4. Das Zweikörper-Problem

Wir betrachten die Bewegung zweier Massenpunkte unter dem Einfluß einer wechselseitigen Zentralkraft. Wir bezeichnen mit m_1 und m_2 die Massen der beiden Massenpunkte mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Es ist aber ungünstig, mit den sechs kartesischen Komponenten der beiden Ortsvektoren zu arbeiten. Wir werden stattdessen neue Koordinaten suchen mit dem Ziel, möglichst viele zyklische Koordinaten zu finden, um die Erhaltungssätze der korrespondierenden kanonisch konjugierten Impulse auszunutzen.

4.1 Lagrange-Funktion des Zweikörper-Problems

Wir wählen als neue Koordinaten (siehe Abb. 4.1):
(a) den Abstandsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tag{4.1.1}$$

und
(b) den in Kap. 3.12.2 eingeführten Schwerpunktvektor

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{4.1.2}$$

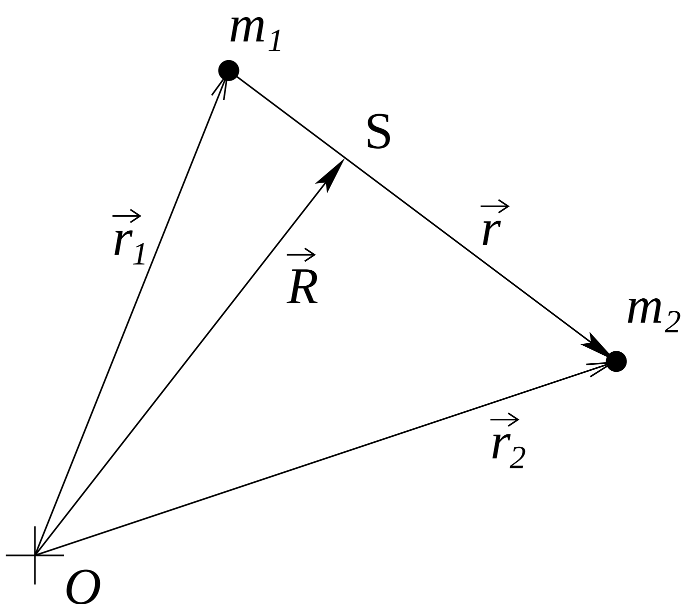

Abb. 4.1: Abstandsvektor $\vec{r}$ und Schwerpunktvektor $\vec{R}$ beim Zweikörper-Problem.

Für die Umkehrtransformationen gelten dann

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{4.1.3}$$

und

$$\vec{r_2} = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \tag{4.1.4}$$

Wir merken an, daß bei der Plantetenbewegung die Masse der Sonne $m_1 = M_s$ sehr viel größer als die Masse des Planeten $m_2 = m_p$ ist. In diesem Fall $M_s >> m_p$ folgt aus Gleichungen (4.1.3) – (4.1.4)

$$\vec{r}_S = \vec{R} - \frac{m_p}{M_s+m_p}\vec{r} \simeq \vec{R}, \quad \vec{r}_p = \vec{R} + \frac{M_s}{M_s+m_p}\vec{r} \simeq \vec{R} + \vec{r}, \tag{4.1.5}$$

sodaß bei der speziellen Wahl des Schwerpunktsystems ($\vec{R} = 0$) die Sonne im Urprung liegt ($\vec{r}_S \simeq 0$) und der Planetenortsvektor mit dem Abstandsvektor $\vec{r}_p \simeq \vec{r}$ zusammenfällt.
Da die Massenpunkte gegenseitig Zentralkräfte ausüben, kann das zugehörige Potential nur eine Funktion des Abstands $r = |\vec{r}|$ sein. Mit den Transformationen (4.1.3) – (4.1.4) erhalten wir im allgemeinen Fall für die Lagrange-Funktion des Zweikörper-Problems

$$\begin{aligned} L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r_2} - \vec{r_1}|) &= \frac{m_1}{2}\Big[\dot{\vec{R}}^2 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2\Big] + \\ &\frac{m_2}{2}\Big[\dot{\vec{R}}^2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2\Big] - V(r) \\ = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1m_2(m_1+m_2)}{2(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r) &= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\dot{\vec{r}}^2 - V(r) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Neben der Gesamtmasse

$$M = m_1 + m_2 \tag{4.1.7}$$

definieren wir die sogenannte *reduzierte Masse* zu

$$\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}. \tag{4.1.8}$$

Gleichung (4.1.8) läßt sich auch als Summe der inversen Massen schreiben:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{4.1.9}$$

Für die Gesamt-Lagrange-Funktion (4.1.6) erhalten wir dann

$$L = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r) = L_{Sp} + L_{rel}, \tag{4.1.10}$$

die wir als Summe eines Schwerpunktanteils

$$L_{Sp} = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 \tag{4.1.11}$$

und eines Relativanteils

$$L_{rel} = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r) \tag{4.1.12}$$

schreiben können, da die Gesamt-Lagrange-Funktion (4.1.10) keine Mischterme in $\vec{R}$ und $\vec{r}$ enthält. Offensichtlich läßt sich die Schwerpunktbewegung von der Relativbewegung separieren, denn die Berechnung der Lagrange-Gleichungen ergibt

$$\text{Schwerpunktbewegung: } M\ddot{\vec{R}} = 0 \tag{4.1.13}$$

und

$$\text{Relativbewegung: } \mu\ddot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{4.1.14}$$

Weil die Schwerpunktkoordinate $\vec{R}$ nicht in der Gesamt-Lagrange-Funktion (4.1.10) auftritt, ist diese zyklisch, sodaß nach Kap. (3.12) der kanonisch konjugierte Impuls

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const. \tag{4.1.15}$$

erhalten bleibt in Übereinstimmung mit Gleichung (4.1.13). Durch nochmalige Zeitintegration erhalten wir für die Bewegung des Schwerpunktvektors

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M}t \tag{4.1.16}$$

mit der Integrationskonstanten $\vec{R}_0$.
Die Separierung (4.1.10) in Schwerpunktbewegung und Relativbewegung ergibt sich, weil "zufällig" die richtigen Ortskoordinaten gewählt wurden.
Die Bewegungsgleichung (4.1.15) für die Relativbewegung entspricht der Lösung des Gesamtproblems (4.1.10) im Schwerpunkt-Ruhesystem ($\vec{R} = 0$) aufgrund der Translations-Invarianz des Gesamtsystems gegenüber Verschiebungen des Schwerpunktvektors.

4.2 Relativbewegung

Aufgrund der Kugelsymmetrie des Potentials $V(r)$ ist es naheliegend, sphärische Polarkoordinaten zu wählen.
Wir wissen bereits aus Kap. 2.3.6, daß bei Zentralkräften $\vec{F}||\vec{r}$ der Drehimpuls $\vec{l} = const.$ erhalten ist. Hier ist also der Drehimpuls der Relativbewegung eine Erhaltungsgröße:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = const. \tag{4.2.1}$$

Aus Gleichung (4.2.1) folgt direkt, daß der Abstandsvektor $\vec{r}$ und der lineare Impuls $\vec{p}$ in einer Ebene senkrecht zum Drehimpulsvektor $\vec{l}$ liegen, der fest im Raum liegt (siehe Abb. 4.2). Die Relativbewegung verläuft in dieser einen Ebene, und wir haben nur noch ein zweidimensionales Problem. Die ebenen Polarkoordinaten r und ϕ reichen zur Beschreibung aus.

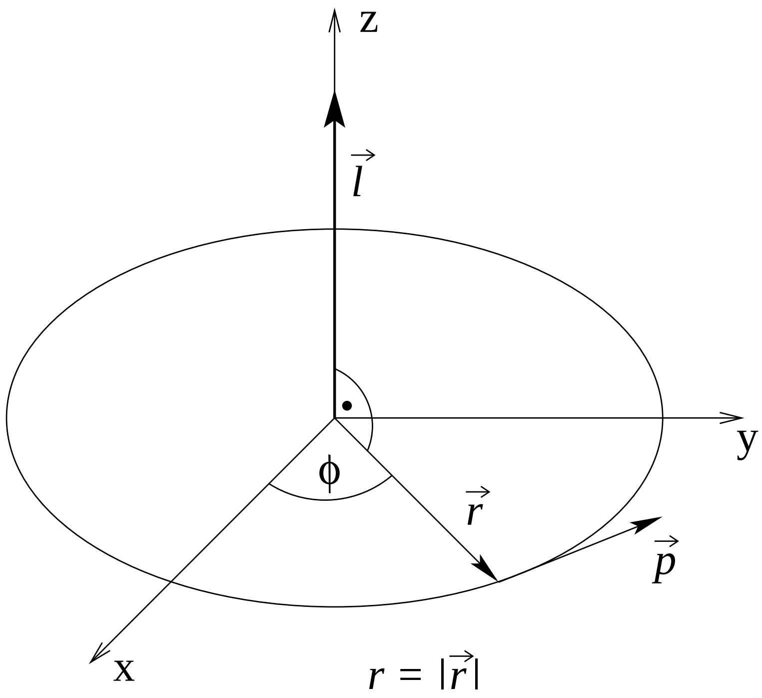

Abb. 4.2: Zur Illustration der Relativbewegung.

Wegen (siehe Beispiel Kap. 3.8.3 mit $\theta = \phi$) $T = (\mu/2)\dot{\vec{r}}^2 = (\mu/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$ gilt für die Lagrange-Funktion (4.1.12) der Relativbewegung

$$L_{rel} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \tag{4.2.2}$$

Die Koordinate ϕ taucht nicht in dieser Lagrange-Funktion auf, ist also zyklisch, sodaß der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls

$$p_\phi = \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} \equiv l = const. \tag{4.2.3}$$

eine Erhaltungsgröße ist. l ist der Betrag des Drehimpulses bezüglich des Schwerpunktsystems. Natürlich entspricht (4.2.3) der Lagrange-Gleichung der Relativbewegung bezüglich der Koordinate ϕ.

4.2.1 Flächensatz

Das Ergebnis (4.2.3) hat eine einfache geometrische Interpretation:

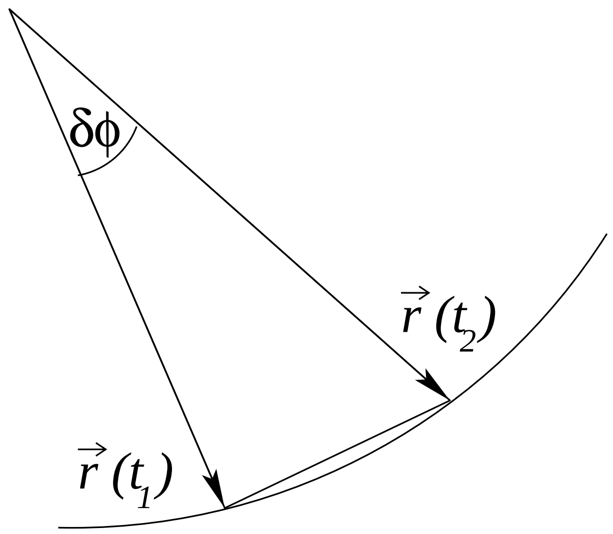

Abb. 4.3: Zur Illustration des Flächenstzes.

Wie in Abb. 4.3 skizziert, überstreicht der Radiusvektor $\vec{r}(t)$ auf seiner Bahn im Zeitintervall $dt = t_2 - t_1$ die Fläche $dA = \frac{1}{2}r^2 d\phi$ (Fläche des Dreiecks). Teilen wir durch dt, so erhalten wir mit Gleichung (4.2.3) für die "Flächengeschwindigkeit"

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{l}{2\mu} = const. \tag{4.2.4}$$

Damit haben wir den *Flächensatz* oder das *2. Keplersche Gesetz* bewiesen: Der Fahrstrahl $\vec{r}$ überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

4.2.2 Energieerhaltungssatz

Aus der Lagrange-Funktion (4.2.2) erhalten wir

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial r} = \mu r\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

und

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}, \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}}) = \mu\ddot{r},$$

sodaß für die Lagrange-Gleichung der Relativbewegung bezüglich der Koordinate r folgt

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{4.2.5}$$

Nach Gleichung (4.2.3) ist $\dot{\phi}^2 = l^2/(\mu^2 r^4)$ sodaß

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = \mu\ddot{r} + \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\Big) = 0$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\dot{r}$,

$$\mu\ddot{r}\dot{r} + \frac{dr}{dt}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\Big) = 0$$

und wenden die Kettenregel der Differentiation an, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\Big) = 0$$

oder

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E = const. \tag{4.2.6}$$

Dies ist natürlich der bekannte Energieerhaltungssatz

$$E = T + V = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = const.$$

da wir ja von vorneherein ein nicht-dissipatives konservatives System betrachtet haben. Mit der Definition des *effektiven Potentials*

$$V_{eff}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{4.2.7}$$

schreibt sich der Energieerhaltungssatz (4.2.6) als

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E = const. \tag{4.2.8}$$

4.2.3 Qualitative Aussagen zur Bewegung am Beispiel $V = kr^2$, $k = const.$

In Abbildung 4.4 skizzieren wir die Variation des effektiven Potentials $V_{eff}(r)$ als Funktion von r mit dem Beispielpotential des harmonischen Oszillators $V = kr^2$.

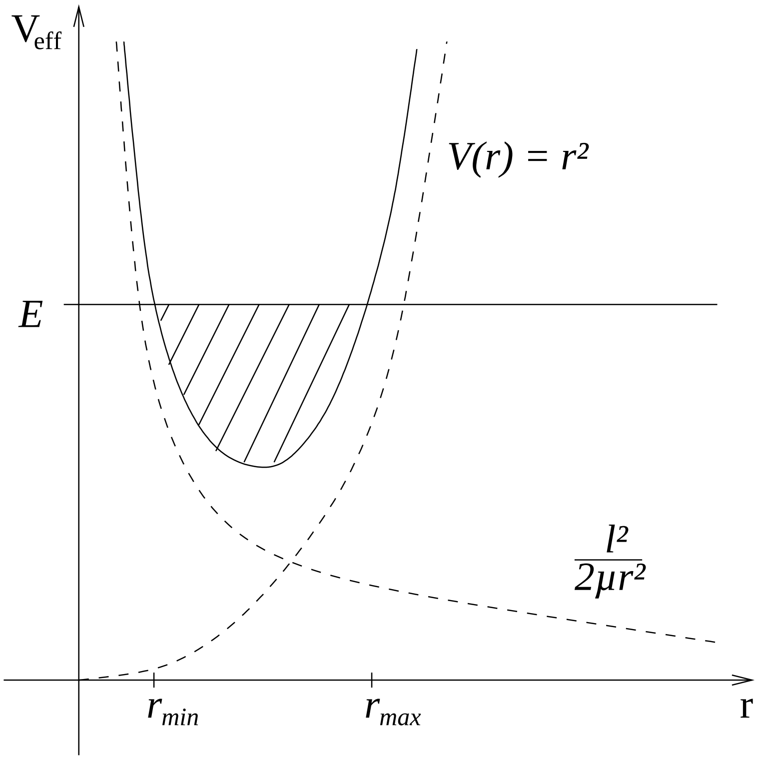

Abb. 4.4: Effektives Potential am Beispiel des harmonischen Oszillators.

Aufgrund von Gleichung (4.2.8) entspricht die schraffierte Fläche in Abb. 4.4 der Differenz $E - V_{eff} = (\mu/2)\dot{r}^2$. Weil $(\mu/2)\dot{r}^2 \geq 0$, sind nur Bewegungszustände mit $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ möglich, wobei der minimale und maximale Abstand durch $V_{eff}(r_{min}) = E$ und $V_{eff}(r_{max}) = E$ gegeben sind. Für die Bewegung erhält man gebundene Zustände mit den in Abb. 4.5 skizzierten Bahnen.

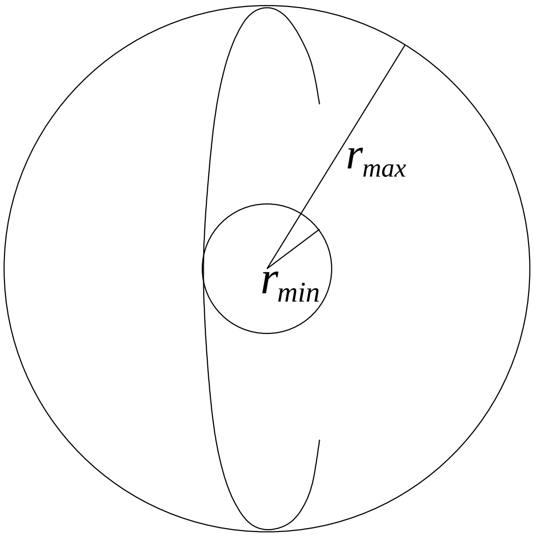

Abb. 4.5: Resultierende Bahnkurven.

Für $l \neq 0$ ist $r_{min} > 0$, d.h. der Körper kann nur für verschwindenden Drehimpuls $l = 0$ ins Zentrum der Bewegung fallen. Für $l \neq 0$ ist an den Punkten $r = r_{min}$ und $r = r_{max}$ zwar $\dot{r} = 0$, aber (wegen $\dot{\phi} = l/(\mu r^2) \neq 0$) nicht die gesamte kinetische Energie $T = 0$, sodaß $\dot{\vec{r}} \neq \vec{0}$ selbst bei r_{min} und r_{max}.

4.2.4 Lösung der Bewegungsgleichung

Wir berechnen jeweils $\vec{r}(t)$ und $\phi(t)$ als Funktion der Zeit t und die Abhängigkeit $\phi = \phi(r)$. Aus der Bewegungsgleichung (4.2.8),

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 = E - V_{eff}(r)$$

folgt sofort

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r))}$$

oder

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r))}} \tag{4.2.9}$$

Durch Integration erhalten wir

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt' = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r'))}} \tag{4.2.10}$$

Aus dem Flächensatz (4.2.3) folgt

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \tag{4.2.11}$$

oder

$$\phi - \phi_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{l}{\mu r^2(t')} = \frac{l}{\mu}\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{r^2(t')}, \tag{4.2.12}$$

wobei die Lösung $r(t)$ nach Gleichung (4.2.10) eingesetzt werden muß.
Wir können aber auch Gleichung (4.2.11) umformen zu

$$dt = \frac{\mu r^2 d\phi}{l}$$

und dieses Ergebnis in Gleichung (4.2.9) einsetzen. Dann ergibt sich

$$d\phi = \frac{l}{\mu}\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r))}}$$

oder

$$\phi - \phi_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' = l \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu(E - V_{eff}(r'))}}, \tag{4.2.13}$$

sodaß wir die formale Lösung der Bahnkurve $\phi = \phi(r)$ oder nach Invertierung zu $r = r(\phi)$ erhalten. Zur weiteren Reduzierung von Gleichung (4.2.13) müssen wir das Potential $V(r)$ im effektiven Potential (4.2.7) festlegen.

4.2.5 Bewegungen im Zentralfeld

Gemäß der allgemeinen Diskussion in Kap. 4.2.3 verläuft die Bewegung im Bereich $r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}$, wobei der minimale ($r_{min}$) und maximale ($r_{max}$) Abstand durch die Nullstellen der Funktion

$$E - V_{eff} = E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0 \tag{4.2.14}$$

gegeben sind. Für spezielle Werte von $V(r)$, E und l hat Gleichung (4.2.14) nur eine Nullstelle: in solchen Fällen gilt dann nach (4.2.6), daß $\dot{r} = 0 \ \forall t$ und $r = const.$. Das Teilchen bewegt sich dann auf einer Kreisbahn.
Ist die Bewegung im Potential $V(r)$ periodisch, dann verläuft die Bahn, wie in Abb. 4.6 skizziert, in geschlossenen Bahnen.

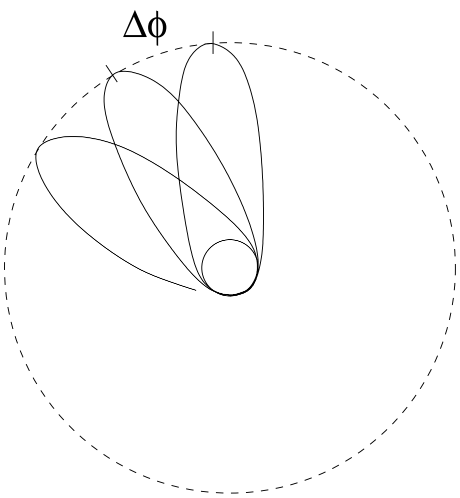

Abb. 4.6: Geschlossene Bahnkurven.

Die Änderung im Winkel ϕ bei der Variation von r von r_{min} bis r_{max} und zurück läßt sich aus Gleichung (4.2.13) berechnen:

$$\Delta\phi = \frac{2l}{\mu} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r))}} = 2l \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V_{eff}(r))}}. \tag{4.2.15}$$

Die Bewegung ist geschlossen, falls

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{a}{b}, \tag{4.2.16}$$

wobei $a, b \in \mathbb{N}$ beliebige ganze Zahlen sind. Dann wiederholt sich die Bahn nach b Perioden weil $\sin(2\pi a) = 0$. Man kann zeigen (Übungsaufgabe), daß dies nur für Potentialverläufe $V(r) \propto r^n$ mit $n = -1$ und $n = 2$ auftreten kann.

4.3 Kepler-Problem: Planetenbewegung

Wir betrachten jetzt das spezielle Wechselwirkungspotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{4.3.1}$$

mit $\alpha = const.$.
Dieser Fall ist von fundamentaler Bedeutung, da es sowohl für die Gravitationswechselwirkung zweier Massen mit $\alpha = Gm_1m_2$ als auch für die Coulombwechselwirkung zweier Ladungen mit $\alpha = -q_1q_2$ gilt. Für das effektive Potential (4.2.7) erhalten wir dann

$$V_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \tag{4.3.2}$$

Gleichung (4.2.13) reduziert sich in diesem Fall auf

$$\phi - \phi_0 = l\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu(E - \frac{l^2}{2\mu r'^2} + \frac{\alpha}{r'})}} \tag{4.3.3}$$

Mit der Substitution $u = 1/r'$ erhalten wir daraus mit $r' = 1/u$ und $dr'/du = -1/u^2$

$$\phi - \phi_0 = l\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}} \frac{du}{\sqrt{2\mu(E - \frac{l^2u^2}{2\mu} + \alpha u)}} = \int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}} \frac{du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2\alpha\mu u}{l^2} + \frac{2\mu E}{l^2}}} \tag{4.3.4}$$

Das in (4.3.4) auftretende Integral lösen wir mit dem in der Integraltafel von Gradshteyn und Ryzhik (1965, Formeln 2.26 und 2.261) angebenen Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}} \tag{4.3.5}$$

für die Funktion $R(x) = a + bx + cx^2$ mit $\Delta = 4ac - b^2 < 0$.
In unserem Fall ist $a = 2\mu E/l^2$, $b = 2\alpha\mu/l^2$ und $c = -1$, sodaß

$$\Delta = -\frac{8\mu E}{l^2} - \frac{4\alpha^2\mu^2}{l^4} = -\frac{4\mu}{l^2}(2E + \frac{\alpha^2\mu}{l^2}) < 0$$

Unter Verwendung von (4.3.5) erhalten wir dann für Gleichung (4.3.4)

$$\phi - \phi_0 = -\Big[\arcsin\frac{\frac{2\alpha\mu}{l^2} - 2u}{\sqrt{\frac{4\mu}{l^2}(2E + \frac{\alpha^2\mu}{l^2})}}\Big]_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}} = \Big[\arcsin\frac{\frac{\alpha\mu}{l^2} - u}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}}\Big]_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} \tag{4.3.6}$$

Wir benutzen (Gradshteyn und Ryzhik 1965, Formel 1.623.1)

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x,$$

sodaß

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x) = \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$$

und erhalten damit für (4.3.6)

$$\phi - \phi_0 = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}} - \arccos \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}}$$

Wir wählen als Anfangsbedingung

$$\phi_0 = \arccos \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}},$$

sodaß als Lösung folgt

$$\phi = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\alpha^2\mu^2}{l^4}}} = \arccos \frac{\frac{l^2}{\alpha\mu r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}} \tag{4.3.7}$$

Lösen wir Gleichung (4.3.7) nach r auf, so erhalten wir über

$$\frac{l^2}{\alpha\mu r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \cos\phi$$

die invertierte Lösung

$$r = \frac{\frac{l^2}{\mu\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \cos\phi} \tag{4.3.8}$$

Wir definieren jetzt zwei Parameter:

$$\text{Exzentrizität } \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \tag{4.3.9}$$

und

$$\text{Bahnparameter } p \equiv \frac{l^2}{\mu\alpha} \tag{4.3.10}$$

Damit schreibt sich die Bahnkurve (4.3.8) kompakt als

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi} \tag{4.3.11}$$

Wie wir uns im nächsten Abschnitt überzeugen, ist Gleichung (4.3.11) die allgemeine Bestimmungsgleichung eines Kegelschnitts, d.h. des Schnittes einer Ebene mit einem

Kreiskegel, ausgedrückt in Polarkoordinaten, wobei ein Brennpunkt mit dem Koordinatenursprung von r (!) zusammenfällt, also mit dem Schwerpunkt des Zweikörperproblems, der bei der Planetenbewegung praktisch mit der Position der Sonne zusammenfällt (siehe Gleichung (4.1.5)).

4.4 Mathematische Zwischenbetrachtung über Kegelschnitte in Polarkoordinaten

Die Gleichung (4.3.11) beschreibt im allgemeinen
Kreise für $\epsilon = 0$,
Ellipsen für $\epsilon < 1$,
Parabeln für $\epsilon = 1$,
Hyperbeln für $\epsilon > 1$.

4.4.1 Ellipse und Kreise

Unter einer *Ellipse* versteht man die Menge aller Punkte P in einer Ebene, deren Entfernungen r und r' von zwei festen Brennpunkten $F(c, 0)$ und $F'(-c, 0)$ eine konstante Summe ist (Abb. 4.7), d.h.

$$r + r' = 2a, \qquad \text{wobei } 2a > \overline{FF'} = 2c \tag{4.4.1}$$

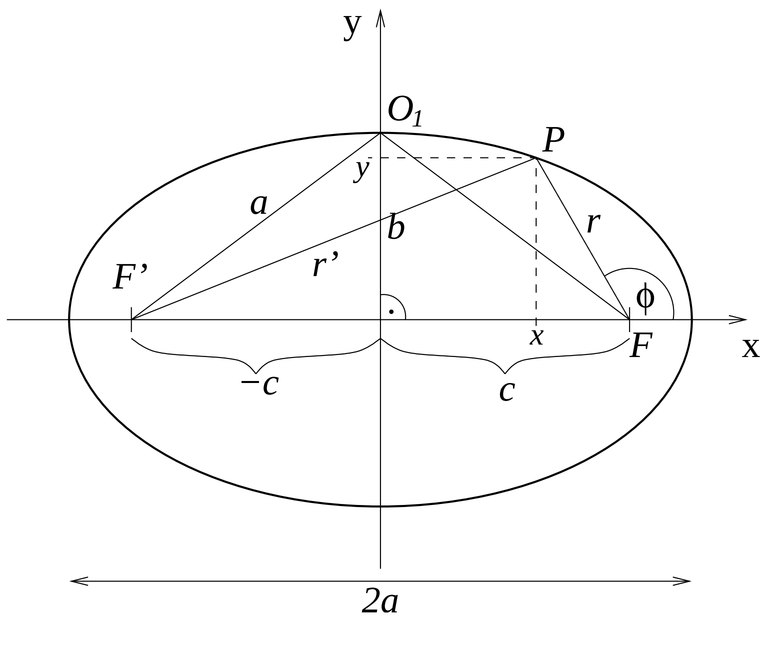

Abb. 4.7: Ellipse.

Für den in Abb. 4.7 eingezeichneten Punkt O_1 gilt $r = r' = a$ also $c^2 + b^2 = a^2$, sodaß $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. a und b werden als große bzw. kleine Halbachse der Ellipse bezeichnet.
Wir führen die Exzentrizität ϵ der Ellipse ein durch die Forderung, daß $c = \epsilon a$ sein soll,

d.h. also

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \leq 1 \tag{4.4.2}$$

Für $\epsilon = 0$ ist dann $a = b$ und $c = 0$, und die Brennpunkte $F = F^{'}$ fallen mit dem Koordinatenursprung zusammen: die Ellipse wird zum Kreis.
Wir benutzen den Kosinussatz (Kap. 1.6.3) für das Dreieck $\Delta(F^{'}FP)$ und erhalten mit $\cos(\pi - \phi) = -cos\phi$:

$$r^{'2} = (2c)^2 + r^2 - 2r(2c)\cos(\pi - \phi) = 4c^2 + r^2 + 4rc\cos\phi$$

Zusammen mit Gleichung (4.4.1) folgt

$$r^{'} = 2a - r = \sqrt{4c^2 + r^2 + 4rc\cos\phi}$$

Wir quadrieren diese Gleichung und benutzen $c = \epsilon a$:

$$4a^2 - 4ar + r^2 = 4\epsilon^2 a^2 + r^2 + 4\epsilon ar\cos\phi,$$

sodaß

$$4ar(1 + \epsilon\cos\phi) = 4a^2(1 - \epsilon^2)$$

oder

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon\cos\phi} \tag{4.4.3}$$

Mit $p = a(1 - \epsilon^2)$ ist diese Gleichung identisch mit Gleichung (4.3.11).
Verwenden wir die kartesischen Koordinaten x, y des Punktes P in Abb. 4.7, so gilt mit dem Satz von Pythagoras:

$$r^2 = y^2 + (c - x)^2, \quad r^{'2} = (x + c)^2 + y^2$$

Damit folgt für Gleichung (4.4.1):

$$\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + \sqrt{y^2 + (x + c)^2} = 2a$$

und nach Quadrieren :

$$y^2 + (c - x)^2 + y^2 + (x + c)^2 + 2\sqrt{(y^2 + (c - x)^2)(y^2 + (x + c)^2)} = 4a^2$$

oder nach Ordnen und Division durch 2

$$(2a^2 - c^2) - (y^2 + x^2) = \sqrt{(y^2 + (c - x)^2)(y^2 + (x + c)^2)} = \sqrt{y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2}$$

Mit $b^2 = a^2 - c^2$ erhalten wir $2a^2 - c^2 = a^2 + b^2$ sodaß

$$(a^2 + b^2) - (y^2 + x^2) = \sqrt{y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2}$$

Das Quadrieren dieser Gleichung führt auf

$$(a^2 + b^2)^2 + (x^2 + y^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2$$

oder

$$(a^2 + b^2)^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = y^4 + x^4 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 - 2c^2x^2 + c^4$$

Daraus folgt nach Ordnen

$$y^2(2c^2 + 2a^2 + 2b^2) + x^2(2a^2 + 2b^2 - 2c^2) = (a^2 + b^2)^2 - c^4$$

und mit $c^2 = a^2 - b^2$

$$4a^2y^2 + 4b^2x^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$$

Dividieren wir durch $4a^2b^2$ so folgt die Normalform der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.4.4}$$

An dieser Gleichung erkennt man schön, daß in der Tat a und b die große bzw. kleine Halbachsen der Ellipse sind. Für spätere Verwendung notieren wir, daß die Fläche der Ellipse durch $A = \pi ab$ gegeben ist

Im Sonderfall des Kreises ($\epsilon = 1$) ist $a = b = r$ und Gleichung (4.4.4) reduziert sich auf $x^2 + y^2 = r^2$.

4.4.2 Parabel

Unter einer *Parabel* versteht man den geometrischen Ort aller Punkte P einer Ebene, die von einer festen Leitlinie L und dem festen Brennpunkt $F(c, 0)$ gleichen Abstand haben (Abb. 4.8).

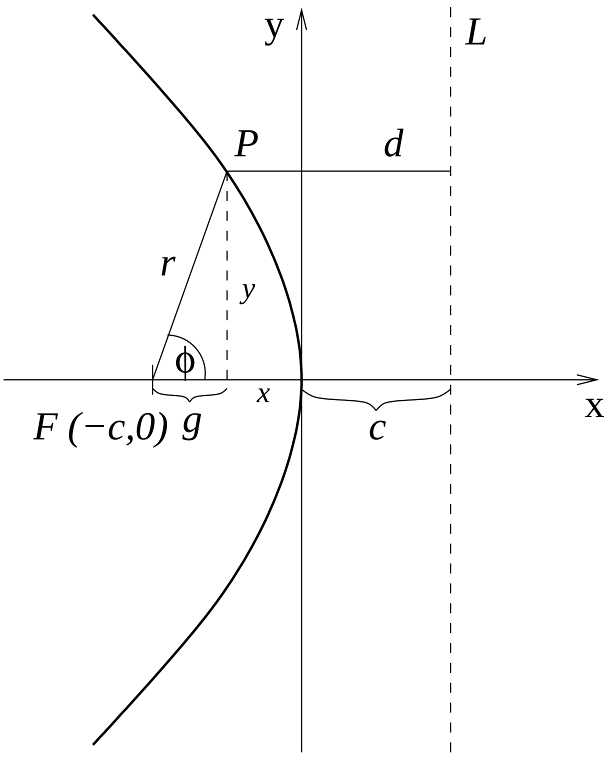

Abb. 4.8: Parabel.

Bezeichne r den Abstand des Punktes P von F und d den Abstand des Punktes P von der Leitlinie L, dann muß nach Definition $d = r$ sein. Es gilt die Beziehung (siehe Abb. 4.8)

$$2c = d + r\cos\phi$$

sodaß mit $d = r$ folgt

$$2c = r(1 + \cos\phi)$$

oder

$$r = \frac{2c}{1 + \cos\phi} \tag{4.4.5}$$

Mit $p = 2c$ und $\epsilon = 1$ ist diese Gleichung identisch mit Gleichung (4.3.11).
Verwenden wir die kartesischen Koordinaten x, y des Punktes P so gilt:

$$c + x = d = r$$

und

$$r^2 = y^2 + g^2 = y^2 + (c - x)^2$$

Die Kombination beider Gleichungen führt auf die Scheitelgleichung

$$y^2 = (c+x)^2 - (c-x)^2 = 4cx \tag{4.4.6}$$

4.4.3 Hyperbel

Unter einer *Hyperbel* versteht man den geometrischen Ort aller Punkte P einer Ebene, deren Entfernungen von zwei festen Brennpunkten $F(c,0)$ und $F^{'}(-c,0)$ eine konstante Differenz ergeben (Abb. 4.9), d.h.

$$r - r^{'} = 2a, \qquad \text{wobei } 2a < \overline{FF'} = 2c \tag{4.4.7}$$

ergibt den einen Ast der Hyperbel, während

$$r^{'} - r = 2a \tag{4.4.8}$$

den zweiten Ast der Hyperbel ergibt.

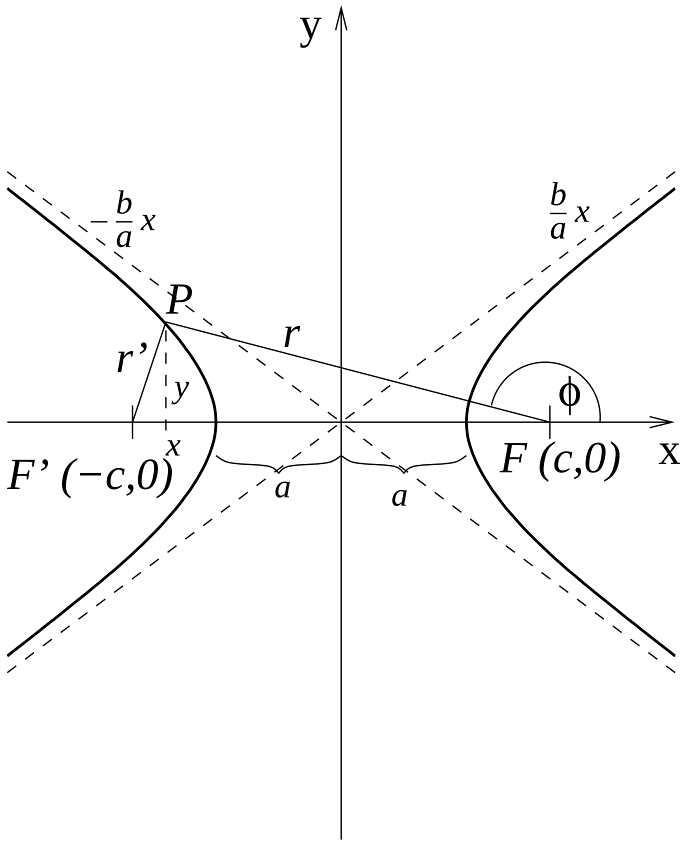

Abb. 4.9: Hyperbel.

Der Kosinussatz im Dreieck $\Delta(F^{'}PF)$ führt auf

$$r^{'2} = r^2 + 4c^2 - 4rc\cos(\pi - \phi) = r^2 + 4c^2 + 4rc\cos\phi$$

oder

$$r' = \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4rc\cos\phi}$$

Eingesetzt in Gleichung (4.4.7) ergibt

$$r - 2a = \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4rc\cos\phi}$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung erhalten wir

$$r^2 - 4ar + 4a^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc\cos\phi$$

oder

$$r(a + c\cos\phi) = a^2 - c^2 \tag{4.4.9}$$

Wir führen wieder die Exzentrizität mit $c = \epsilon a$ ein, jetzt aber mit $\epsilon > 1$ weil $c > a$ (siehe Abb. 4.9). Dann erhalten wir aus Gleichung (4.4.9)

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\phi} = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1 + \epsilon\cos\phi} \tag{4.4.10}$$

Mit $p = a(1 - \epsilon^2) < 0$ ist diese Gleichung identisch mit Gleichung (4.3.11).
Verwenden wir die kartesischen Koordinaten x, y des Punktes P so gilt:

$$r^2 = y^2 + (c-x)^2, \quad r'^2 = y^2 + (c+x)^2$$

Eingesetzt in Gleichung (4.4.7) ergibt

$$2a = \sqrt{y^2 + (c-x)^2} - \sqrt{y^2 + (c+x)^2}$$

Quadrieren dieser Gleichung führt auf

$$4a^2 = y^2 + (c-x)^2 + y^2 + (c+x)^2 - 2\sqrt{(y^2 + (c-x)^2)(y^2 + (c+x)^2)}$$

oder mit $c^2 = b^2 + a^2$

$$y^2 + x^2 + c^2 - 2a^2 = y^2 + x^2 + b^2 - a^2 = \sqrt{(y^2 + (c-x)^2)(y^2 + (c+x)^2)}$$

Nochmaliges Quadrieren und Ordnen ergibt

$$x^2(2c^2 + 2b^2 - 2a^2) + y^2(2b^2 - 2a^2 - 2c^2) = c^4 - (b^2 - a^2)^2$$

Mit $c^2 = a^2 + b^2$ ergibt sich

$$4b^2x^2 - 4a^2y^2 = 4a^2b^2$$

oder die Hauptachsengleichung der Hyperbel.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.4.11}$$

Gleichung (4.4.11) kann auch als

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \tag{4.4.12}$$

die für große Werte von x asymptotisch gegen die Asymptoten

$$y \simeq \pm\frac{b}{a}x \tag{4.4.13}$$

verläuft.
Mit diesem Einschub ist die allgemeine Form von Gleichung (4.3.11) als Darstellung von Kegelschnitten begründet.

4.5 Fortsetzung des Kepler-Problems

4.5.1 Klassifikation der Bewegungstypen

Als Lösung der Bewegungsgleichung erhielten wir nach Gleichung (4.3.11)

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

mit dem Bahnparameter

$$p = \frac{l^2}{\mu\alpha}$$

und der Exzentrizität

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$$

Die Form der Bahnkurve hängt über ϵ von der Gesamtenergie E des bewegten Körpers ab:
(a) für eine Parabel: $\epsilon = 1$, also $E = 0$;
(b) für eine Ellipse: $0 < \epsilon < 1$, also negatives $E < 0$ zwischen $-\mu\alpha^2/(2l^2) < E < 0$;
(c) für einen Kreis: $\epsilon = 0$, also $E = -\mu\alpha^2/(2l^2)$;
(d) für eine Hyperbel: $\epsilon > 1$, also $E > 0$.
Mit dem effektiven Potential (4.3.2) und dem Energieerhaltungssatz (4.2.8)

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \tag{4.5.1}$$

lassen sich dann die prinzipiellen Bahntypen klassifizieren.

An den Umkehrpunkte der Bewegung ($\dot{r} = 0$) gilt aufgrund (4.5.1) die Bedingung

$$E = V_{eff}. \tag{4.5.2}$$

Diese ergibt dann die Punkte mit dem größten (r_{max}) und kleinstem (r_{min}) Abstand vom Bewegungszentrum. In Abbildung 4.10 haben wir die Bedingung (4.5.2) skizziert. Auf der Gesamtenergieachse E tragen wir die Energiebedingungen für die verschiedenen Bewegungsformen auf und ermitteln die Umkehrpunkte der Bewegung aus Bedingung (4.5.2).

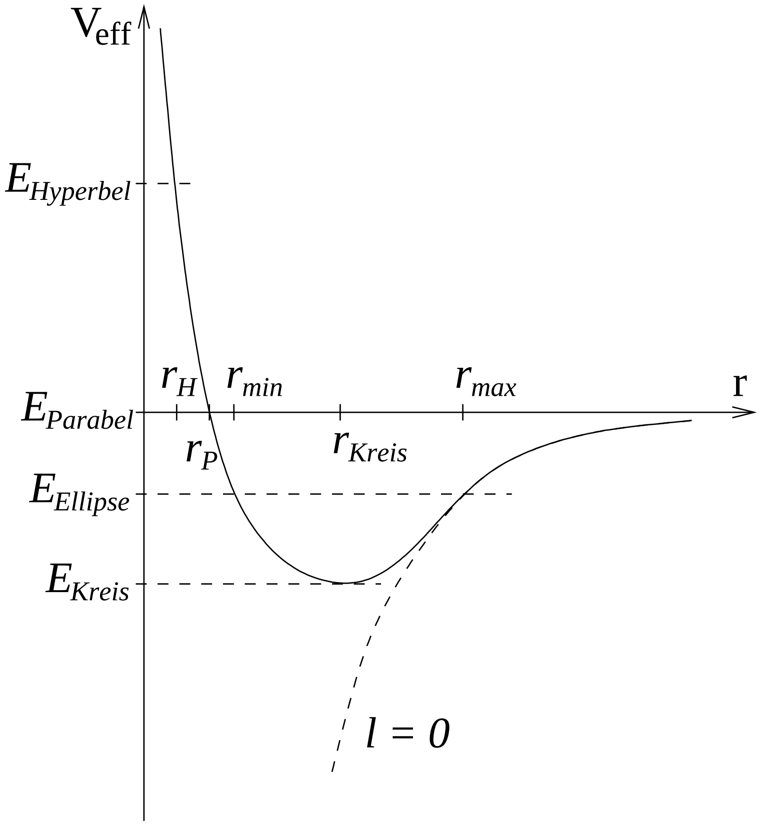

Abb. 4.10: Bewegungsformen beim Keplerproblem.

Wir erkennen:

(1) Für Parabel- und Kreis-Bewegung gibt es nur eine endliche Lösung von (4.5.2).

(2) Für Hyperbel- und Ellipsen-Bahnen gibt es je nach Wert von E unendlich viele Lösungen für $r_{min} \leq r \leq \infty$.

(3) Für Parabel und Hyperbel liegen keine gebundenen Bewegungen vor. Die kinetische Energie ist endlich (außer am inneren Umkehrpunkt r_{min}); selbst bei unendlichem Abstand $r \to \infty$ ist die kinetische Energie noch endlich. Die Körper kommen aus dem Unendlichen, werden bei r_P bzw. r_H reflektiert und verschwinden wieder im Unendlichen. (Dies hat ebenfalls Bedeutung für die Coulomb-Streuung in der Atom- und Kernphysik.)

(4) Für Ellipsen-Bahnen gibt es gebundene Bahnen, dafür muß aber die Gesamtenergie $E < 0$ negativ sein. Gemäß Gleichung (4.3.11) gilt

$$r(\phi = 0) + r(\phi = \pi) = \frac{p}{1+\epsilon} + \frac{p}{1-\epsilon} = \frac{2p}{1-\epsilon^2}$$

Aus der Abb. 4.7 entnehmen wir den Zusammenhang

$$2a = r(\phi = 0) + r(\phi = \pi)$$

Die Kombination beider Gleichungen ergibt mit (4.3.9) – (4.3.10) für den Wert der großen Halbachse der Ellipse:

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{l^2}{\mu\alpha[1-(1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2})]} = -\frac{\alpha}{2E} = -\frac{Gm_1m_2}{2E} \tag{4.5.3}$$

Der Wert der großen Halbachse a ist also nur durch die Gesamtenergie E bei gegebenen Massen m_1, m_2 bestimmt. (Dieses Ergebnis ist wichtig für die Bohr-Theorie der Atome.) Für die kleine Halbachse folgt

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - \epsilon^2 a^2} = |a|\sqrt{1-\epsilon^2} = \frac{|p|}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{l^2}{\mu\alpha\sqrt{\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}} =$$

$$\frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} = \sqrt{\frac{al^2}{\mu\alpha}} \tag{4.5.4}$$

4.5.2 Keplersche Gesetze der Planetenbewegung

Wir diskutieren jetzt die Ellipsenlösung für ein System, das aus der Sonne und aus einem Planeten besteht. Als Bezugssystem wählen wir das Schwerpunktsystem mit $\vec{R} = 0$; aufgrund von Gleichung (4.1.15) ist dies ein Inertialsystem. Gemäß Gleichungen (4.1.5) gilt wegen $m_p << M_s$ im Schwerpunktsystem ($\vec{R} = 0$) für die Ortsvektoren der Sonne und des Planeten:

$$\vec{r}_S = -\frac{m_p}{M_s + m_p}\vec{r} \simeq -\frac{m_p}{M_s}\vec{r} \simeq \vec{0} \tag{4.5.5}$$

und

$$\vec{r}_p = +\frac{M_s}{M_s + m_p}\vec{r} \simeq \vec{r}. \tag{4.5.6}$$

r ist aber auch der Abstand zu einem der beiden Brennpunkte der Ellipse. Sonne und Planet durchlaufen gegenläufige Ellipsenbahnen, wobei der gemeinsame Schwerpunkt in einem der Brennpunkte der Ellipse liegt. Mit den Näherungen (4.5.5) – (4.5.6) für $M_s >> m_p$ erhalten wir das

1. Keplersche Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse.

Das 2. Keplersche Gesetz bezeichnet den in Kap. 4.2.1 bewiesenen Flächensatz:

2. Keplersche Gesetz: Der Fahrstrahl $\vec{r}$ überstreicht in gleichen Zeiten gleichgroße Flächen, d.h.

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{l}{2\mu} = const. \tag{4.5.7}$$

3. Keplersche Gesetz: Das Quadrat der Umlaufzeit T ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse a:

$$\frac{T^2}{a^3} = const. \tag{4.5.8}$$

Zum Beweis benutzen wir, daß die Fläche der Ellipse einerseits durch $A = \pi ab$ gegeben ist und sich andererseits durch Integration des Flächensatzes (4.5.7) berechnen läßt:

$$A = \pi ab = \int_0^T dt\dot{A} = \frac{Tl}{2\mu}$$

Mit Gleichung(4.5.4) erhalten wir dann

$$T = \frac{2\pi\mu}{l}ab = \frac{2\pi\mu}{l}a^{3/2}\sqrt{\frac{l^2}{\mu\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}a^{3/2}$$

oder

$$T^2 = 4\pi^2\frac{\mu}{\alpha}a^3 \tag{4.5.9}$$

Q.E.D.
Der Proportionalitätsfaktor ist mit der reduzierten Masse (4.1.8) gegeben durch

$$4\pi^2\frac{\mu}{\alpha} = 4\pi^2\frac{\mu}{GM_s m_p} = 4\pi^2\frac{M_s m_p}{(M_s + m_p)GM_s m_p} = \frac{4\pi^2}{G(M_s + m_p)} \simeq \frac{4\pi^2}{GM_s} \tag{4.5.10}$$

ist für alle Planeten näherungsweise gleich.
Reale Planetenbahnen zeigen Abweichungen von Ellipsenbahnen aufgrund von Gravitationskräften der Planeten untereinander, kleinen relativistischen Effekten und dem Quadrupolmoment der Sonne, sodaß es zu Abweichungen vom reinen $1/r$-Potential kommt.

4.5.3 Kepler's Gleichung

Wir kennen gemäß Gleichung (4.3.11) die Bewegungsgleichung in der Form

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

Für astronomische Beobachtungen ist aber die Lösung in der Form $\phi = \phi(t)$ wichtig. Desweiteren interessiert die Abhängigkeit der Variation $\phi(t)$ von den zwei fundamentalen Konstanten der Bewegung: die Umlaufzeit T und die Exzentrizität ϵ.
Zur Ableitung benutzen wir wieder den Flächensatz (4.5.7) $\dot{A} = const.$. Für die gesamte, bei einem Umlauf überstrichene, Fläche galt

$$A = \int_0^T dt\dot{A} = \dot{A}T = \pi ab,$$

sodaß in der Zeit t die Fläche $\pi ab(t/T)$ überstrichen wird, d.h.

$$\pi ab\frac{t}{T} = \int dA$$

Benutzen wir (4.5.7) für $dA = (r^2/2)d\phi$, so folgt mit $\phi = 0$ für $t = 0$

$$\pi ab\frac{t}{T} = \frac{1}{2}\int_0^{\phi} d\phi' r^2(\phi') = \frac{p^2}{2}\int_0^{\phi} \frac{d\phi'}{(1+\epsilon\cos\phi')^2}, \qquad (4.5.11)$$

wobei wir Gleichung (4.3.11) eingesetzt haben.
Wir benutzen die Integrale

$$\int \frac{dx}{(a_1 + b_1\cos x)^2} = \frac{-1}{a_1^2 - b_1^2}\Big[\frac{b_1 \sin x}{a_1 + b_1\cos x} - a_1 \int \frac{dx}{a_1 + b_1\cos x}\Big]$$

und

$$\int \frac{dx}{a_1 + b_1\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \arctan \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}\tan\frac{x}{2}}{a_1 + b_1}$$

und erhalten mit $a_1 = 1$, $b_1 = \epsilon$ für das Integral in Gleichung (4.5.11)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+\epsilon\cos x)^2} &= -\frac{1}{1-\epsilon^2}\Big[\frac{\epsilon\sin x}{1+\epsilon\cos x} - \int\frac{dx}{1+\epsilon\cos x}\Big] \\
&= \frac{1}{1-\epsilon^2}\Big[\frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}\tan\frac{x}{2}}{1+\epsilon} - \frac{\epsilon\sin x}{1+\epsilon\cos x}\Big] \\
&= \frac{1}{1-\epsilon^2}\Big[\frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-\epsilon}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\epsilon}} - \frac{\epsilon\sin x}{1+\epsilon\cos x}\Big]
\end{aligned}$$

Damit folgt für Gleichung (4.5.11)

$$\pi ab\frac{t}{T} = \frac{p^2}{2(1-\epsilon^2)}\Big[\frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-\epsilon}\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{1+\epsilon}} - \frac{\epsilon\sin\phi}{1+\epsilon\cos\phi}\Big]$$

Mit $ab = a^2(1-\epsilon^2)^{1/2} = p^2(1-\epsilon^2)^{-3/2}$ (vgl. Gleichung (4.4.3)) folgt

$$2\pi\frac{t}{T} = 2\arctan\Big[\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{\phi}{2}\Big] - \frac{\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}\sin\phi}{1+\epsilon\cos\phi} \qquad (4.5.12)$$

Dies ist eine komplizierte Gleichung für $t = t(\phi)$, die auch noch nach $\phi = \phi(t)$ aufgelöst werden muß.
Kepler hat das Problem durch geometrische Konstruktion gelöst, obwohl er Gleichung (4.5.11) nicht kannte: die Bewegung erfolgt auf der elliptischen Bahn mit dem Kraftzentrum im Brennpunkt O, den Kepler als Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems (x, y) wählt (siehe Abb. 4.11).

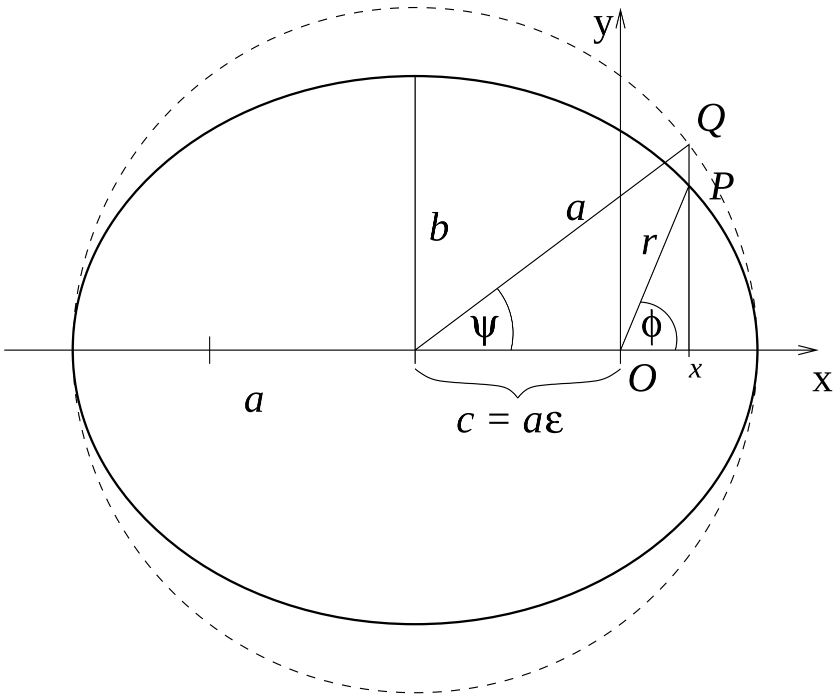

Abb. 4.11: Zur Ableitung der Kepler-Gleichung.

In diesem System lautet die Bahngleichung

$$\frac{(x+a\epsilon)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.5.13}$$

Als nächstes umschreiben wir die Ellipse durch einen Kreis mit dem Radius a, und projizieren den Punkt P (definiert durch r und ϕ) auf den Kreis im Punkt Q. Der Winkel $\angle(a,x)=\psi$ wird als *exzentrische Anomalie* bezeichnet. Es gilt

$$\cos\psi=\frac{x+a\epsilon}{a} \tag{4.5.14}$$

Mit Gleichung (4.5.13) folgt

$$\sin\psi=\sqrt{1-\cos^2\psi}=\sqrt{1-\frac{(x+a\epsilon)^2}{a^2}}=\sqrt{1-(1-\frac{y^2}{b^2})}=\frac{y}{b} \tag{4.5.15}$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$x=a(\cos\psi-\epsilon) \tag{4.5.16}$$

und

$$y=b\sin\psi=a\sqrt{1-\epsilon^2}\sin\psi, \tag{4.5.17}$$

sodaß

$$r^2=x^2+y^2=a^2[(\cos\psi-\epsilon)^2+(1-\epsilon^2)\sin^2\psi]=a^2[\cos^2\psi-2\epsilon\cos\psi+$$

$$\epsilon^2 + \sin^2\psi - \epsilon^2\sin^2\psi] = a^2[1 - 2\epsilon\cos\psi + \epsilon^2(1 - \sin^2\psi)] = a^2[1 - \epsilon\cos\psi]^2$$

oder

$$r = a(1 - \epsilon\cos\psi) \tag{4.5.18}$$

Jetzt benötigen wir noch den Zusammenhang zwischen den Winkeln ψ und ϕ. Aus

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi} = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

folgt

$$\epsilon r\cos\phi = a(1 - \epsilon^2) - r \tag{4.5.19}$$

Wir addieren auf beiden Seiten ϵr:

$$\epsilon r(1 + \cos\phi) = (1 - \epsilon)[a(1 + \epsilon) - r]$$

und setzen auf der rechten Seite Gleichung (4.5.18) ein:

$$\epsilon r(1 + \cos\phi) = (1 - \epsilon)a[1 + \epsilon - (1 - \epsilon\cos\psi)]$$

oder

$$r(1 + \cos\phi) = a(1 - \epsilon)(1 + \cos\psi) \tag{4.5.20}$$

Ebenso subtrahieren wir auf beiden Seiten von Gleichung (4.5.19) ϵr:

$$\epsilon r(\cos\phi - 1) = a(1 + \epsilon)(1 - \epsilon) - r(1 + \epsilon)$$

und setzen wieder auf der rechten Seite Gleichung (4.5.18) ein:

$$\epsilon r(\cos\phi - 1) = a(1 + \epsilon)[1 - \epsilon - (1 - \epsilon\cos\psi)],$$

sodaß

$$r(1 - \cos\phi) = a(1 + \epsilon)(1 - \cos\psi) \tag{4.5.21}$$

Dividieren wir Gleichung (4.5.21) durch Gleichung (4.5.20), erhalten wir unter Verwendung von

$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

das Ergebnis

$$\tan\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\tan\frac{\psi}{2} \tag{4.5.22}$$

Diese Beziehung liefert direkt $\phi = \phi(t)$, wenn wir die Abhängigkeit $\psi(t)$ kennen. Dazu transformieren wir Gleichung (4.5.11),

$$\pi ab\frac{t}{T} = \frac{1}{2}\int_0^{\phi} d\phi' r^2(\phi'),$$

in eine Gleichung für $\psi(t)$. Nach (4.5.22) ist

$$\frac{d}{dt}\tan\frac{\phi}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\phi}{2}}\frac{1}{2}\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\frac{d}{dt}\tan\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\frac{1}{\cos^2\frac{\psi}{2}}\frac{1}{2}\frac{d\psi}{dt}$$

oder

$$d\phi = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}}d\psi \tag{4.5.23}$$

Nach (4.5.20) ist

$$r = a(1-\epsilon)\frac{1+\cos\psi}{1+\cos\phi} = a(1-\epsilon)\frac{\cos^2\frac{\psi}{2}}{\cos^2\frac{\phi}{2}} \tag{4.5.24}$$

Damit erhalten wir

$$r^2 d\phi = r\,r\,d\phi = a(1-\epsilon\cos\psi)a(1-\epsilon)\frac{\cos^2\frac{\psi}{2}}{\cos^2\frac{\phi}{2}}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}}d\psi = a^2\sqrt{1-\epsilon^2}(1-\epsilon\cos\psi)d\psi, \tag{4.5.25}$$

wobei wir für das erste r Gleichung (4.5.18) eingesetzt haben, für das zweite r Gleichung (4.5.24) und $d\phi$ nach Gleichung (4.5.23).
Für Gleichung (4.5.11) erhalten wir damit

$$\pi ab\frac{t}{T} = \frac{a^2\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}\int_0^{\psi} d\psi'(1-\epsilon\cos\psi') = \frac{a^2\sqrt{1-\epsilon^2}}{2}(\psi-\epsilon\sin\psi)$$

Mit $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$ folgt *Kepler's Gleichung*

$$M = \psi - \epsilon\sin\psi \tag{4.5.26}$$

für die *mittlere Anomalie*

$$M \equiv \frac{2\pi t}{T}, \tag{4.5.27}$$

die die Winkelabweichung eines Körpers auf einer Kreisbahn mit der Periode T anzeigt. Die Inversion von Gleichung (4.5.26) liefert direkt $\psi(M) = \psi(t)$, das dann mittels Gleichung (4.5.22) zur gewünschten Abhängigkeit $\phi(t)$ führt.

4.5.4 Näherungslösung der Kepler-Gleichung

Um Genauigkeiten auf 10^{-6} für ein typisches $\epsilon = 0.1$ zu erzielen, ist Gleichung (4.5.12) unbrauchbar.Von den mehr als 120 bekannten Methoden zur näherungsweisen Lösung der Kepler-Gleichung, besprechen wir hier nur die einfache Methode von E. Brown (1931, Monthly Notices Royal Astronomical Society 92, 104), die gut bis $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ ist, Wir setzen

$$\psi = M + \eta \tag{4.5.28}$$

mit dem Korrekturterm η in die Kepler-Gleichung (4.5.26) ein und erhalten

$$\eta = \epsilon \sin(M + \eta) \tag{4.5.29}$$

Mit der Reihen-Entwicklung der Sinus-Funktion folgt

$$\sin\eta = \eta - \frac{\epsilon^3}{3!} + \frac{\epsilon^5}{5!} - ... = \sin(\epsilon\sin(M+\eta)) = \epsilon\sin(M+\eta) - \frac{\epsilon^3}{3!}\sin^3(M+\eta) + \frac{\epsilon^5}{5!}\sin^5(M+\eta) - ....$$

sodaß

$$\sin\eta - \epsilon\sin(M+\eta) = \sin\eta - \epsilon(\sin M\cos\eta - \sin\eta\cos M) = -\frac{\eta^3}{3!}\sin^3(M+\eta) + \frac{\eta^5}{5!}\sin^5(M+\eta) - .... \tag{4.5.30}$$

Definieren wir die neuen Größen α und β durch

$$\beta\sin\alpha \equiv \epsilon\sin M, \quad \beta\cos\alpha \equiv 1 - \epsilon\cos M,$$

sodaß

$$\alpha = \arctan\frac{\epsilon\sin M}{1 - \epsilon\cos M} \tag{4.5.31}$$

und

$$\beta^2\sin^2\alpha + \beta^2\cos^2\alpha = \beta^2 = \epsilon^2\sin^2 M + 1 - 2\epsilon\cos M + \epsilon^2\cos^2 M = 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\cos M$$

oder

$$\beta = \sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\cos M} \tag{4.5.32}$$

Damit erhalten wir auf der linken Seite von Gleichung (4.5.30)

$$\beta\sin\eta\cos\alpha - \beta\sin\alpha\cos\eta = \beta\sin(\eta - \alpha) = -\frac{\epsilon^3}{3!}\sin^3(M+\eta) + \frac{\epsilon^5}{5!}\sin^5(M+\eta) - ....$$

oder

$$\sin(\eta-\alpha) = -\frac{\epsilon^3}{6\beta}\sin^3(M+\eta) + \frac{\epsilon^5}{120\beta}\sin^5(M+\eta) - .... \tag{4.5.33}$$

Gleichung (4.5.32) zeigt, daß $\beta = \mathcal{O}(1)$, sodaß nach Gleichung (4.5.33) $\eta - \alpha \simeq \mathcal{O}(\epsilon^3)$. Vernachlässigen wir den Term proportional zu ϵ^5 in Gleichung (4.5.33) und schreiben α für η im ersten Term auf der rechten Seite dieser Gleichung, so folgt

$$\sin(\eta-\alpha) \simeq -\frac{\epsilon^3}{6\beta}\sin^3(M+\alpha) \tag{4.5.34}$$

Dieser Ausdruck ist genau bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^4)$. Für $\epsilon = 0.1$ ist der erste vernachlässigte Term von der Größe $(\epsilon^5/120) \simeq 10^{-7}$.
Aus Gleichung (4.5.34) folgt direkt

$$\eta = \alpha + \arcsin\Big[-\frac{\epsilon^3}{6\beta}\sin^3(M+\alpha)\Big]$$

und mit Gleichung (4.5.28)

$$\psi \simeq M + \alpha + \arcsin\Big[-\frac{\epsilon^3}{6\beta}\sin^3(M+\alpha)\Big], \tag{4.5.35}$$

wobei gemäß Gleichung (4.5.31)

$$\alpha = \arctan\frac{\epsilon\sin M}{1-\epsilon\cos M}$$

4.6 Hyperbelbahnen

Unter dem Einfluß eines gegenseitigen Keplerpotentials bewegen sich die beiden Massenpunkte auf Hyperbelbahnen, wenn (siehe Gleichung (4.3.11))

$$\epsilon = \sqrt{1+\frac{2l^2E}{\mu\alpha^2}} > 1$$

Die Gesamtenergie $E = V_{eff} + \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 > 0$ ist dann immer positiv (selbst bei $r \to \infty$) und dieser Fall führt auf ungebundene Bahnen.
Wir schreiben Gleichung (4.3.11) als

$$r(\phi) = \frac{p}{f(\phi)}, \quad \text{mit } f(\phi) = 1 + \epsilon\cos\phi \tag{4.6.1}$$

$f(\phi)$ kann das Vorzeichen wechseln. Weil $r(\phi) > 0\ \forall\phi$, müssen wir verschiedenen Fälle unterscheiden, je nach Vorzeichen des Parameters

$$p = \frac{l^2}{\alpha\mu}, \tag{4.6.2}$$

wobei (zur Erinnerung) μ die reduzierte Masse ist und α der Proportionalitätsfaktor im Keplerpotential

$$V(r) = -\alpha/r \tag{4.6.3}$$

4.6.1 Attraktives Potential ($\alpha > 0$)

Der Proportionalitätsfaktor α ist positiv für das Gravitationspotential oder für das elektrostatische Potential mit entgegengesetzten Ladungen. In diesem Fall ist der Parameter $p > 0$.

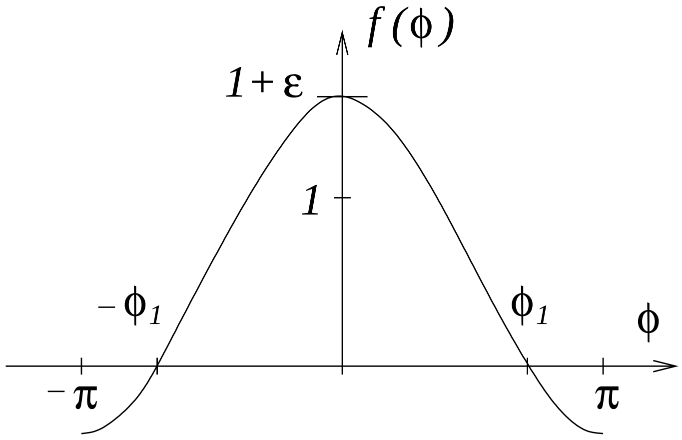

Abb. 4.12: Variation der Funktion $f(\phi)$ im Fall $p > 0$.

Aus der Forderung $f(\phi) = 1 + \epsilon \cos\phi \geq 0$ ergibt sich die in Abb. 4.12 skizzierte Einschränkung der erlaubten Werte von ϕ zu

$$-\pi \leq -\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 < \pi \tag{4.6.4}$$

mit dem Grenzwinkel $\phi_1 = \arccos(1/\epsilon)$. Für den Winkel $\phi = 0$ wird der Abstand der Bahn vom Kraftzentrum minimal, $r_{min} = p/(1+\epsilon)$; für $\phi \to \pm\phi_1$ folgt $r \to \infty$. Die resultierende Bahnkurve ist in Abb. 4.13 skizziert.

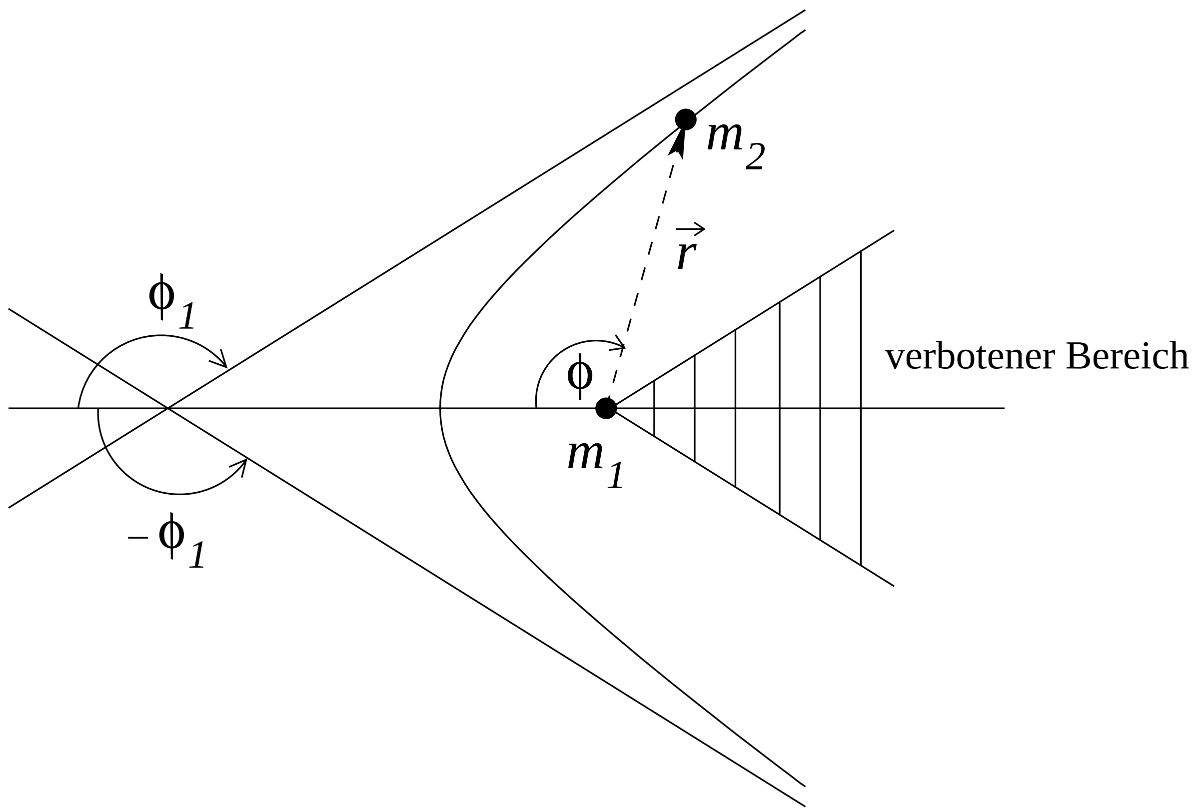

Abb. 4.13: Hyperbelbahn bei attraktivem Potential.

4.6.2 Repulsives Potential ($\alpha < 0$)

Die Massenpunkte stoßen sich ab, wie etwa bei gleich geladenen Ladungsträgern. Dann ist $p < 0$, und es muß

$$f(\phi) = 1 + \epsilon \cos \phi < 0$$

sein. Die erlaubten Werte von ϕ sind dann

$$-\pi \leq \phi < -\phi_1, \quad \text{und } \phi_1 < \phi \leq \pi \tag{4.6.5}$$

Die in Abb. 4.14 skizzierten Bahnkurven sind Hyperbeln, die nicht das Kraftzentrum einschließen, sondern vor diesem zurückweichen.

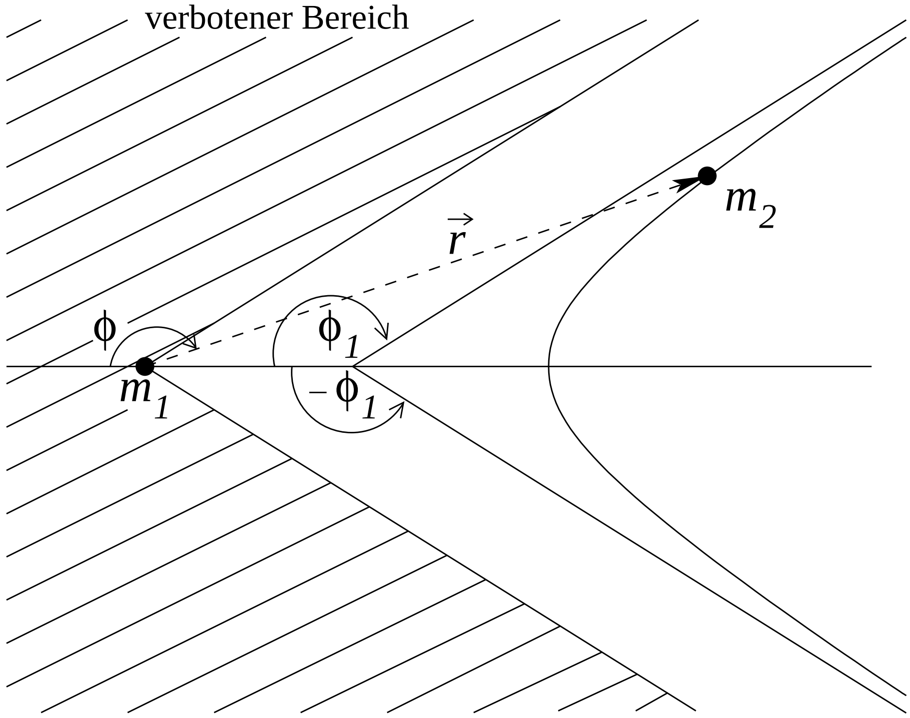

Abb. 4.14: Hyperbelbahn bei repulsivem Potential.

4.7. Der Runge-Lenz-Vektor

Beim attraktiven Kepler-Potential mit $\epsilon < 1$ sind die Bahnkurven Ellipsen, insbesondere geschlossenen Bahnen. Es folgt weiterhin, daß sowohl der Ort, an dem die Masse m_2 der Masse m_1 am nächsten kommt (*Perihel*), als auch der Ort, an dem die Masse m_2 am weitesten von der Masse m_1 entfernt ist (*Aphel*), nicht wandern, sondern zeitlich fest liegen (siehe Abb. 4.15).

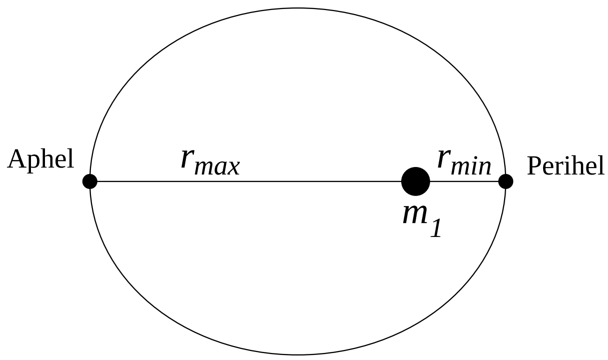

Abb. 4.15: Perihel und Aphel.

Diese Konstanz des Perihels bzw. Aphel ist mit einer Erhaltungsgröße, dem sog. *Runge-Lenz-Vektor*, verbunden.

Der Runge-Lenz-Vektor ist definiert durch

$$\vec{B} = \dot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}, \tag{4.7.1}$$

wobei $\vec{l} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ der Drehimpuls der Relativbewegung ist.
Die totale zeitliche Ableitung dieses Vektors ist

$$\dot{\vec{B}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{l}} - \alpha \frac{r\dot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \alpha \vec{r} \frac{\dot{r}}{r^2}$$

weil nach (4.2.1) $\dot{\vec{l}} = 0$. Mit $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ und $r\dot{r} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$ folgt dann

$$\dot{\vec{B}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{r^2 \dot{\vec{r}}}{r^3} + \alpha \vec{r} \frac{r\dot{r}}{r^3} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} + \frac{\alpha}{r^3} [\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})] \tag{4.7.2}$$

Mit dem dreifachen Kreuzprodukt (1.3.12)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

folgt für $\vec{a} = \vec{b} = \vec{r}$ und $\vec{c} = \dot{\vec{r}}$ die Identität

$$\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}),$$

sodaß

$$\dot{\vec{B}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} + \frac{\alpha}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] = \ddot{\vec{r}} \times \vec{l} + \frac{\alpha}{\mu r^3} \vec{r} \times \vec{l} = (\ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha}{\mu} \frac{\vec{r}}{r^3}) \times \vec{l} \tag{4.7.3}$$

Nach Gleichung (4.1.14) gilt für die Relativbewegung mit $V(r) = -\alpha/r$

$$\mu \ddot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \mu \ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha \vec{r}}{r^3} = 0, \tag{4.7.4}$$

sodaß die Klammer in Gleichung (4.7.3) verschwindet. Wir erhalten also

$$\dot{\vec{B}} = \frac{d}{dt} [\dot{\vec{r}} \times \vec{l} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}] = 0, \tag{4.7.5}$$

d.h. der Runge-Lenz-Vektor $\vec{B}$ ist bei der Keplerbewegung eine Erhaltungsgröße.
Man überlegt sich leicht, daß der Runge-Lenz-Vektor $\vec{B}$ immer in Richtung des Perihels zeigt: dazu betrachten wir den Ortsvektor $\vec{r}$ des Perihels (nahster Punkt). Dann liegt $\dot{\vec{r}} \perp \vec{r}$ in der Ebene der Bahnbewegung und $\vec{l}$ steht senkrecht auf dieser Ebene (siehe Abb. 4.16). Somit zeigen $\dot{\vec{r}} \times \vec{l}$ und natürlich auch $\vec{r}/r$ in Richtung des Perihels. Weil $\vec{B}$ Erhaltungsgröße ist, ändert sich der Ort des Perihels nicht.

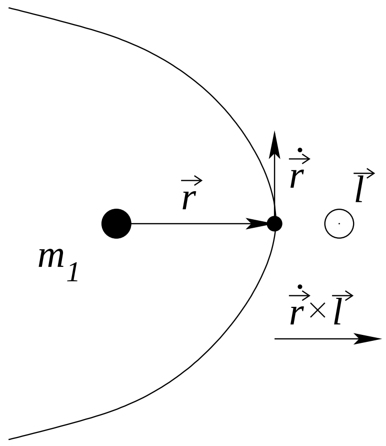

Abb. 4.16: Zur Richtung des Runge-Lenz-Vektors.

Bilden wir das Skalarprodukt $\vec{B}\cdot\vec{r} = Br\cos\phi$ mit $\phi = \angle(\vec{B},\vec{r})$, dann folgt mit Gleichung (4.7.1) und der Spatprodukt-Regel (1.4.2)

$$\vec{B}\cdot\vec{r} = Br\cos\phi = \vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{l} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}) = -\alpha r + \ \vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{l}) = -\alpha r + \ \vec{l}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \frac{l^2}{\mu} - \alpha r$$

oder

$$r = \frac{\frac{l^2}{\mu}}{\alpha + B\cos\phi} = \frac{\frac{l^2}{\mu\alpha}}{1+\frac{B}{\alpha}\cos\phi} = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi} \tag{4.7.6}$$

wieder die Bahngleichung (4.3.11) unter Zuhilfenahme von Erhaltungsgrößen.

4.8. Das Streuproblem

Das Zweikörperproblem läßt sich auch auf Streuexperimente der Kernphysik bei Coulombwechselwirkung anwenden. Wir machen dabei die vereinfachende Annahme, daß die Masse des Targetteilchens m_1 sehr viel größer als die Masse des gestreuten Teilchens m_2 ist. Die reduzierte Masse ist dann durch $\mu \simeq m_2$ gegeben. In Abb. 4.17 skizzieren wir den Streuprozeß im Schwerpunktsystem, in dessen Ursprung das Target ruht.

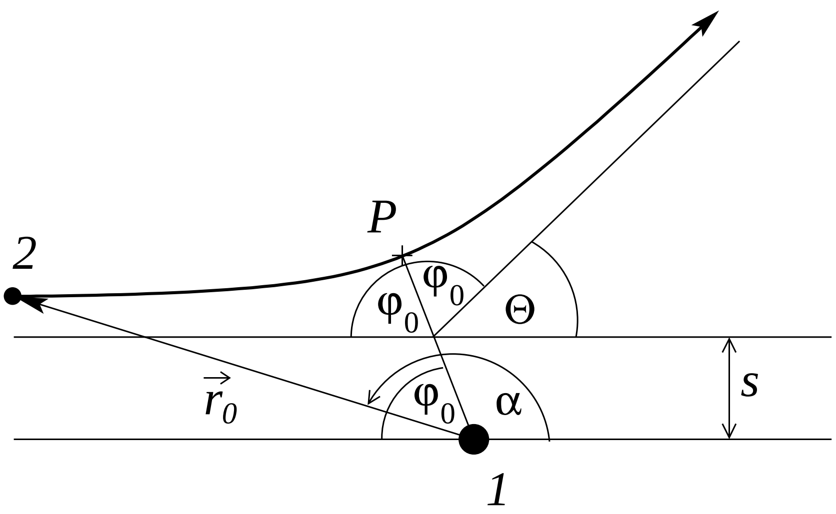

Abb. 4.17: Streuproblem.

Das Teilchen 2 kommt mit der Geschwindigkeit $\vec{v_0}$ aus dem Unendlichen und würde ohne Wechselwirkung mit dem Teilchen 1 im Abstand s (sog. *Stoßparameter*) vorbeifliegen. Aus dem Drehimpuls der Relativbewebung $\vec{l} = \mu\vec{r}_0 \times \vec{v_0}$ berechnen wir dessen Betrag zu

$$l = |\mu\vec{r}_0 \times \vec{v_0}| = m_2 r_0 v_0 \sin\alpha = m_2 v_0 s, \tag{4.8.1}$$

wobei $\alpha = \angle(\vec{r}_0, \vec{v_0})$. Ebenso ist die Gesamtenergie der Relativbewegung bekannt:

$$E = \frac{m_2}{2} v_0^2, \tag{4.8.2}$$

wenn wir das Potential so normieren, daß es im Unendlichen verschwindet ($V(\pm\infty) = 0$). Aus der Kenntnis der Erhaltungsgrößen l und E bestimmen wir nach (4.3.9) – (4.3.10) die Bahnparameter

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2l^2E/\mu\alpha^2}, \quad p = l^2/\mu\alpha \tag{4.8.3}$$

Gemäß unserer Diskussion in Kap. 4.6 folgt aus der asymptotischen Bedingung für $r \to \infty$, daß der Grenzwinkel durch $\cos\phi_G = -1/\epsilon$ gegeben ist. Damit gilt für den Streuwinkel $\Theta = \pi - 2\phi_G$.

Bei elastischer Streuung ist der Betrag des Impulses nach der Streuung gleich dem Betrag des Impulses vor der Streuung $|\vec{p}_E| = |\vec{p}_A|$, weil

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_E - \vec{p}_A = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla}V(r(\vec{t}))dt = 0$$

Betrachten wir nun einen Strahl von Teilchen (siehe Abb. 4.18).

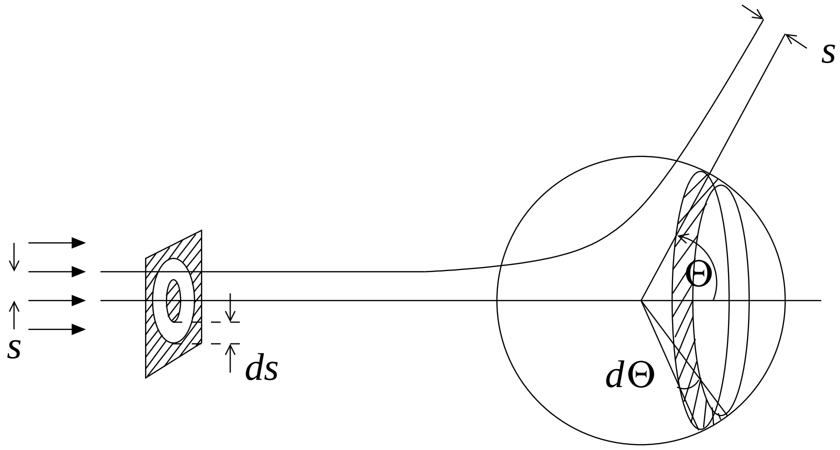

Abb. 4.18: Zum differentiellen Wirkungsquerschnitt.

Durch den linken Ring mit dem Radius s und der Dicke ds fliegen genauso viele Teilchen ($\dot{N}_{ein}$) wie nach der Streuung durch den Raumwinkel $d\Omega$ austreten ($\dot{N}_{aus}$). $d\Omega$ entspricht dem schraffierten Teil der Einheitskugel um m_1 mit Winkeln zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$, d.h.

$$\dot{N}_{ein} 2\pi s ds = \dot{N}_{aus} d\Omega = \dot{N}_{aus} 2\pi \sin\Theta d\Theta \tag{4.8.4}$$

Als *differentiellen Wirkungsquerschnitt* $d\sigma$ bezeichnen wir das Verhältnis der Anzahl der in den Raumwinkel $d\Omega$ pro Zeiteinheit gestreuten Teilchen durch die Anzahl der einlaufenden Teilchen pro Zeiteinheit und Eintrittsfläche:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dot{N}_{aus}}{\dot{N}_{ein}} \tag{4.8.5}$$

Mit Gleichung (4.8.4) folgt

$$d\sigma = \frac{\dot{N}_{aus} d\Omega}{\dot{N}_{ein}} = 2\pi s ds \tag{4.8.6}$$

Mit $d\Omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta$ erhalten wir

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi s ds}{2\pi \sin\Theta d\Theta} d\Omega = \frac{s}{\sin\Theta} \left|\frac{ds}{d\Theta}\right| d\Omega \tag{4.8.7}$$

Aus Gleichungen (4.8.1) – (4.8.3) folgt

$$l^2 = m_2^2 v_0^2 s^2 = 2 m_2 E s^2$$

und

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{4E^2 s^2}{\alpha^2}},$$

sodaß

$$C_G = \cos\phi_G = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4E^2s^2}{\alpha^2}}}$$

oder

$$s = -\frac{\alpha}{2E}\sqrt{\frac{1}{C_G^2}-1} \tag{4.8.8}$$

Es folgt

$$\frac{ds}{dC_G} = \frac{\alpha^2}{4E^2sC_G^3}$$

Benutzen wir $\Theta = \pi - 2\phi_G$, sodaß

$$C_G = \cos\phi_G = \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta}{2}) = \sin\frac{\Theta}{2},$$

dann folgt

$$\frac{ds}{dC_G} = \frac{\alpha^2}{4E^2s\sin^3\frac{\Theta}{2}}$$

und

$$\frac{ds}{d\Theta} = \frac{ds}{d\sin\frac{\Theta}{2}}\frac{d\sin\frac{\Theta}{2}}{d\Theta} = \frac{1}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\frac{ds}{dC_G} = \frac{\alpha^2\cos\frac{\Theta}{2}}{8E^2s\sin^3\frac{\Theta}{2}}$$

und wir erhalten für Gleichung (4.8.7)

$$d\sigma = \frac{\alpha^2\cos\frac{\Theta}{2}}{8E^2\sin\Theta\sin^3\frac{\Theta}{2}}d\Omega$$

oder mit $\sin\Theta = 2\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2}\sin^{-4}\frac{\Theta}{2} \tag{4.8.9}$$

Für Streuung von Teilchen der Ladung q_2 an Kernen der Ladung q_1 ist $\alpha^2 = (q_1q_2)^2$, und unser Ergebnis (4.8.9) stellt die *Rutherford'sche Streuformel* dar.