = \rho b^3$. Ebenso folgt

$$\Theta_{12} = -\rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_1 x_1 x_2 = -\rho b \int_0^b dx_2 x_2 \int_0^b dx_1 x_1 = -\frac{1}{4}\rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2$$

Alle anderen Nichtdiagonalkomponenten sind gleich Θ_{12} und alle Diagonalkomponenten gleich Θ_{11}.

6.4.2 Trägheitsmoment

Mithilfe von Gleichung (6.4.11) schreibt sich die kinetische Energie der Rotation (6.4.8) als

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot (\hat{\Theta}\vec{\omega}) \tag{6.4.14}$$

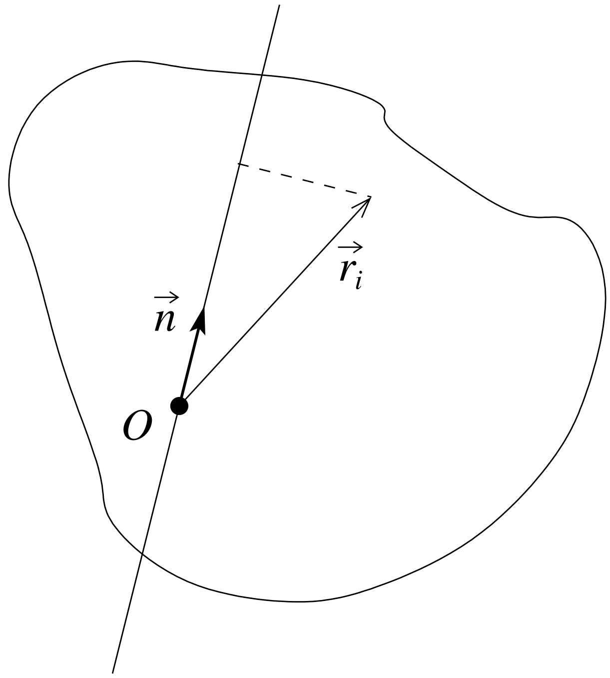

Abb. 6.9: Drehung um eine feste Drehachse $\vec{n}$.

Rotiert der starre Körper um eine feste Drehachse $\vec{n}$ (siehe Abb. 6.9), so gilt

$$\vec{\omega} = \omega\vec{n}, \tag{6.4.15}$$

und wir erhalten für Gleichung (6.4.14)

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\omega\vec{n} \cdot (\hat{\Theta}\omega\vec{n}) = \frac{\omega^2}{2}\Theta_{\vec{n}} \tag{6.4.16}$$

mit dem skalaren *Trägheitsmoment* bezüglich der Achse $\vec{n}$

$$\Theta_{\vec{n}} \equiv \vec{n} \cdot (\hat{\Theta}\vec{n}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\Theta_{ij}n_i n_j \tag{6.4.17}$$

Benutzen wir Gleichung (6.4.15) in Gleichung (6.4.6), so gilt ebenfalls

$$T_{rot} = \frac{\omega}{2}\vec{n}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\omega\vec{r}_i\times(\vec{n}\times\vec{r}_i) = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{n}\cdot[\vec{n}r_i^2-\vec{r}_i(\vec{r}_i\cdot\vec{n})] = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i[r_i^2-(\vec{r}_i\cdot\vec{n})^2] \tag{6.4.18}$$

Durch Vergleich der Gleichungen (6.4.16) und (6.4.18) erhalten wir für das Trägheitsmoment den Ausdruck

$$\Theta_{\vec{n}} = \sum_{i=1}^{N} m_i[r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{n})^2] \tag{6.4.19}$$

6.4.3 Satz von Steiner

Der Trägheitstensor und das Trägheitsmoment hängen von der Wahl des Ursprungs des körperfesten Achsensystems ab. Es existiert ein einfacher Zusammenhang zwischem dem Trägheitsmoment um eine gegebene Achse $\vec{a}$ mit dem Trägheitsmoment um eine parallele Achse $\vec{b}$, die durch das Massenzentrum des starren Körpers verläuft (siehe Abb. 6.10).

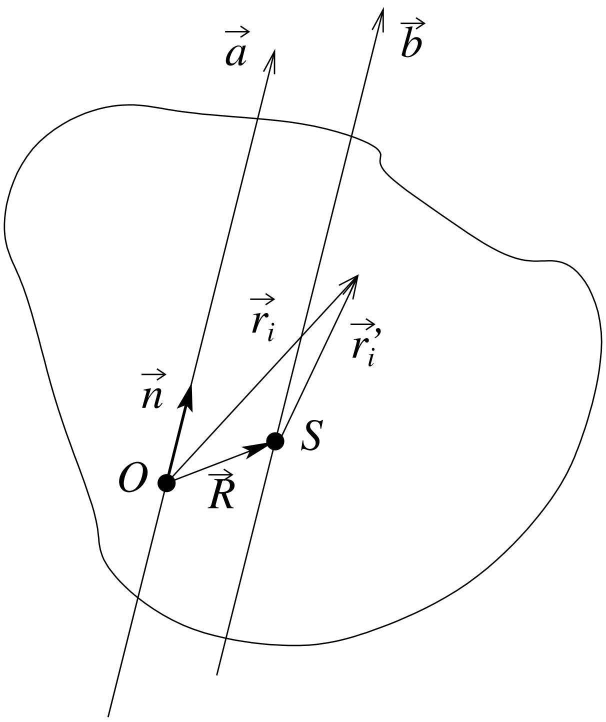

Abb. 6.10: Zum Satz von Steiner.

Nach Gleichungen (6.4.18) und (6.4.19) ist

$$\Theta_{\vec{a}} = \sum_{i=1}^{N} m_i[r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{n})^2] = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i \times \vec{n})^2, \tag{6.4.20}$$

wobei die Spatproduktregel (1.4.2) für

$$(\vec{r}_i \times \vec{n})^2 = (\vec{r}_i \times \vec{n}) \cdot (\vec{r}_i \times \vec{n}) = \vec{r}_i \cdot [\vec{n} \times (\vec{r}_i \times \vec{n})] = \vec{r}_i \cdot [\vec{r}_i(\vec{n} \cdot \vec{n}) - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}_i)] = r_i^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}_i)^2$$

ausgenutzt haben. Nach Abb. 6.10 gilt $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^{\,\prime}$ und wir erhalten für Gleichung (6.4.20)

$$\Theta_{\vec{a}} = \sum_{i=1}^{N} m_i[(\vec{R} + \vec{r}_i^{\,\prime}) \times \vec{n}]^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{R} \times \vec{n})^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i^{\,\prime} \times \vec{n})^2 + 2(\vec{R} \times \vec{n}) \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i^{\,\prime} \times \vec{n})$$

Der letzte Term verschwindet aufgrund der Definition des Massenzentrums $\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime} = 0$, denn

$$2(\vec{R}\times\vec{n})\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i^{\,'}\times\vec{n}) = -2(\vec{R}\times\vec{n})\cdot(\vec{n}\times\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i^{\,'}) = 0$$

Dann ergibt sich der *Satz von Steiner*:

$$\Theta_{\vec{a}} = \Theta_{\vec{b}} + M(\vec{R}\times\vec{n})^2 \tag{6.4.21}$$

$|\vec{R}\times\vec{n}|$ ist der senkrechte Abstand des Schwerpunkts von der Achse $\vec{a}$ durch den Ursprung (siehe Abb. 6.10).

Analog verfahren wir mit dem Trägheitstensor (6.4.10):

$$\Theta_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha[r_\alpha^2\delta_{ij} - r_{\alpha,i}r_{\alpha,j}] \tag{6.4.22}$$

Mit $\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}_\alpha^{\,'}$ oder $r_{\alpha,i} = R_i + r_{\alpha,i}^{'}$ folgt

$$\begin{aligned}
\Theta_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha[\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}(R_k + r_{\alpha,k}^{'})^2 - (R_i + r_{\alpha,i}^{'})(R_j + r_{\alpha,j}^{'})] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha[\delta_{ij}(\sum_{k=1}^{3} R_k^2 + \sum_{k=1}^{3} r_{\alpha,k}^{'2} + 2\sum_{k=1}^{3} R_k r_{\alpha,k}^{'}) - R_iR_j - r_{\alpha,i}^{'}r_{\alpha,j}^{'} - R_i r_{\alpha,j}^{'} - R_j r_{\alpha,i}^{'}] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha[\delta_{ij}\vec{r}_\alpha^{\,'2} - r_{\alpha,i}^{'}r_{\alpha,j}^{'}] + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha[\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} R_k^2 - R_iR_j] + \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha[2\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} R_k r_{\alpha,k}^{'} - R_i r_{\alpha,j}^{'} - R_j r_{\alpha,i}^{'}]
\end{aligned} \tag{6.4.23}$$

Die erste Summe in Gleichung (6.4.23) identifizieren wir mit dem neuen Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts,

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha[\delta_{ij}\vec{r}_\alpha^{\,'2} - r_{\alpha,i}^{'}r_{\alpha,j}^{'}] \tag{6.4.24}$$

Man beachte, daß dieser Tensor die gleiche formale Struktur wie der Tensor (6.4.22) hat. In der dritten Summe von Gleichung (6.4.23) treten immer Summen der Art $\sum_\alpha m_\alpha r_\alpha^{'}$ auf, die aufgrund der Schwerpunktsbedingung $\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^{\,'} = 0$ alle verschwinden.

Damit verbleibt

$$\Theta_{ij} = I_{ij} + M(\delta_{ij}R^2 - R_iR_j) \tag{6.4.25}$$

oder

$$I_{ij} = \Theta_{ij} - M(\delta_{ij}R^2 - R_iR_j), \tag{6.4.26}$$

was oft als *Verallgemeinerung des Steinerschen Satzes* bezeichnet wird.

6.4.4 Beispiel des Würfels

Zur Illustration des Steinerschen Satzes behanden wir noch einmal den in Kap. 6.4.1 betrachteten homogenen Würfel mit einer Ecke im Ursprung (siehe Abb. 6.8).
Im Folgenden bezeichnen wir mit X_i die alten Achsen und mit x_i die Schwerpunktachsen (siehe Abb. 6.11)

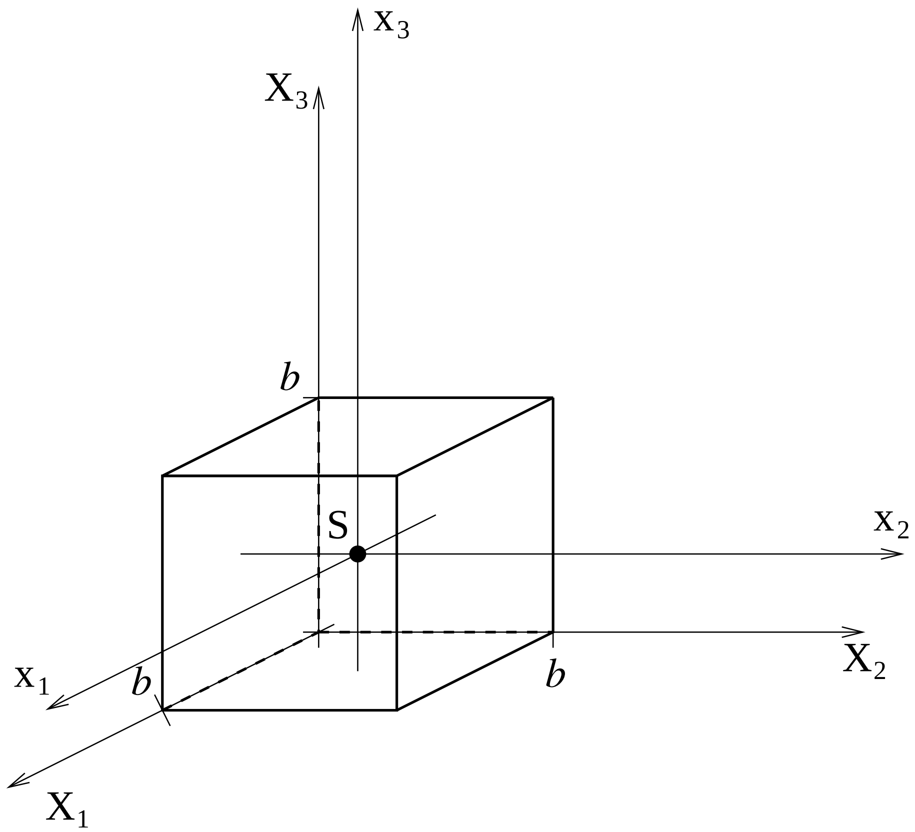

Abb. 6.11: Alte Achsen X_i und Schwerpunktachsen x_i des homogenen Würfels mit einer Ecke im Ursprung.

Der Schwerpunktvektor ist in diesem Fall $\vec{R} = (\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2})$, d.h. $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{b}{2}$ und $R^2 = \sum_{k=1}^{3} R_k^2 = \frac{3}{4}b^2$. In Kap. 6.4.1 haben wir die Komponenten des alten Trägheitstensors zu

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33} = \frac{2}{3}Mb^2$$

und

$$\Theta_{12} = \Theta_{13} = \Theta_{23} = -\frac{1}{4}Mb^2$$

berechnet.
Nach dem verallgemeinerten Steinerschen Satz (6.4.26) erhalten wir

$$I_{11} = \Theta_{11} - M(R^2 - R_1^2) = \frac{2}{3}Mb^2 - \frac{1}{2}Mb^2 = \frac{1}{6}Mb^2$$

und

$$I_{12} = \Theta_{12} - M(-R_1 R_2) = -\frac{1}{4}Mb^2 + M\frac{b^2}{4} = 0$$

und analog

$$I_{22} = I_{33} = I_{11} = \frac{1}{6}Mb^2$$

und

$$I_{13} = I_{23} = I_{12} = 0$$

Der neue Tensor ist also diagonal

$$\hat{I} = \frac{1}{6}Mb^2\hat{1} = \frac{1}{6}Mb^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.4.5 Hauptachsentransformation

Wir haben bereits in Kap. 6.4.1 vermerkt, daß die Komponenten des Trägheitstensors (6.4.10), (6.4.13) und (6.4.22) reell ($\Theta_{ij} = \Theta_{ij}^*$) und symmetrisch ($\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$) sind, d.h. die Matrix $\hat{\Theta}$ ist *hermitesch* oder *selbstadjungiert*. Jede reelle und symmetrische Matrix läßt sich durch eine orthogonale Koordinatentransformation auf Diagonalform bringen. Durch die Einführung eines neuen, gedrehten Koordinatensystems kann der Trägheitstensor stets auf Diagonalform – wie in Gleichung (6.4.12) – transformiert werden. Die neuen Koordinatenachsen heißen *Hauptachsen* oder *Hauptträgheitsachsen*.

Bezeichnen wir den resultierenden diagonalisierten Trägheitstensor mit

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij}, \tag{6.4.27}$$

so erhalten wir nach Gleichung (6.4.11) sehr einfache Ausdrücke für die Komponenten des Drehimpulsvektors

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j = \sum_{j=1}^{3} I_i \delta_{ij}\omega_j = I_i\omega_i \tag{6.4.28}$$

und die Rotationsenergie (6.4.8)

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_i L_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} I_i\delta_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_i\omega_i^2 \tag{6.4.29}$$

Das Ergebnis (6.4.28) impliziert, daß bei Rotation um die $\vec{e}_\mu$-Hauptachse, d.h. $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_\mu$, dann auch der Drehimpuls parallel zu dieser Achse ist, d.h. $\vec{L} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{e}_\mu$. Rotiert ein starrer

Körper um eine solche Hauptträgheitsachse und bezeichnet I das Hauptträgheitsmoment um diese Achse, so gilt nach Gleichung (6.4.28)

$$L_i = I\omega_i = \sum_{j=1}^{3} I\delta_{ij}\omega_j \tag{6.4.30}$$

Andererseits gilt für den alten (nicht-diagonalen) Trägheitstensor $\hat{\Theta}$ nachwievor Gleichung (6.4.11), d.h.

$$\vec{L} = \hat{\Theta}\vec{\omega} \quad \text{oder} \quad L_i = \sum_{j=1}^{3} \Theta_{ij}\omega_j \tag{6.4.31}$$

Das Gleichsetzen von Gleichungen (6.4.30) und (6.4.31) liefert sofort für $i = 1, 2, 3$ das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{3} \Big(\Theta_{ij} - I\delta_{ij}\Big)\omega_j = 0 \tag{6.4.32}$$

Ausgeschrieben lautet das Gleichungssystem (6.4.32)

$$(\Theta_{11} - I)\omega_1 + \Theta_{12}\omega_2 + \Theta_{13}\omega_3 = 0 \tag{6.4.33a}$$

$$\Theta_{12}\omega_1 + (\Theta_{22} - I)\omega_2 + \Theta_{23}\omega_3 = 0 \tag{6.4.33b}$$

$$\Theta_{13}\omega_1 + \Theta_{23}\omega_2 + (\Theta_{33} - I)\omega_3 = 0 \tag{6.4.33c}$$

Für nicht-triviale Lösungen $\vec{\omega}^{(i)} \neq \vec{0}$ müssen wir fordern, daß die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\det(\Theta_{ij} - I\delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \Theta_{11} - I & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{12} & \Theta_{22} - I & \Theta_{13} \\ \Theta_{13} & \Theta_{23} & \Theta_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \tag{6.4.34}$$

Gleichung (6.4.34) ist eine kubische Gleichung für I mit den drei Lösungen I_1, I_2 und I_3. Jede dieser Lösungen ist das Hauptträgheitsmoment um eine der Hauptachsen.
Offensichtlich können drei Fälle auftreten:
(a) Sind alle Hauptträgheitsmomente verschieden $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$, so handelt es sich um einen *unsymmetrischen Kreisel.*
(b) Beim *symmetrischen Kreisel* sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß, z.B. $I_1 = I_2 \neq I_3$.
(c) Beim *Kugelkreisel* sind alle drei Hauptträgheitsmomente gleich groß, d.h. $I_1 = I_2 = I_3$. Der in Kap. 6.4.4 betrachtete Würfel bei Drehung um den Schwerpunkt ist ein Beispiel für einen Kugelkreisel.

Rotiert der starre Körper um die Achse, die dem Hauptträgheitsmoment I_1 entspricht, dann ist nach Gleichung (6.4.30) $\vec{L} = I_1\vec{\omega}$, und beide Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ sind entlang dieser Hauptachse gerichtet. Die Richtung von $\vec{\omega}$ in Bezug auf das körperfeste Koordinatensystem ist dann identisch mit der Richtung der zu I_1 gehörenden Hauptträgheitsachse. Deshalb können wir die Richtung dieser Hauptachse bestimmen, indem wir I_1 für I in das Gleichungssystem (6.4.33) einsetzen, und damit das **Verhältnis** der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$ berechnen; dies entspricht der Bestimmung der Richtungskosini.
Ebenso verfahren wir mit I_2 und I_3, um die Richtung der entsprechenden Hauptachsen zu bestimmen.
Mit der Bestimmung des Verhältnisses $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$ sind die Richtungen der Vektoren $\vec{\omega}^{(i)}$ eindeutig festgelegt. Natürlich sind diese Vektoren gerade die Eigenvektoren der Matrix in Gleichung (6.4.32).
Wir illustrieren dieses Verfahren am Beispiel des in Kap. 6.4.4 betrachteten Würfels mit einer Ecke im Schwerpunkt. Mit $A = 2Mb^2/3$, $B = M^2/4$ lautet der Trägheitstensor

$$\hat{\Theta}_{ij} = \begin{pmatrix} A & -B & -B \\ -B & A & -B \\ -B & -B & A \end{pmatrix}$$

und die Determinante (6.4.34) ist

$$\det(\Theta_{ij} - I\delta_{ij}) = \begin{vmatrix} A-I & -B & -B \\ -B & A-I & -B \\ -B & -B & A-I \end{vmatrix} = (A-I)^3 - 3B^2(A-I) - 2B^2 = 0$$

mit den drei Lösungen $I_1 = A - 2B = Mb^2/6$ und $I_{2,3} = A + B = 11Mb^2/12$. Setzen wir die Lösung $I = I_1$ in das Gleichungssystem (6.4.33) ein, so folgt das System

$$2\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0$$

$$-\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 = 0$$

$$-\omega_1 - \omega_2 + 2\omega_3 = 0$$

mit der Lösung $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ und damit für den normierten Eigenvektor $\vec{n}_1 = 3^{-1/2}(1,1,1)$, der in Richtung des Schwerpunktes zeigt. Ebenso verfährt man mit der zweiten entarteten Lösung $I_{2,3}$, die auf die drei identischen Gleichungen

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

führt. Eine mögliche Wahl des Eigenvektors ist $\vec{n}_2 = 6^{-1/2}(2,-1,-1)$.

6.5 Das Trägheitsellipsoid

Zur Veranschaulichung der Richtungsabhängigkeit des Trägheitsmoments $\Theta_{\vec{n}}$ dient das sogenannte Trägheitsellipsoid. Wie in Abb. 6.12 skizziert, geben wir eine beliebige Rotationsachse durch den Einheitsvektor $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ mit den Richtungskosini vor.

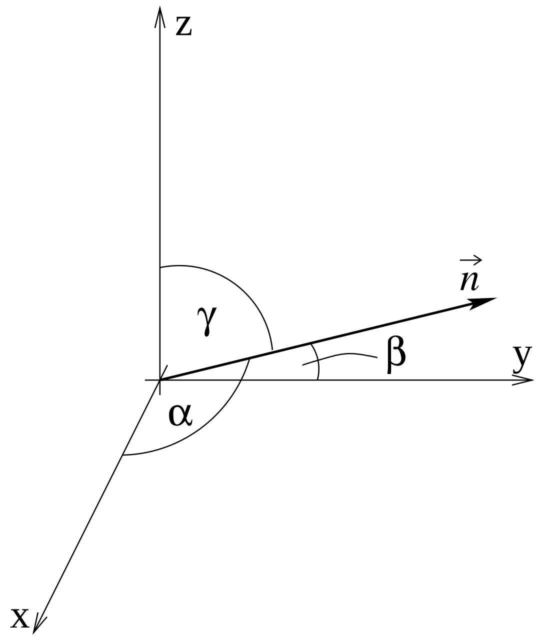

Abb. 6.12: Zum Trägheitsellipsoid.

Gemäß Gleichung (6.4.17) ist das Trägheitsmoment um diese Achse

$$\begin{aligned}\Theta = \Theta_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot (\hat{\Theta}\vec{n}) &= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \begin{pmatrix} \Theta_{xx}\cos\alpha + \Theta_{xy}\cos\beta + \Theta_{xz}\cos\gamma \\ \Theta_{yx}\cos\alpha + \Theta_{yy}\cos\beta + \Theta_{yz}\cos\gamma \\ \Theta_{zx}\cos\alpha + \Theta_{zy}\cos\beta + \Theta_{zz}\cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \Theta_{xx}\cos^2\alpha + \Theta_{yy}\cos^2\beta + \Theta_{zz}\cos^2\gamma + 2\Theta_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \\ &\quad 2\Theta_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2\Theta_{yz}\cos\beta\cos\gamma, \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

wobei wir die Symmetrie des Trägheitstensors $\hat{\Theta}$ ausgenutzt haben.
Führen wir den neuen Vektor

$$\vec{w} \equiv \frac{\vec{n}}{\sqrt{\Theta}} = (\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\Theta}}, \frac{\cos\beta}{\sqrt{\Theta}}, \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\Theta}}) \tag{6.5.2}$$

ein, so schreibt sich Gleichung (6.5.1) als

$$\Theta_{xx}w_x^2 + \Theta_{yy}w_y^2 + \Theta_{zz}w_z^2 + 2\Theta_{xy}w_xw_y + 2\Theta_{xz}w_xw_z + 2\Theta_{yz}w_yw_z = 1 \tag{6.5.3}$$

Gleichung (6.5.3) stellt in den Koordinaten (w_x, w_y, w_z) ein Ellipsoid dar, das sogenannte *Trägheitsellipsoid*.
Der Abstand w vom Drehpunkt 0 in Richtung $\vec{n}$ zum Trägheitsellipsoid ist

$$w = 1/\sqrt{\Theta}. \tag{6.5.4}$$

Durch Drehung des Koordinatensystems können wir das Ellipsoid in seine Normalform überführen,

$$\Theta_1 w_1^2 + \Theta_2 w_2^2 + \Theta_3 w_3^2 = 1 = \frac{w_1^2}{(\frac{1}{\sqrt{\Theta_1}})^2} + \frac{w_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{\Theta_2}})^2} + \frac{w_3^2}{(\frac{1}{\sqrt{\Theta_3}})^2}, \tag{6.5.5}$$

ohne die in Gleichung (6.5.3) auftretenden Mischterme. Gleichung (6.5.5) entspricht dem Trägheitsellipsoid im Hauptachsensystem. Nach Gleichung (6.5.4) ist der Radiusvektor zu einem Punkt auf diesem Trägheitsellipsoid umgekehrt proportional zum Hauptträgheitsmoment bei Rotation um diesen Vektor.

6.6 Die Eulerschen Gleichungen

Wir betrachten die Bewegungsgleichung des starren Körpers mit einem festgehaltenen Punkt, d.h. $\vec{V} = \vec{0}$ in Gleichung (6.4.2).
Im raumfesten Koordinatensystem gilt gemäß Gleichung (2.3.24) der Drehimpulssatz

$$(\frac{d}{dt})_R \vec{L} = \vec{D} \tag{6.6.1}$$

mit dem äußeren Drehmoment $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$. Mit der Operatorgleichung (6.2.19) folgt im körperfesten Koordinatensystem der Drehimpulssatz zu

$$(\frac{d\vec{L}}{dt})_K + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{D} \tag{6.6.2}$$

Wählt man die körperfesten Achsen als die Hauptträgheitsachsen des starren Körpers, dann ist nach Gleichung (6.4.28) $L_1 = \Theta_1\omega_1$, $L_2 = \Theta_2\omega_2$ und $L_3 = \Theta_3\omega_3$, und Gleichung (6.6.2) führt auf

$$\Theta_i \dot{\omega}_i + \epsilon_{ijk}\Theta_k \omega_j \omega_k = D_i, \tag{6.6.3}$$

oder komponentenweise geschrieben auf das gekoppelte Gleichungssystem

$$\Theta_1\dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3)\omega_2\omega_3 = D_1 \tag{6.6.4a}$$

$$\Theta_2\dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_3\omega_1 = D_2 \tag{6.6.4b}$$

$$\Theta_3\dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1\omega_2 = D_3 \tag{6.6.4c}$$

Dies sind die *Eulerschen Gleichungen des starren Körpers.* Die Lösungen $\vec{\omega}(t)$ gelten im körperfesten Koordinatensystem. Die Schwierigkeit besteht zunächst darin, die Komponenten des externen Drehmoments $\vec{D}$ im Hauptachsensystem zu bestimmen.
Wir betrachten daher zunächst den Fall des *kräftefreien* starren Körpers , d.h. $\vec{F} = 0$, sodaß $\vec{D} = 0$. In diesem Fall vereinfachen sich die Eulerschen Gleichungen (6.6.4) auf

$$\Theta_1\dot{\omega}_1 = (\Theta_2 - \Theta_3)\omega_2\omega_3 \tag{6.6.5a}$$

$$\Theta_2\dot{\omega}_2 = (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_3\omega_1 \tag{6.6.5b}$$

$$\Theta_3\dot{\omega}_3 = (\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1\omega_2 \tag{6.6.5c}$$

6.6.1 Beispiel 1: Kräftefreier Kugelkreisel

Mit $\vec{D} = 0$ und $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$ folgt aus Gleichungen (6.6.5) sofort $\dot{\vec{\omega}} = 0$, d.h. $\vec{\omega} = const.$, d.h. starre Rotation.
Dies entspricht der Bewegung des in Kap. 6.4.4 betrachteten kräftefreien Würfels um seinen Schwerpunkt.

6.6.2 Beispiel 2: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Mit $\vec{D} = 0$ und $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ erhalten wir für Gleichung (6.6.5c) für die Symmetrieachse $\vec{e}_3$:

$$\Theta_3\dot{\omega}_3 = 0$$

sodaß

$$\omega_3 = \tilde{\omega}_3 = const. \tag{6.6.6}$$

Eingesetzt in Gleichung (6.6.5a)

$$\Theta\dot{\omega}_1 = (\Theta - \Theta_3)\tilde{\omega}_3\omega_2$$

folgt

$$\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0, \tag{6.6.7}$$

mit der Konstanten

$$\Omega \equiv (\frac{\Theta_3}{\Theta} - 1)\tilde{\omega}_3$$

Gleichung (6.6.5b) ergibt ebenso

$$\dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0. \tag{6.6.8}$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit $i = \sqrt{-1}$ und addieren wir die resultierende Gleichung mit Gleichung (6.6.7), so folgt

$$\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 + \Omega\omega_2 - i\Omega\omega_1 = 0$$

Für die Größe $\eta \equiv \omega_1 + i\omega_2$
folgt die Gleichung

$$\dot{\eta} - i\Omega\eta = 0$$

mit der Lösung

$$\eta(t) = Ae^{i\Omega t} = A(\cos\Omega t + i\sin\Omega t),$$

sodaß

$$\omega_1(t) = A\cos\Omega t, \quad \omega_2(t) = A\sin\Omega t \tag{6.6.9}$$

mit der Konstanten A. Gleichungen (6.6.6) und (6.6.9) sind die vollständigen Lösungen. Für den Wert der Winkelgeschwindigkeit folgt

$$|\vec{\omega}| = \omega = \sqrt{A^2 + \tilde{\omega}_3^2} = const. \tag{6.6.10}$$

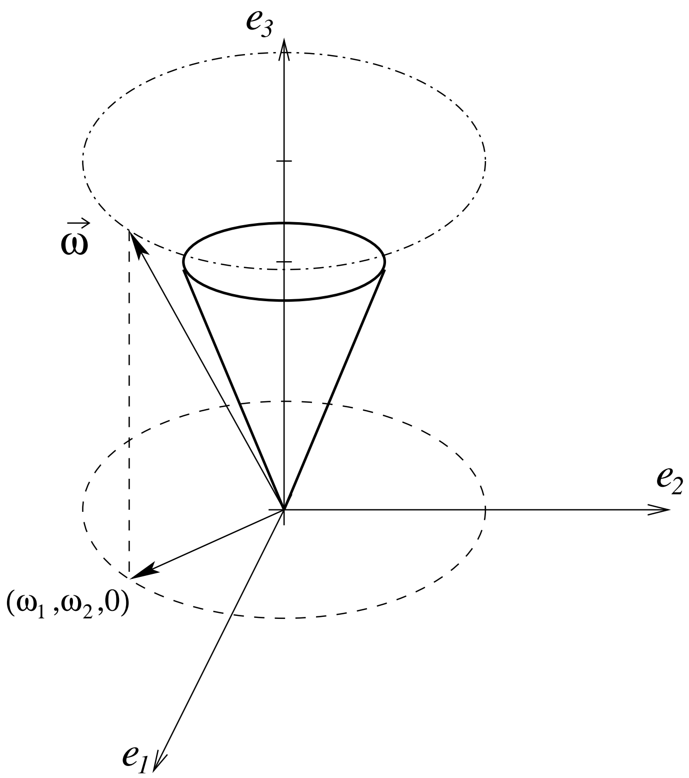

Abb. 6.13: Kräftefreie Bewegung eines symmetrischen Kreisels.

Wie in Abb. 6.13 skizziert, beschreibt die Projektion des Rotationsvektors $\vec{\omega}$ auf die $\vec{e}_1$-$\vec{e}_2$-Ebene senkrecht zur Symmetrieachse $\vec{e}_3$ einen Kreis mit der Frequenz Ω um die Symmetrieachse des symmetrischen Kreisels. Die gesamte Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist dem Betrag nach konstant und präzessiert mit der gleichen Frequenz um die $\vec{e}_3$-Achse.

Die Integrationskonstanten $\tilde{\omega}_3$ und A (die Amplitude der Präzession) können durch die üblichen Konstanten der Bewegung ausgedrückt werden, nämlich durch die kinetische Energie des Kreisels

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\Theta A^2 + \frac{1}{2}\Theta_3 \tilde{\omega}_3^2 = const.$$

und den Quadrat des Drehimpulses

$$L^2 = \Theta^2 A^2 + \Theta_3^2 \tilde{\omega}_3^2 = const.$$

Man sollte erwarten, daß die Drehachse der Erde diese Präzession ausführt, denn die äußeren auf die Erde wirkenden Drehmomente sind so schwach, daß die Rotationsbewegung als kräftefrei angesehen werden kann. Der Erdkörper hat näherungsweise die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit der Elliptizität (Abplattungsverhältnis) $(\Theta_3 - \Theta)/\Theta \simeq 1/300$. Die Winkelgeschwindigkeit seiner Rotation ist $\omega \simeq \tilde{\omega}_3 = 2\pi/86400$, die Präzessionsfrequenz daher $\Omega = \tilde{\omega}_3/300$, was einer Periode von 300 Tagen entspricht. Diese ist im wesentlichen identisch mit der Chandler-Periode der Polschwankungen von 429

Tagen, bei denen der Abstand der Drehachse vom Nordpol im Mittel um etwa 4 m auf der Erdoberfläche schwankt.

6.6.3 Beispiel 3: Kräftefreier asymmetrischer Kreisel

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$ ist.
Als erstes multiplizieren wir jede der Eulergleichungen (6.6.5) mit ω_i,

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 = (\Theta_2 - \Theta_3)\omega_1\omega_2\omega_3$$

$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 = (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_1\omega_2\omega_3$$

$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 = (\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1\omega_2\omega_3,$$

und addieren die drei Gleichungen mit dem Ergebnis

$$\sum_{i=1}^{3} \Theta_i \dot{\omega}_i \omega_i = \omega_1\omega_2\omega_3[\Theta_2 - \Theta_3 + \Theta_3 - \Theta_1 + \Theta_1 - \Theta_2] = 0 = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Theta_i\omega_i^2]$$

oder

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Theta_i\omega_i^2 = T_{rot} = a = const., \tag{6.6.11}$$

was der Energieerhaltung entspricht.
Als zweites multiplizieren wir jede der Eulergleichungen (6.6.5) mit $\Theta_i\omega_i$,

$$\Theta_1^2 \dot{\omega}_1 \omega_1 = \Theta_1(\Theta_2 - \Theta_3)\omega_1\omega_2\omega_3$$

$$\Theta_2^2 \dot{\omega}_2 \omega_2 = \Theta_2(\Theta_3 - \Theta_1)\omega_1\omega_2\omega_3$$

$$\Theta_3^2 \dot{\omega}_3 \omega_3 = \Theta_3(\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1\omega_2\omega_3,$$

und addieren diese drei Gleichungen mit dem Ergebnis

$$\sum_{i=1}^{3} \Theta_i^2 \dot{\omega}_i \omega_i = \omega_1\omega_2\omega_3[\Theta_1\Theta_2 - \Theta_1\Theta_3 + \Theta_2\Theta_3 - \Theta_2\Theta_1 + \Theta_1\Theta_3 - \Theta_2\Theta_3] = 0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\sum_{i=1}^{3}\Theta_i^2\omega_i^2]$$

oder

$$\sum_{i=1}^{3}\Theta_i^2\omega_i^2 = L^2 = b = const.. \tag{6.6.12}$$

Gleichung (6.6.12) besagt, daß der Betrag des Drehimpulses eine Konstante der Bewegung ist.
Wir lösen Gleichungen (6.6.11) und (6.6.12) jeweils nach ω_2^2 auf und setzen beide Ausdrücke gleich:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\Theta_2}[2a - \Theta_1\omega_1^2 - \Theta_3\omega_3^2] = \frac{1}{\Theta_2^2}[b - \Theta_1^2\omega_1^2 - \Theta_3^2\omega_3^2] \tag{6.6.13}$$

Es folgt

$$[\frac{\Theta_3^2}{\Theta_2^2} - \frac{\Theta_3}{\Theta_2}]\omega_3^2 = \frac{b - 2a\Theta_2}{\Theta_2^2} + [\frac{\Theta_1}{\Theta_2} - \frac{\Theta_1^2}{\Theta_2^2}]\omega_1^2$$

oder

$$\omega_3^2 = \gamma_1 - \gamma_2\omega_1^2 \tag{6.6.14}$$

mit

$$\gamma_1 = \frac{2a\Theta_2 - b}{\Theta_3(\Theta_2 - \Theta_3)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Theta_1(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_3(\Theta_2 - \Theta_3)} \tag{6.6.15}$$

Setzen wir Gleichung (6.6.14) in Gleichung (6.6.13) ein, so erhalten wir

$$\omega_2^2 = \beta_1 - \beta_2\omega_1^2 \tag{6.6.16}$$

mit

$$\beta_1 = \frac{2a\Theta_3 - b}{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)}, \quad \beta_2 = \frac{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_1)}{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)} \tag{6.6.17}$$

Die erste Eulergleichung (6.6.5a)

$$\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_2\omega_3} = \frac{\Theta_2 - \Theta_3}{\Theta_1}$$

liefert nach Einsetzen von Gleichungen (6.6.14) und (6.6.16) das elliptische Integral 1. Gattung

$$\frac{\Theta_2 - \Theta_3}{\Theta_1}t = \int_{\omega_1(0)}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\beta_1 - \beta_2\omega^2}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2\omega^2}} \tag{6.6.18}$$

Die Lösungen $\omega_i(t)$ führen dann auf Jacobische elliptische Funktionen.

6.7 Die Eulerschen Winkel

Für nicht-verschwindende äußere Drehmomente $\vec{D} \neq \vec{0}$ müssen wir die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems relativ zum raumfesten Koordinatensystem mit Hilfe von

drei unabhängigen Parametern beschreiben. Nur wenn man solche generalisierten Koordinaten gefunden hat, können wir auch den Lagrange-Formalismus im raumfesten Inertialsystem auf den starren Körper anwenden. Eine spezielle Wahl dieser Koordinaten sind die Eulerschen Winkel ϕ, θ und ψ.
Gesucht ist eine Transformationsmatrix $\hat{A}(\phi, \theta, \psi)$, die einen Vektor in den raumfesten Koordinaten (x, y, z) in die körperfesten Koordinaten $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ transformiert, d.h.

$$(x^{'}, y^{'}, z^{'}) = \hat{A}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{6.7.1}$$

mit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = a_{ij}(\phi, \theta, \psi) \tag{6.7.2}$$

Man kann die Transformation mittels dreier aufeinanderfolgender Drehungen ausführen, wobei vorher genau festgelegt wird, welche drei Drehungen in welcher Reihenfolge ausgeführt werden sollen. Jede dieser Drehungen kann durch einen Drehwinkel festgelegt werden, z. B. ist nach Gleichung (6.1.9) die Drehmatrix um einen Winkel ϕ um die z-Achse

$$\hat{A}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Eulerschen Winkel sind die Drehwinkel dreier spezieller einparametriger Drehungen, die hintereinander geschaltet werden:
1. Drehung um Winkel ϕ um die z-Achse:

$$\hat{D}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dadurch ergibt sich das in Abb. 6.14 gezeigte Koordinatensystem (ξ, η, χ) durch

$$(\xi, \eta, \chi) = \hat{D}(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

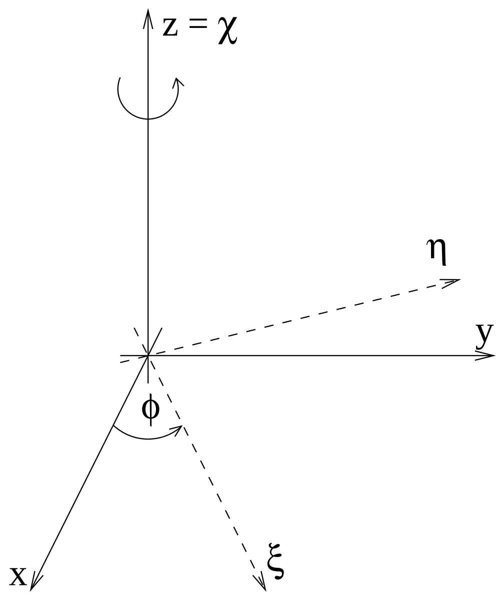

Abb. 6.14: Ergebnis der 1. Drehung.

2. Drehung um Winkel θ um die ξ-Achse (neue x-Achse):
Dadurch ergibt sich das in Abb. 6.15 gezeigte Koordinatensystem (ξ', η', χ') durch

$$(\xi', \eta', \chi') = \hat{C}(\theta) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \chi \end{pmatrix}$$

mit

$$\hat{C}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

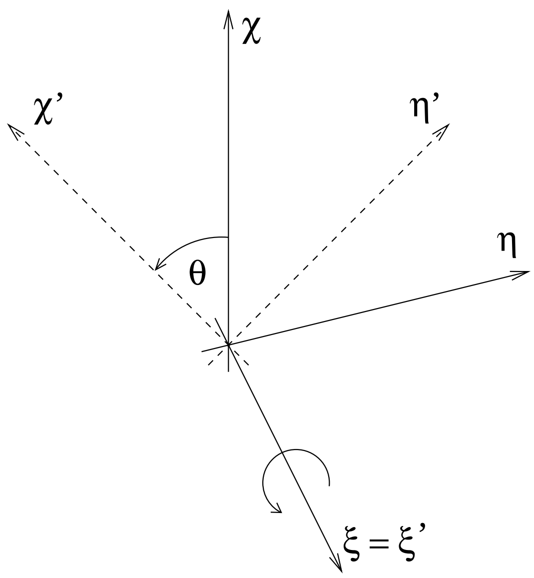

Abb. 6.15: Ergebnis der 2. Drehung.

3. Drehung um Winkel ψ um die χ'-Achse (2. neue z-Achse):
Dadurch ergibt sich das gezeigte Koordinatensystem (x', y', z') durch

$$(x', y', z') = \hat{B}(\psi) \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \chi' \end{pmatrix}$$

mit

$$\hat{B}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

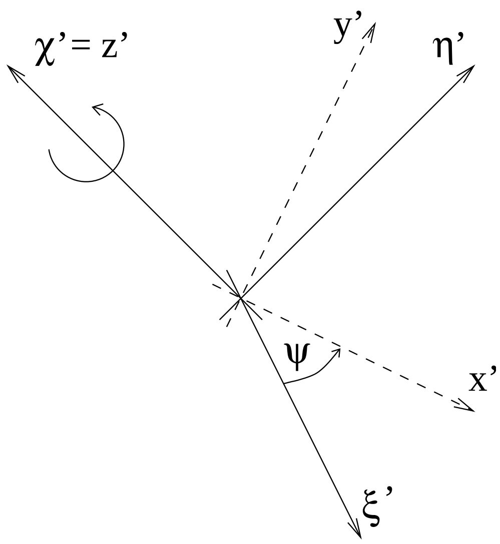

Abb. 6.16: Ergebnis der 3. Drehung.

Für die Transformationsmatrix $\hat{A}$, die einen Vektor vom raumfesten in körperfeste Koordinaten transformiert, erhalten wir dann

$$\hat{A} = \hat{A}(\phi, \theta, \psi) = \hat{B}(\psi)\hat{C}(\theta)\hat{D}(\phi) \tag{6.7.3}$$

Führen wir damit die Operation (6.7.1) nacheinander aus:

$$\hat{D}(\phi)\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z \end{pmatrix},$$

$$\hat{C}(\theta)\hat{D}(\phi)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ (-x\sin\phi + y\cos\phi)\cos\theta + z\sin\theta \\ (x\sin\phi - y\cos\phi)\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix},$$

und

$$\hat{B}(\psi)\hat{C}(\theta)\hat{D}(\phi)\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ (-x\sin\phi + y\cos\phi)\cos\theta + z\sin\theta \\ (x\sin\phi - y\cos\phi)\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} [x\cos\phi + y\sin\phi]\cos\psi + z\sin\psi\sin\theta + \sin\psi\cos\theta[-x\sin\phi + y\cos\phi] \\ -[x\cos\phi + y\sin\phi]\sin\psi + z\cos\psi\sin\theta + \cos\psi\cos\theta[-x\sin\phi + y\cos\phi] \\ (x\sin\phi - y\cos\phi)\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$$

Gemäß Gleichung (6.7.3) folgt dann für die gesamte Drehmatrix

$$\hat{A} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\theta & \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi\cos\theta & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (6.7.4)$$

$\hat{A}$ ist wieder eine orthogonale Matrix, weil sie aus der Multiplikation orthogonaler Matrizen entsteht. Deshalb ist die inverse Matrix $\hat{A}^{-1} = \hat{A}^T$, die Vektoren vom körperfesten in raumfeste Koordinaten transformiert, d.h.

$$\vec{x} = \hat{A}^{-1}\vec{x}' = \hat{A}^T\vec{x}', \quad (6.7.5)$$

gleich der transponierten Matrix $\hat{A}^T$, die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten aus $\hat{A}$ erhält.

6.8 Lagrange-Mechanik des starren Körpers

6.8.1 Lagrange-Funktion des Kreisels

Als körperfeste Achsen wählen wir die Hauptachsen des starren Körpers. Nach Gleichung (6.4.29) erhalten wir dann für die Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{\Theta_1}{2}\omega_{x'}^2 + \frac{\Theta_2}{2}\omega_{y'}^2 + \frac{\Theta_3}{2}\omega_{z'}^2 \quad (6.8.1)$$

Die zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gehörende allgemeine infinitesimale Drehung kann so aufgefaßt werden, als bestünde sie aus drei aufeinanderfolgenden infinitesimalen Drehungen mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_\phi = \dot{\phi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$ und $\omega_\psi = \dot{\psi}$, sodaß

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\psi}} \quad (6.8.2)$$

oder komponentenweise

$$\omega_{x'} = \dot{\phi}_{x'} + \dot{\theta}_{x'} + \dot{\psi}_{x'} \quad (6.8.3a)$$

$$\omega_{y'} = \dot{\phi}_{y'} + \dot{\theta}_{y'} + \dot{\psi}_{y'} \quad (6.8.3b)$$

$$\omega_{z'} = \dot{\phi}_{z'} + \dot{\theta}_{z'} + \dot{\psi}_{z'} \tag{6.8.3c}$$

Es müssen also die Projektionen der Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Drehungen auf die körperfesten Achsen bestimmt werden. Dabei ist nach Kap. 6.7 $\dot{\vec{\phi}} \parallel$ zur raumfesten z-Achse, $\dot{\vec{\theta}} \parallel$ zur $\xi = \xi'$-Achse und $\dot{\vec{\psi}} \parallel$ zur z'-Achse, d.h.

$$\dot{\vec{\psi}} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} \tag{6.8.4}$$

Mit $\dot{\vec{\phi}} \parallel (0,0,z) = \hat{A}^T(0,0,z')$ folgt aus Gleichung (6.7.4)

$$\dot{\vec{\phi}} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} \sin\psi \sin\theta \\ \cos\psi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

sodaß

$$\dot{\phi}_{x'} = \dot{\phi} \sin\psi \sin\theta, \quad \dot{\phi}_{y'} = \dot{\phi} \cos\psi \sin\theta, \quad \dot{\phi}_{z'} = \dot{\phi} \cos\theta \tag{6.8.5}$$

Mit $\dot{\vec{\theta}} \parallel \xi'$-Achse folgt wegen

$$\xi' = \hat{B}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus der Inversion von Matrix $\hat{B}$

$$\dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

sodaß

$$\dot{\theta}_{x'} = \dot{\theta} \cos\psi, \quad \dot{\theta}_{y'} = -\dot{\theta} \sin\psi, \quad \dot{\theta}_{z'} = 0 \tag{6.8.6}$$

Mit den Gleichungen (6.8.4) – (6.8.6) folgt für Gleichungen (6.8.3)

$$\omega_{x'} = \dot{\phi} \sin\psi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\psi \tag{6.8.7a}$$

$$\omega_{y'} = \dot{\phi} \cos\psi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\psi \tag{6.8.7b}$$

$$\omega_{z'} = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \tag{6.8.7c}$$

Wir erhalten sofort

$$\omega_{x'}^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2\psi \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \cos^2\psi + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\psi \sin\theta \cos\psi, \tag{6.8.8}$$

$$\omega_{y'}^2 = \dot\phi^2\cos^2\psi\sin^2\theta + \dot\theta^2\sin^2\psi - 2\dot\phi\dot\theta\cos\psi\sin\theta\sin\psi \tag{6.8.9}$$

und

$$\omega_{z'}^2 = \dot\phi^2\cos^2\theta + \dot\psi^2 + 2\dot\phi\dot\psi\cos\theta. \tag{6.8.10}$$

Für die Rotationsenergie (6.8.1) folgt dann

$$T_{rot} = \frac{\Theta_1}{2}[\dot\phi^2\sin^2\psi\sin^2\theta + \dot\theta^2\cos^2\psi + 2\dot\phi\dot\theta\sin\psi\sin\theta\cos\psi]+$$

$$\frac{\Theta_2}{2}[\dot\phi^2\cos^2\psi\sin^2\theta + \dot\theta^2\sin^2\psi - 2\dot\phi\dot\theta\cos\psi\sin\theta\sin\psi]$$

$$+\frac{\Theta_3}{2}[\dot\phi^2\cos^2\theta + \dot\psi^2 + 2\dot\phi\dot\psi\cos\theta] \tag{6.8.11}$$

Bei festgehaltenem ($\vec{V}_{SP} = 0$) Schwerpunkt gilt dann für die Lagrange-Funktion des Kreisels

$$L = T_{rot} - V(\phi,\theta,\psi) = \frac{\Theta_1}{2}[\dot\phi^2\sin^2\psi\sin^2\theta + \dot\theta^2\cos^2\psi + 2\dot\phi\dot\theta\sin\psi\sin\theta\cos\psi]+$$

$$\frac{\Theta_2}{2}[\dot\phi^2\cos^2\psi\sin^2\theta + \dot\theta^2\sin^2\psi - 2\dot\phi\dot\theta\cos\psi\sin\theta\sin\psi]$$

$$+\frac{\Theta_3}{2}[\dot\phi^2\cos^2\theta + \dot\psi^2 + 2\dot\phi\dot\psi\cos\theta] - V(\phi,\theta,\psi) = L(\dot\phi,\dot\theta,\dot\psi,\phi,\theta,\psi) \tag{6.8.12}$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = \frac{\partial L}{\partial\phi}, \qquad (6.8.13a,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial L}{\partial\theta}, \qquad (6.8.13b)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \frac{\partial L}{\partial\psi}. \qquad (6.8.13c)$$

6.8.2 Beispiel: Schwerer, symmetrischer Kreisel

Die Symmetrieachse ist natürlich eine der Hauptachsen und soll als z'-Achse des körperfesten Systems gewählt werden. Die Nullpunkte des raumfesten und körperfesten Koordinatensystems seien in den Unterstützungspunkt des Kreisels gelegt (siehe Abb. 6.17). l ist der Abstands des Schwerpunkts vom Unterstützungspunkt.

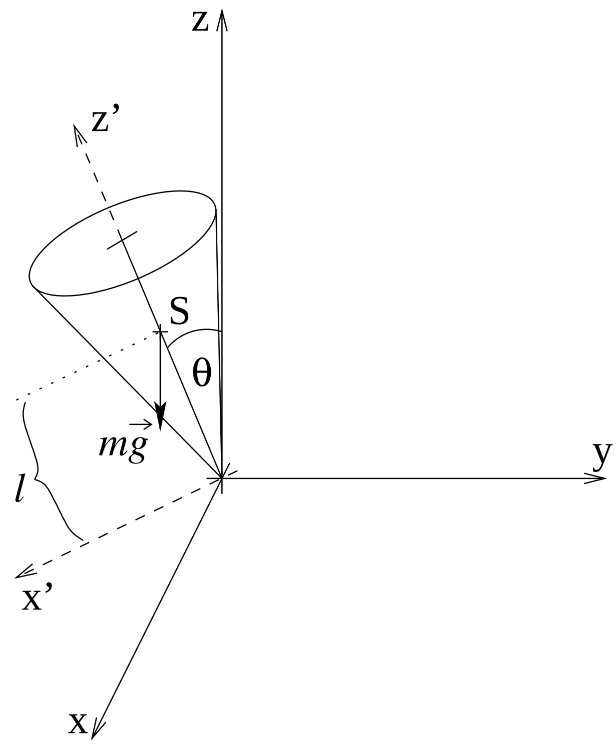

Abb. 6.17: Schwerer, symmetrischer Kreisel.

Für den symmetrischen Kreisel ist $\Theta_1 = \Theta_2$ und mit

$$\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2$$

reduziert sich die Lagrange-Funktion (6.8.12) auf

$$L = \frac{\Theta_1}{2}[\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2] + \frac{\Theta_3}{2}[\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta] - V(\phi, \theta, \psi), \tag{6.8.14}$$

wobei Θ_1 und Θ_3 die Hauptträgheitsmomente bezüglich des gewählten Ursprungs des körperfesten Koordinatensystems sind.
Die potentielle Energie ist einfach

$$V = Mgl\cos\theta, \qquad (6.8.15,$$

wobei M die Masse des Kreisels ist. Dann erhalten wir für die Lagrange-Funktion (6.8.14)

$$L = \frac{\Theta_1}{2}[\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2] + \frac{\Theta_3}{2}[\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta] - Mgl\cos\theta. \tag{6.8.16}$$

Die Koordinaten ϕ und ψ sind zyklisch, sodaß p_ϕ und p_ψ Erhaltungsgrößen sind:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2\theta + \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = const. \tag{6.8.17}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = const. \tag{6.8.18}$$

Setzen wir Gleichung (6.8.18) in Gleichung (6.8.17) ein, so folgt

$$p_\phi = \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2\theta + p_\psi \cos\theta \tag{6.8.19}$$

oder

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\Theta_1 \sin^2\theta} \tag{6.8.20}$$

mit dem Integral

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} d\phi = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta(t')}{\Theta_1 \sin^2\theta(t')} \tag{6.8.21}$$

falls die Lösung $\theta(t)$ bekannt ist.
Nach Gleichung (6.8.18) ist ebenfalls

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\Theta_3} - \dot{\phi}\cos\theta = \frac{p_\psi}{\Theta_3} - \cos\theta \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\Theta_1 \sin^2\theta}, \tag{6.8.22}$$

wobei wir Gleichung (6.8.20) eingesetzt haben. Die Integration dieser Gleichung liefert

$$\psi(t) - \psi(t_0) = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} d\psi = \int_{t_0}^{t} dt' [\frac{p_\psi}{\Theta_3} - \cos\theta(t') \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta(t')}{\Theta_1 \sin^2\theta(t')}] \tag{6.8.23}$$

bei bekannter Lösung $\theta(t)$.
Da das System konservativ ist, ist die Gesamtenergie ebenfalls eine Erhaltungsgröße:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{\Theta_1}{2}[\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2] + \frac{\Theta_3}{2}[\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta] + Mgl\cos\theta \\ &= \frac{\Theta_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\Theta_1}{2}(\frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\Theta_1 \sin\theta})^2 + \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} + Mgl\cos\theta \end{aligned} \tag{6.8.24}$$

wobei die Gleichungen (6.8.18) und (6.8.20) verwandt wurden. Es folgt

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\Theta_1}\Big(E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} - \frac{1}{2\Theta_1}(\frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\sin\theta})^2 - Mgl\cos\theta\Big) \tag{6.8.25}$$

Zur Lösung substituieren wir $u \equiv \cos\theta$, oder $\theta = \arccos u$, sodaß

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dt}$$

und $\sin^2\theta = 1 - u^2$. Dann erhalten wir für Gleichung (6.8.25)

$$\frac{\dot{u}^2}{1-u^2} = \frac{2}{\Theta_1}(E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3}) - \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{\Theta_1^2(1-u^2)} - \frac{2Mglu}{\Theta_1}$$

oder

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)[\frac{2}{\Theta_1}(E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3}) - \frac{2Mglu}{\Theta_1}] - (\frac{p_\phi - p_\psi u}{\Theta_1})^2 \tag{6.8.26}$$

Gleichung (6.8.26) führt auf das Integral

$$t - t_0 = \pm \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{\Theta_1}(1-u^2)(E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} - Mglu) - (\frac{p_\phi - p_\psi u}{\Theta_1})^2}}, \tag{6.8.27}$$

das die formale Lösung $u(t)$ und damit $\theta(t)$ ergibt. Das Polynom unter der Wurzel von Gleichung (6.8.27) ist 3. Grades in u, so daß wir auf elliptische Integrale als vollständige Lösungen kommen.

Allerdings ist eine qualitative Diskussion der möglichen Lösungen leicht möglich. Dazu definieren wir die Funktion

$$f(u) \equiv \frac{2}{\Theta_1}(1-u^2)(E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} - Mglu) - (\frac{p_\phi - p_\psi u}{\Theta_1})^2 \tag{6.8.28}$$

Damit lautet Gleichung (6.8.26) einfach

$$\dot{u}^2 = f(u) \tag{6.8.29}$$

Offensichtlich brauchen wir für reelle Werte von $\dot{u}$, daß $f(u) \geq 0$ zwischen $|u| \leq 1$. An den Nullstellen der Funktion f wechseln $\dot{u}$ und damit $\dot{\theta}$ ihr Vorzeichen, d.h. diese Nullstellen definieren gerade die Umkehrpunkte der Bewegung von θ.

Für sehr große Absolutwerte von $|u| \to \infty$ verhält sich f asymptotisch wie

$$f(|u| >> 1) \simeq \frac{2Mgl}{\Theta_1}u^3 \to \begin{cases} +\infty & \text{für } u \to \infty \\ -\infty & \text{für } u \to \infty \end{cases}$$

Für die Werte $u = \pm 1$ ist

$$f(u = \pm 1) = -(\frac{p_\phi \mp p_\psi}{\Theta_1})^2 < 0$$

negativ, sodaß eine der drei Nullstellen $u_3 > 1$ von f im Gebiet $u > 1$ liegt. Qualitativ ergibt sich das in Abb. 6.18 gezeigte Verhalten der Funktion $f(u)$.

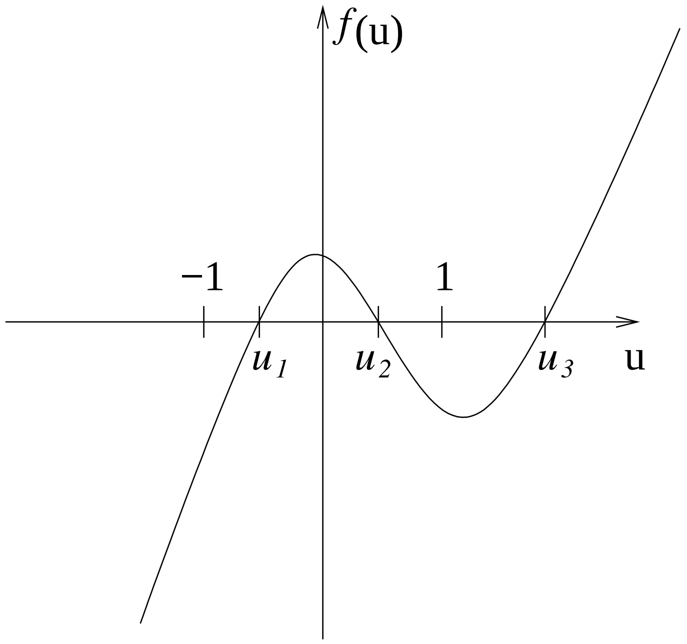

Abb. 6.18: Qualitatives Verhalten der Funktion $f(u)$.

Die beiden anderen Nullstellen liegen zwischen $-1 \leq u_1 \leq u_2 < 1$. Der Winkel Θ läuft dann zwischen den Grenzwerten

$$\arccos u_1 \leq \theta \leq \arccos u_2 \tag{6.8.30}$$

Diese Neigung der Figurenachse wird *Nutation* genannt.
Es ist üblich, die Bewegung des Kreisels dadurch zu beschreiben, daß man die Schnittkurve der Figurenachse auf einer Kugel mit Einheitsradius um den festgehaltenen Punkt aufträgt. Diese Kurve wird *Locus* der Figurenachse genannt. Die Kugelkoordianten der Punkte auf dem Locus sind mit den Eulerschen Winkeln ϕ und θ identisch. Nach Bedingung (6.8.30) liegt der Locus zwischen den Kreisen θ_1 und θ_2. Der Verlauf des Winkels ϕ richtet sich nach den Werten von Gleichung (6.8.20):

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\Theta_1 \sin^2\theta}$$

für die möglichen Werte von θ.

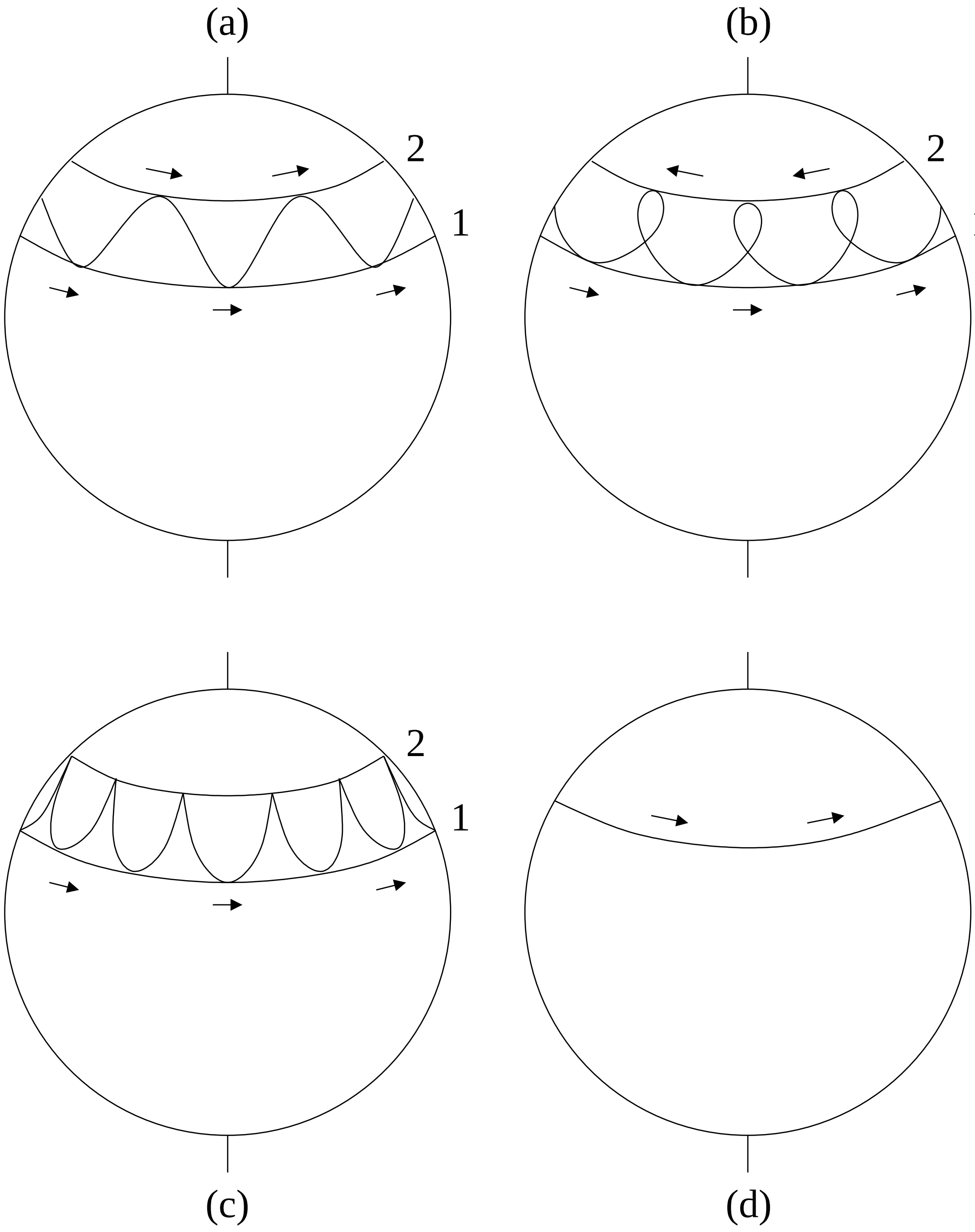

Abb. 6.19: Nutation des schweren symmetrischen Kreisels.

Je nach den Werten vom Zähler $p_\phi - p_\psi \cos\theta$ dieses Ausdrucks kann man vier Fälle unterscheiden:
(a) $p_\phi - p_\psi \cos\theta_1 \neq 0$ hat das gleiche Vorzeichen wie $p_\phi - p_\psi \cos\theta_2 \neq 0$. Dann ergibt sich die in Abb. 6.19a skizzierte zeitliche Variation der Figurenachse.
(b) $p_\phi - p_\psi \cos\theta_1 \neq 0$ hat von $p_\phi - p_\psi \cos\theta_2 \neq 0$ verschiedene Vorzeichen, sodaß die Richtung der Präzession an den Grenzkreisen verschieden ist. Es entstehen Schleifen (Abb. 6.19b).
(c) $p_\phi - p_\psi \cos\theta_2 = 0$ verschwindet am oberen Kreis, sodaß $\dot{\phi}$ und $\dot{\theta}$ gleichzeitig Null werden. Die Bahnkurve enthält Spitzen (Abb. 6.19c). Dieser Fall tritt immer dann ein, wenn die Symmetrieachse z' am Anfang festgehalten wird, sodaß sich der Kreisel anfangs nur um

seine Symmetrieachse dreht. Die Anfangsbedingungen lauten dann $\dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$ und $\theta(0) = \theta_2$.
(d) Für $\dot{\theta}(0) = 0$ und bestimmte Anfangsbedingungen führt der schwere Kreisel eine nutationsfreie Präzession (Abb. 6.19d) durch, für die exakt $\theta = const. \neq 0$ gilt. Diesen Fall diskutieren wir etwas ausführlicher.

6.8.3 Nutationsfreie Präzession des schweren, symmetrischen Kreisels

Wir gehen von den Lagrange-Gleichungen für die Winkel θ, ϕ und ψ aus und setzen dort $\theta = \theta_0 = const$ ein.
Aus der Lagrange-Funktion (6.8.16) folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \Theta_1 \ddot{\theta}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= \Theta_1 \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(-\dot{\phi}\sin\theta) + Mgl\sin\theta \\ &= \sin\theta[Mgl + \dot{\phi}^2(\Theta_1 - \Theta_3)\cos\theta - \Theta_3\dot{\phi}\dot{\psi}],\end{aligned}$$

sodaß die erste Lagrange-Gleichung lautet

$$\Theta_1\ddot{\theta} - \sin\theta[(\Theta_1 - \Theta_3)\dot{\phi}^2\cos\theta - \Theta_3\dot{\psi}\dot{\phi} + Mgl] = 0$$

Mit $\theta = \theta_0 = const.$ folgt $\ddot{\theta} = 0$ und diese Lagrange-Gleichung liefert

$$(\Theta_1 - \Theta_3)\dot{\phi}^2\cos\theta_0 - \Theta_3\dot{\psi}\dot{\phi} + Mgl = 0 \tag{6.8.31}$$

Ebenso erhalten wir aus der Lagrange-Funktion (6.8.16)

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \Theta_1\sin^2\theta\dot{\phi} + \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = \Theta_1\sin^2\theta_0\dot{\phi} + \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta_0)\cos\theta_0,$$

sodaß

$$\Theta_1\sin^2\theta_0\ddot{\phi} + \Theta_3\cos\theta_0(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\cos\theta_0) = 0 \tag{6.8.32}$$

Schließlich erhalten wir aus der Lagrange-Funktion (6.8.16)

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \Theta_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = \Theta_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta_0),$$

sodaß aus der Lagrange-Gleichung bezüglich ψ folgt

$$\Theta_3(\ddot\psi + \ddot\phi\cos\theta_0) = 0 \tag{6.8.33}$$

Setzen wir Gleichung (6.8.33) in Gleichung (6.8.32) ein, so folgt sofort $\ddot\phi = 0$ und damit $\dot\phi = \dot\phi_0 = const.$. Damit ergibt sich gemäß Gleichung (6.8.33) $\dot\psi = \dot\psi_0 = const.$ Beide Konstanten müssen Gleichung (6.8.31) erfüllen; d.h.

$$(\Theta_1 - \Theta_3)\cos\theta_0\dot\phi_0^2 - \Theta_3\dot\phi_0\dot\psi_0 + Mgl = 0 \tag{6.8.34}$$

(a) 1. Fall: für $\theta_0 = \pi/2$ oder $\Theta_1 = \Theta_3$ muß gerade

$$\dot\phi_0 = \frac{Mgl}{\Theta_3\dot\psi_0} \tag{6.8.35}$$

erfüllt sein.
(b) 2. Fall: für $\theta_0 \neq \pi/2$ und $\Theta_1 \neq \Theta_3$ hat die quadratische Gleichung (6.8.34) für $\dot\phi_0$ die beiden Lösungen

$$\dot\phi_{0,1,2} = \frac{1}{2(\Theta_1 - \Theta_3)\cos\theta_0}\left[\Theta_3\dot\psi_0 \pm \sqrt{\Theta_3^2\dot\psi_0^2 - 4Mgl(\Theta_1 - \Theta_3)\cos\theta_0}\right] \tag{6.8.36}$$

Reelle Lösungen existieren nur, wenn das Argument der Wurzel nicht negativ ist, d.h.

$$\dot\psi_0^2 \geq \frac{4Mgl(\Theta_1 - \Theta_3)\cos\theta_0}{\Theta_3^2}$$

Für $\dot\psi_0 = (2/\Theta_3)\sqrt{Mgl(\Theta_1 - \Theta_3)\cos\theta_0}$ ergibt Gleichung (6.8.36) gerade eine Präzessionsfrequenz

$$\dot\phi_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{(\Theta_1 - \Theta_3)\cos\theta_0}}$$

mit $\theta_0 \neq \pi/2$. Für $\dot\psi_0 > (2/\Theta_3)\sqrt{Mgl(\Theta_1 - \Theta_3)\cos\theta_0}$ ergeben sich die zwei Präzessionsfrequenzen (6.8.36).
Zusammenfassend: Die nutationsfreie Präzession wird nur erreicht, wenn der Kreisel durch einen geeigneten anfänglichen Stoß eine Anfangsgeschwindigkeit $\dot\phi(0) = \dot\phi_0$ erhält, die gleich den in Gleichungen (6.8.35) und (6.8.36) errechneten Werten ist.