3. Analytische Mechanik

3.1 Eingeschränkte Bewegung bei Zwangsbedingungen

Im vorherigen Kapitel wurde die Bewegung eines freien Massenkörpers unter dem Einfluß äußerer Kräfte untersucht. Sind dessen Bewegungsmöglichkeiten hingegen durch gewisse Nebenbedingungen auf eine bestimmte Fläche oder Linie beschränkt, so spricht man von "eingeschränkter" Bewegung. Es muß dann eine "Zwangskraft" auf den Körper vorliegen, die ihn auf der vorgeschriebenen Bahn hält.

3.1.1 Beispiel 1: Schiefe Ebene

Als erstes Beispiel der eingeschränkten Bewegung betrachten wir die in Abbildung 3.1 skizzierte schiefe Ebene.

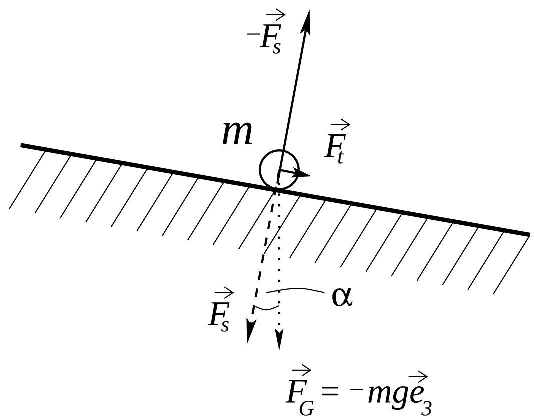

Abb. 3.1: Beispiel: Eingeschränkte Bewegung auf der schiefen Ebene.

Die in z-Richtung einwirkende Schwerkraft $m\vec{g} = -mg\vec{e}_3$ zerlegen wir in die Tangential- und Senkrechtkomponenten $\vec{F}_t$ und $\vec{F}_s$. Gleichzeitig muß die schiefe Ebene auf den Massenpunkt eine Kraft $-\vec{F}_s$ ausüben, damit sich der Massenpunkt entlang der schiefen Ebene bewegt.

Bei eingeschränkten Bewegungen unterscheiden wir zwischen:

(1) **Äußeren Kräften** $\vec{K}$, die durch Wechselwirkungskräfte (z.B. Gravitation, Federkräfte) bewirkt werden, und

(2) **Zwangskräften** $\vec{Z}$, die für die Zwangsbedingungen verantwortlich sind. Hier stellt sich oft die Schwierigkeit, daß wir die Zwangsbedingungen kennen (siehe schiefe Ebene) und mathematisch formulieren können, aber nicht die Zwangskräfte.

Hier behandeln wir zunächst Methoden (a) zum Aufstellen der Bewegungsgleichung bei eingeschränkter Bewegung und (b) zur Berechnung der Zwangskräfte aus vorgegebenen Zwangsbedingungen. Dieses Vorgehen führt zu den **Lagrange-Gleichungen 1. Art**.

Ist man an den Zwangskräften nicht interessiert, so elimiert man sie durch Einführung

geeigneter neuer Koordinaten. Dies führt auf die **Lagrange-Gleichungen 2. Art** (siehe z.B. Kap. 3.2 für das ebene Pendel).
Bei einfachen Problemen (wie der schiefen Ebene) kann man die eingeschränkte Bewegung auch durch direkte Anwendung der Newtonschen Axiome lösen. Gemäß Abbildung 3.1 gilt $x = s\cos\alpha$ und $z = s\sin\alpha$, wobei s die Koordinate entlang der schiefen Ebene bezeichnet. Aus der dynamischen Grundgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_t \tag{3.1.1}$$

und $F_t = -mg\sin\alpha$ folgen dann

$$\ddot{x} = \ddot{s}\cos\alpha = -g\sin\alpha\cos\alpha, \quad \ddot{z} = \ddot{s}\sin\alpha = -g\sin^2\alpha \tag{3.1.2}$$

und durch zweimalige Integration die Lösungen

$$x(t) = x_o + \dot{x}_0 t - \frac{g}{2}t^2\sin\alpha\cos\alpha, \quad z(t) = z_o + \dot{z}_0 t - \frac{g}{2}t^2\sin^2\alpha \tag{3.1.3}$$

Bei komplizierteren eingeschränkten Bewegungen (z.B. Achterbahn) ist die direkte Lösung nicht möglich.

3.2 Beispiel 2: Das Pendel im Schwerefeld

Wir betrachten jetzt die Bewegung des Pendels im Schwerefeld: auf eine Masse m wirke die Schwerkraft $\vec{K}$ und eine durch einen Faden der Länge l ausgeübte unbekannte Zwangskraft $\vec{Z}$ (siehe Abbildung 3.2).

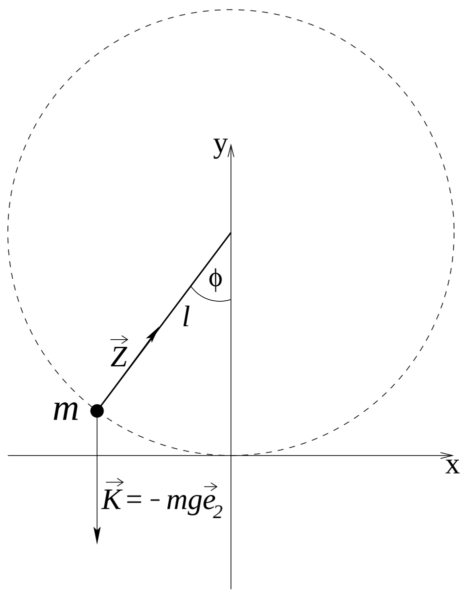

Abb. 3.2: Pendel im Schwerefeld.

Der Massenpunkt wird durch den Faden der Länge l auf einer Kreisbahn gehalten, d.h. die Zwangsbedingungen für die Bahn $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ lauten:

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = l^2 \tag{3.2.1}$$

In der Bewegungsgleichung unterscheiden wir zwischen äußeren Kräften und Zwangskräften und setzen an

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z} \tag{3.2.2}$$

Auf die Masse m wirkt die Schwerkraft $\vec{K}$ und eine durch den Faden ausgeübte unbekannte Zwangskraft $\vec{Z}$. Die Zwangskraft $\vec{Z}$ in dieser Gleichung ist zunächst unbekannt, obwohl wir die Zwangsbedingungen (3.2.1) kennen.
Die Zwangsbedingungen (3.2.1) können elegant eliminiert werden, wenn man den Winkel ϕ im Bezug zur Ruhelage $\phi = 0$ (siehe Abbildung 3.2) als neue Koordinate benutzt. Die Bogenlänge des Pendels ist dann durch $s = l\phi$ gegeben. Die durch die Gravitation in Richtung des Bogens wirkende Rückstellkraftkomponente $F_R = -mg \sin\phi$ ist konservativ, da sie als Ableitung des Potential $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$ darstellbar ist:

$$F_R = -\frac{dV}{ds} = -\frac{1}{l}\frac{dV}{d\phi} = -mg \sin\phi \tag{3.2.3}$$

(Die Konstante mgl im Potential wird aus mathematischer Bequemlichkeit dazu addiert, siehe unten Gl. (3.2.9).)
Die kinetische Energie des Pendels ist durch $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ gegeben. Mit (Abb. 3.2)

$$x = l \sin\phi, \quad y = l \cos\phi \tag{3.2.4}$$

ergibt sich

$$\dot{x} = l(\cos\phi)\dot{\phi}, \quad \dot{y} = -l(\sin\phi)\dot{\phi},$$

sodaß

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 = \frac{m}{2}\dot{s}^2$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$E = T + V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos\phi) = const. \tag{3.2.5}$$

gemäß Gleichung (2.3.14) konstant. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $(1/ml^2)$, so ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos\phi) = \frac{E}{ml^2}. \tag{3.2.6}$$

Wir führen jetzt die dimensionslose Zeit

$$\tau \equiv t/\sqrt{l/g} \tag{3.2.7}$$

ein. Damit reduziert sich die Bewegungsgleichung (3.2.6) auf die Form

$$\frac{1}{2}(\frac{d\phi}{d\tau})^2 + \ (1-\cos\phi) = \frac{1}{2}(\frac{d\phi}{d\tau})^2 + \ 2\sin^2\frac{\phi}{2} = E_G, \tag{3.2.8}$$

mit $E_G = E/(mgl)$, wobei wir die trigonometrische Beziehung

$$1-\cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2} \tag{3.2.9}$$

ausgenutzt haben. Aus Gleichung (3.2.8) folgt

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \sqrt{2E_G}\sqrt{1-\frac{2}{E_G}\sin^2\frac{\phi}{2}} \tag{3.2.10}$$

Gemäß den allgemeinen Überlegungen von Kap. 2.4.3 zur Existenz von Umkehrpunkten ($\frac{d\phi}{d\tau}_U = 0$) der Bewegung in konservativen Kraftfeldern muß für Schwingungsbewegungen der Wert von $E_G < 2$ sein.
Substituieren wir $\phi = 2\arcsin Y$ in Gleichung (3.2.10), so folgt mit

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{2}{\sqrt{1-Y^2}}\frac{dY}{d\tau}$$

für die Bewegungsgleichung

$$\frac{dY}{d\tau} = [(1-Y^2)(\frac{E_G}{2}-Y^2)]^{1/2} \tag{3.2.11}$$

Offensichtlich müssen wir drei Fälle untersuchen: (a) $E_G < 2$, (b) $E_G = 2$ und (c) $E_G > 2$, die wir getrennt betrachten. Dabei tauchen vollständige elliptische Integrale auf, sodaß wir mit einem kurzen mathematischen Einschub beginnen.

3.2.1 Mathematischer Einschub: Elliptische Integrale und Elliptische Funktionen

Wir können die trigonometrische Funktion $y = \sin\Theta$ über das Integral

$$\int_0^y \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)}} = \Theta \tag{3.2.12}$$

definieren, denn das Integral auf der linken Seite (LHS) dieser Gleichung ist

$$LHS = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)}} = \arcsin(y),$$

sodaß die Umkehrung dieser Gleichung gerade $y = \sin\Theta$ ergibt. Bekanntlich hat die Sinus-Funktion die Periode $\eta = 2\pi$, d.h. $\sin(\Theta + \eta) = \sin\Theta$. Wir können die Periode η auch ebenso durch die Gleichung

$$\frac{\eta}{4} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)}} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \tag{3.2.13}$$

festlegen.
Nun verallgemeinern wir die Gleichung (3.2.12). Sei

$$\int_0^z \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} = u \tag{3.2.14}$$

Im Fall $K = 0$ ergibt sich gerade wieder Gleichung (3.2.12). Für Werte von $K \neq 0$ nennen wir die durch Gleichung (3.2.14) definierte Funktion

$$z = \text{ sn u}, \tag{3.2.15}$$

deren Verhalten vom Wert von K abhängt. Ganz analog zur Sinus-Funktion definieren wir die Umkehrfunktion zu (3.2.15) mit $z = \sin\phi$

$$u = F(\phi, K) = \int_0^{\sin\phi} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} \tag{3.2.16}$$

als *unvollständiges elliptisches Integral 1.Art.* Ebenfalls analog zu Gl. (3.2.13) definieren wir die Periode ξ der sn -Funktion durch

$$\frac{\xi}{4} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} = F(\frac{\pi}{2}, K), \tag{3.2.17}$$

was man als vollständiges elliptisches Integral 1.Art bezeichnet.
Die Substitution $s = \sin\alpha$ überführt Gleichung (3.2.16) in

$$F(\phi, K) = \int_0^{\phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - K^2\sin^2\alpha}} \tag{3.2.18}$$

3.2.2 Schwingungsfall $E_G < 2$

Setzen wir in der Bewegungsgleichung (3.2.11) $E_G = 2K^2$ und substituieren wir $Y = Kz$, so erhalten wir

$$K\frac{dz}{d\tau} = \sqrt{(1-K^2z^2)(K^2-K^2z^2)}$$

oder

$$\int_0^z \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} = \tau \tag{3.2.19}$$

Gemäß unserer mathematischen Betrachtung in Kap. 3.2.1 können wir dann die Lösung (3.2.19) auch als $z =$ sn τ schreiben, d.h.

$$Y(\tau) = K \text{ sn } \tau$$

oder

$$Y(t) = \sqrt{\frac{E_G}{2}} \text{ sn } \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}}\mathrm{t} \qquad (3.2.20)$$

Mit der Entwicklung

$$\frac{1}{(1-K^2s^2)^{1/2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}K^2s^2$$

im Integranden von Gleichung (3.2.17) folgt für die Periode der Bewegung

$$\frac{\xi}{4} \simeq \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)}}(1 + \frac{1}{2}K^2s^2) = \arcsin(1) + \frac{K^2}{2}\int_0^1 \frac{ds\ s^2}{\sqrt{(1-s^2)}} = \frac{\pi}{2}(1 + \frac{K^2}{4})$$

oder

$$\xi = 2\pi(1 + \frac{K^2}{4}) \qquad (3.2.21)$$

Der Wert von $K^2 = E_G/2$ bestimmt nach Gleichung (3.2.10) den Maximalwert der Schwingung $\phi = U$, an denen die Bewegung umkehrt, d.h. $\frac{d\phi}{d\tau}_{\phi=U} = 0$:

$$\sin^2\frac{U}{2} = \frac{E_G}{2} = K^2,$$

sodaß

$$K = \sin\frac{U}{2} \qquad (3.2.22)$$

Für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage $U << 1$ folgt $K^2 \simeq U^2/4$ und die Periode (3.2.21) in der normierten Zeit τ ergibt sich zu

$$\xi = 2\pi(1 + \frac{U^2}{16})$$

Rechnen wir auf die nichtnormierte Zeit t um, so folgt für die Schwingungsperiode bei kleinen Auslenkungen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{U^2}{16}) \qquad (3.2.23)$$

Bei extrem kleinen Auslenkungen $U <<< 1$ hängt die Periode (3.2.23) nicht mehr von der Auslenkung U ab und ist durch $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ gegeben (Isochronie des mathematischen Pendels).

3.2.3 Grenzfall extrem kleiner Auslenkungen $E_G << 1$

Der Grenzfall extrem kleiner Auslenkungen $\phi \leq U << 1$ läßt sich auch direkt leicht durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen lösen. Mit der Rückstellkraft (3.2.3) erhalten wir für die dynamische Gleichung (2.2.3) in der Variablen $s = l\phi$ die nichtlineare Gleichung

$$m\ddot{s} = ml\ddot{\phi} = F_R = -mg\sin\phi \tag{3.2.24}$$

Für extrem kleine Auslenkungen $\phi \leq U << 1$ nähern wir

$$F_R = -mg\sin\phi \simeq -mg\phi \tag{3.2.25}$$

und die dynamische Gleichung (3.3.24) wird zur einfachen Schwingungsgleichung

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \tag{3.2.26}$$

mit $\omega = \sqrt{g/l}$. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $\phi(t = 0) = 0$ ist

$$\phi(t) = U\sin\omega t \tag{3.2.27}$$

mit der Schwingungsperiode $T_0 = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (3.2.23). Offensichtlich ist der Zusatzterm $U^2/16$ in Gleichung (3.2.23) die niedrigste Korrektur zur Schwingungsdauer bei Berücksichtigung der Nichtlinearität der Bewegungsgleichung (3.2.24).

Übungsaufgaben:

A3.2.1) Zeigen Sie durch Entwicklung des Integranden bis zur 4. Ordnung in $K = \sin\frac{U}{2}$, daß für die Periode des Pendels im Schwerefeld gilt

$$\xi = 4\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-K^2s^2)}} \simeq 2\pi[1 + \frac{K^2}{4} + \frac{9K^4}{64}].$$

A3.2.2) Berechnen Sie die Periode näherungsweise bis zur 4. Ordnung im maximalen Auslenkungswinkel U zu

$$\xi \simeq 2\pi[1 + \frac{U^2}{16} + \frac{11}{3072}U^4].$$

Wie groß sind die Korrekturterme für $U = 10°, 20°$ und $45°$?

3.2.4 Fall $E_G = 2$

Im Fall $E_G = 2$ reduziert sich die allgemeine Bewegungsgleichung (3.2.11) auf

$$\frac{dY}{d\tau} = (1 - Y^2)$$

oder mit der Anfangsbedingung $Y(t = 0) = 0$ auf

$$\tau = \int_0^Y \frac{ds}{1-s^2} = \mathrm{artanhY}$$

sodaß

$$Y(\tau) = \tanh\tau \tag{3.2.28}$$

Für die zeitliche Variation des Winkels finden wir dann

$$\phi(\tau) = 2\arcsin Y(\tau) = 2\arcsin(\tanh\tau) \tag{3.2.29}$$

Die Grenzlage $\phi = \pi$ wird erst für $t \propto \tau \to \infty$ erreicht (siehe Abb. 3.3).

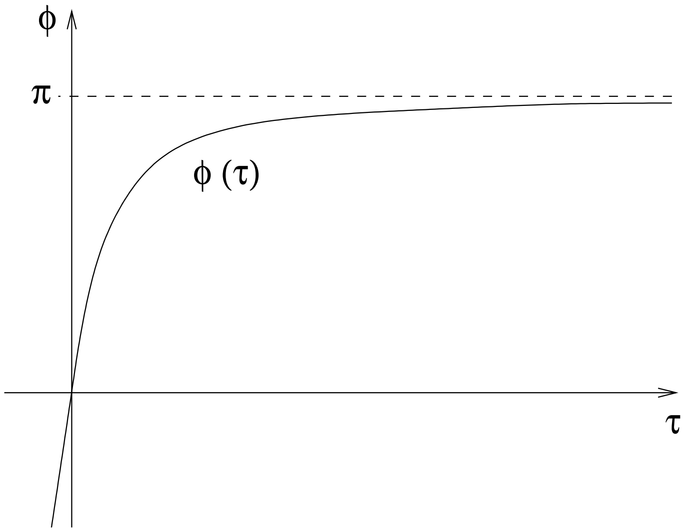

Abb. 3.3: Pendelbewegung im Grenzfall $E_G = 2$.

3.2.5 Rotationsfall $E_G > 2$

In diesem Fall ist nach Gleichung (3.2.8) die Gesamtenergie E_G immer größer als die potentielle Energie $1 - \cos\phi$, selbst an der Spitze der Bewegung $\phi = \pi$, d.h. der Term $\frac{1}{2}(d\phi/d\tau)^2$, der die kinetische Energie repräsentiert, ist immer größer Null, so daß das Pendelteilchen nie zur Ruhe kommt. Wegen der fehlenden Umkehrpunkte kann es nicht zur Schwingungsbewegung kommen: stattdessen rotiert das Teilchen ohne Ende.
In der Bewegungsgleichung (3.2.11) setzen wir jetzt $\kappa^2 = 2/E_G < 1$ und erhalten

$$\frac{dY}{d\tau} = \sqrt{(\frac{1}{\kappa^2} - Y^2)(1 - Y^2)}$$

oder

$$\kappa\frac{dY}{d\tau} = \sqrt{(1-\kappa^2 Y^2)(1-Y^2)}. \tag{3.2.30}$$

Die Integration über die Zeit ergibt mit der Anfangsbedingung $Y(t = 0) = 0$ dann

$$\int_0^Y \frac{ds}{\sqrt{(1-\kappa^2 s^2)(1-s^2)}} = \frac{\tau}{\kappa} \tag{3.2.31}$$

Unter Verwendung von Gleichungen (3.2.14) – (3.2.15) erhalten wir als vollständige Lösung

$$Y(\tau) = \ \mathrm{sn}\ \frac{\tau}{\kappa} = \ \mathrm{sn}\ (\sqrt{\frac{\mathrm{E_G}}{2}}\tau)$$

oder

$$Y(t) = \ \mathrm{sn}\ (\sqrt{\frac{\mathrm{E_G g}}{2\mathrm{l}}}\mathrm{t}) \tag{3.2.32}$$

Übungsaufgaben:

A3.2.3) Berechnen Sie in Anlehnung an die Vorlesung die Rotationsperiode des Pendels im Fall $E_G > 2$. Zeigen Sie, daß mit wachsendem Wert von E_G die Rotationsperiode kürzer wird.

3.3 Beschreibung von Flächen und Kurven im dreidimensionalen Raum

Bei eingeschränkten Bewegungen kann sich der Massenpunkt meist nur auf einer Fläche oder Kurve im dreidimensionalen Raum bewegen. So wird zum Beispiel die schiefe Ebene (siehe Kap. 3.1.1) durch die Geradengleichung

$$z = x \tan\alpha, \quad \text{oder } z - x\tan\alpha = 0 \tag{3.3.1}$$

mit $\alpha = const.$ beschrieben.
Wir fassen Gleichung (3.3.1) als Funktion der drei Ortskoordinaten x, y und z auf:

$$G(x,y,z) = z - x\tan\alpha = 0 \tag{3.3.2}$$

Flächen lassen sich ebenfalls durch Funktionen $G(x, y, z) = 0$ darstellen. Falls sich die Fläche (z.B. Schaukel) bewegt, kommt zusätzlich noch die Abhängigkeit von der Zeit t hinzu:

$$G(x,y,z,t) = 0 \tag{3.3.3}$$

Zwangsbedingungen von der Art (3.3.2) – (3.3.3) heißen *holonome* Zwangsbedingungen; zeitunabhängige wie in Gleichung (3.3.2) nennt man zusätzlich noch *skleronom*, zeitabhängige wie in Gleichung (3.3.3) *rheonom*. Als Beispiel für eine rheonome, holonome Zwangsbedingung dient die schaukelnde schiefe Ebene (3.3.1) mit zeitabhängigem Winkel $\alpha(t)$.
Alle Zwangsbedingungen, die sich nicht durch eine Gleichung der Art (3.3.3) darstellen lassen, heißen *nicht-holonom*; alle Ungleichungen fallen darunter (z.B. Lostrommel beim Lotto, bei der sich die 49 Kugeln nur innerhalb der Trommel bewegen können).

3.4 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Wenn die Bewegung eines Teilchens durch eine holonome Zwangsbedingung

$$G(\vec{r}, t) = 0 \tag{3.4.1}$$

auf eine Fläche beschränkt wird, so bedeutet diese keine Einschränkung oder Beeinflussung für die Bewegung innerhalb der Fläche. Die Zwangskraft $\vec{Z}$ hat daher keine Komponente in Richtung der Fläche; sie muß vielmehr orthogonal zur Fläche stehen. Wäre es nicht so, könnte die Zwangskraft den Massenpunkt in Bewegung setzen, selbst wenn keine äußeren Kräfte $\vec{K} = 0$ vorliegen.
Aufgrund des in Gleichung (1.9.1.5) bewiesenen Satzes, daß der Gradient einer Äquipotentialfläche senkrecht zu dieser steht, gestattet Gleichung (3.4.1) den Ansatz

$$\vec{Z} \parallel \mathrm{grad}\ \mathrm{G}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \vec{\nabla}\mathrm{G}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t})$$

oder

$$\vec{Z} = \lambda(t)\vec{\nabla}G(\vec{r}, t), \tag{3.4.2}$$

wobei die *Lagrange-Parameter* $\lambda(t)$ zunächst unbekannte Funktionen der Zeit t sind.
Für die Bewegungsgleichung (3.2.2) erhält man dann

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \lambda(t)\vec{\nabla}G(\vec{r}, t), \quad G(\vec{r}, t) = 0 \tag{3.4.3}$$

die *Lagrange-Gleichung 1.Art* für ein Einteilchensystem mit einer Zwangsbedingung. Die Beziehungen (3.4.3) bilden vier Differentialgleichungen für die vier Unbekannten x, y, z und λ, und die Aufgabe besteht darin, zuerst λ zu bestimmen und damit die Bewegungsgleichungen für die Ortskoordinaten $x(t), y(t)$ und $z(t)$ zu integrieren. Dieses illustrieren wir am Beispiel der schiefen Ebene.

3.4.1 Wieder Beispiel 1: Schiefe Ebene mit Lagrange I

Rückblickend auf Abschnitt 3.1.1 notieren wir, daß die äußere Kraft durch $\vec{K} = (0, 0, -mg)$ gegeben ist.
Die Zwangsbedingung lautet nach Gleichung (3.3.2)

$$G(x, y, z) = z - x\tan\alpha = 0 \tag{3.4.4}$$

sodaß

$$\vec{\nabla}G = (-\tan\alpha, 0, 1) \tag{3.4.5}$$

Für die Bewegungsgleichung (3.4.3) bekommen wir in diesem Fall dann

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.6}$$

Mit (3.4.4) und (3.4.6) haben wir vier Gleichungen für vier Unbekannte.
Gleichung (3.4.6b) $m\ddot{y} = 0$ ist trivial und ergibt sofort

$$y(t) = b_1 t + b_2 \tag{3.4.7}$$

mit den Integrationskonstanten b_1 und b_2.
Zweimaliges Differenzieren nach der Zeit von Gleichung (3.4.4) führt auf

$$\ddot{z} = \ddot{x}\tan\alpha.$$

Setzen wir den Ausdruck in Gleichung (3.4.6c) für $\ddot{z}$ ein, so folgt

$$m(\tan\alpha)\ddot{x} = \lambda - mg$$

oder

$$m\ddot{x} = \frac{\lambda - mg}{\tan\alpha} \tag{3.4.8}$$

Gleichung (3.4.8) setzen wir gleich zu Gleichung (3.4.6a) und erhalten

$$m\ddot{x} = -\lambda\tan\alpha = \frac{\lambda - mg}{\tan\alpha}$$

oder aufgelöst nach λ:

$$\lambda = \frac{mg}{1+\tan^2\alpha} = \frac{mg\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = mg\cos^2\alpha \tag{3.4.9}$$

Damit ergibt sich mit Gleichung (3.4.5) für die Zwangskraft

$$\vec{Z} = \lambda\vec{\nabla}G = mg\cos^2\alpha \begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha \end{pmatrix} \tag{3.4.10}$$

mit dem Betrag $|\vec{Z}| = mg\sqrt{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha} = mg\cos\alpha$.
Das Einsetzen von Gleichung (3.4.9) in die Bewegungsgleichungen (3.4.6a) und (3.4.6c) ergibt dann

$$m\ddot{x} = -\lambda\tan\alpha = -mg\tan\alpha\cos^2\alpha = -mg\sin\alpha\cos\alpha \tag{3.4.11}$$

und

$$m\ddot{z} = \lambda - mg = -mg(1-\cos^2\alpha) = -mg\sin^2\alpha \tag{3.4.12}$$

die identisch zu den Gleichungen (3.1.2) sind. Als Lösung erhält man sofort zusätzlich zu Gleichung (3.4.7)

$$x(t) = a_2 + a_1 t - \frac{g}{2} t^2 \sin\alpha \cos\alpha, \quad z(t) = c_2 + c_1 t - \frac{g}{2} t^2 \sin^2\alpha \tag{3.4.13}$$

Die Integrationskonstanten $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sind so zu bestimmen, daß die Anfangsbedingungen und die Zwangsbedingung (3.4.4) erfüllt. Aus $y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0$ folgt sofort $b_1 = b_2 = 0$. Mit Gleichung (3.4.13) erhalten wir für die Zwangsbedingung (3.4.4) für alle Zeiten

$$z(t) - x(t)\tan\alpha = c_2 + c_1 t - \frac{g}{2} t^2 \sin^2\alpha - (a_2 + a_1 t)\tan\alpha + \frac{g}{2} t^2 \sin\alpha \cos\alpha \tan\alpha =$$

$$c_2 + c_1 t - (a_2 + a_1 t)\tan\alpha = 0$$

oder nach Multiplikation mit $\cos\alpha$:

$$(c_1 \cos\alpha - a_1 \sin\alpha)t + c_2 \cos\alpha - a_2 \sin\alpha = 0 \tag{3.4.14}$$

Weil Gleichung (3.4.14) für alle Zeiten t gelten muß, folgt

$$a_1 \sin\alpha = c_1 \cos\alpha, \quad a_2 \sin\alpha = c_2 \cos\alpha \tag{3.4.15}$$

Damit sind nur noch zwei der ursprünglich sechs Integrationskonstanten offen.
Wählen wir $a_1 = V_0 \cos\alpha$ und $c_1 = V_0 \sin\alpha$, was $a_2 = r_0 \cos\alpha$ und $c_2 = r_0 \sin\alpha$ mit $V_0 = \dot{r_0}$ impliziert, so erhalten wir nach (3.4.13) und (3.4.7)

$$x(t) = [-\frac{g}{2} t^2 \sin\alpha + V_0 t + r_0]\cos\alpha, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = [-\frac{g}{2} t^2 \sin\alpha + V_0 t + r_0]\sin\alpha$$

oder

$$x(t) = r(t)\cos\alpha, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = r(t)\sin\alpha \tag{3.4.16}$$

mit

$$r(t) = -\frac{g}{2} t^2 \sin\alpha + V_0 t + r_0, \tag{3.4.17}$$

womit das Problem vollständig gelöst ist.

3.4.2 Allgemeiner Fall

Treten in einem physikalischen System p Zwangsbedingungen $G_j, j = 1, ..., p$ auf, so lauten die Lagrange-Gleichungen 1. Art für die Bewegung eines Massenpunktes

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t) \vec{\nabla} G_j(\vec{r}, t) \tag{3.4.18}$$

Die Zwangskraft ergibt sich also proportional zur Summe der Gradienten der Zwangsbedingungen.
Dies kann man für 2 Zwangsbedingungen G_1 und G_2 leicht veranschaulichen: das Schnittgebilde der durch die Zwangsbedingungen vorgegebenen Ebenen G_1 und G_2 ist eine Kurve, und der Gradient jeder der beiden Zwangsbedingungen steht senkrecht auf dieser Kurve, da er senkrecht auf der jeweiligen Ebene steht. Sind die Zwangsbedingungen voneinander unabhängig, so sind $\vec{\nabla} G_1$ und $\vec{\nabla} G_2$ linear unabhängige Vektoren, und jeder auf der Schnittkurve senkrecht stehende Vektor kann als Linearkombination der beiden Gradienten geschrieben werden.
Verallgemeinert man Gleichung (3.4.18) auf ein System von n Massenpunkten m_i, $i = 1, ..., N$ und p Zwangsbedingungen G_j, $j = 1, ..., p$, so erhalten wir N Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t) \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} G_j(\vec{r}, t), \qquad i = 1, ..., N \tag{3.4.19}$$

3.4.3 Kochrezept für Lagrange-Gleichungen 1.Art

Im Sinne eines "Kochrezepts" fassen wir das Lösungsverfahren bei Lagrange-Gleichungen 1. Art zusammen:
1) Wähle geeignete Koordinaten.
2) Formuliere die äußeren Kräfte $\vec{K}$.
3) Formuliere die Zwangsbedingungen in der Form $G_j(x, y, z, t) = 0$.
4) Berechne $\vec{\nabla} G_i$.
5) Stelle die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \sum_j \lambda_j \vec{\nabla} G_j$ auf.
6) Leite die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit t ab.
7) Löse das aus (5) und (6) bestehende Gleichungssystem.

Übungsaufgaben:
A3.4.1) Hantel auf 2 zueinander senkrechten Achsen (Volz I, S. 137ff)

3.4.4 Bemerkung zu Zwangsbedingungen

Die holonome Zwangsbedingung $G(x, y, z, t) = 0$ kann auch in differentieller Form definiert werden: eine beliebige Zwangsbedingung

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz + a_4 dt = 0 \tag{3.4.20a}$$

heißt *holonom*, falls es eine Funktion $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ gibt mit

$$\frac{\partial G}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = a_2, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = a_3, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = a_4, \quad \text{und } G(x, y, z, t) = 0 \tag{3.4.20b}$$

.

Ist $a_4 = 0$, ist sie *skleronom* und für das totale Differential von G gilt

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz. \tag{3.4.21}$$

Ist $a_4 \neq 0$, ist sie *rheonom* und für das totale Differential von G gilt

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz + \frac{\partial G}{\partial t}dt. \tag{3.4.22}$$

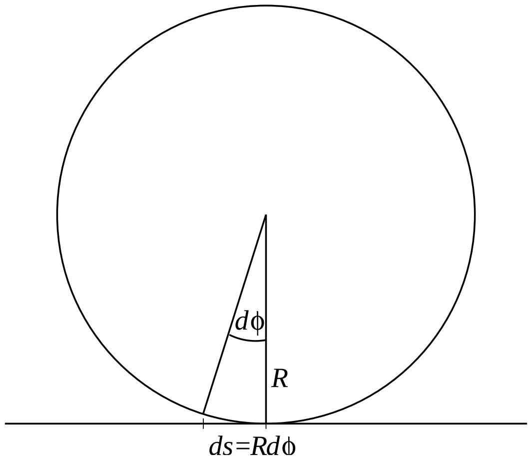

Abb. 3.4: Abrollen eines Rads auf einer festgelegten Gerade.

Ein Beispiel für eine skleronome Zwangsbedingung ist das in Abb. 3.4 dargestellte Abrollen eines Rads auf einer festgelegten Gerade:

$$ds - Rd\phi = 0, \tag{3.4.23}$$

deren Stammfunktion durch $G(s, \phi) = s - R\phi$ gegeben ist.
Alle Zwangsbedingungen, die die Definition (3.4.20) nicht erfüllen, werden als *nicht-holonome* Zwangsbedingungen bezeichnet. Dazu gehören die bereits erwähnten Ungleichungen (z.B. Teilchen innerhalb einer Kugel $|\vec{r}| \leq R$, wobei R den Kugelradius bezeichnet), oder Zwangsbedingungen in Form von nicht-integrablen Differentialformen.

3.5 Energieerhaltungssatz im Fall von holonomen Zwangsbedingungen

Betrachten wir jetzt die Energieerhaltung eines Systems mit N Massenpunkten. Schreiben wir in den Gleichungen (3.4.19) die Ortsvektoren $\vec{r}_i = (x_1, x_2, x_3)$ in Komponentendarstellung, so erhalten wir die $3N$ Gleichungen

$$m_i \ddot{x}_i = K_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, ..., 3N \tag{3.5.1}$$

mit

$$G_j(x_1, ..., x_{3N}, t) = 0, \quad j = 1, ..., p \tag{3.5.2}$$

Wir multiplizieren Gleichung (3.5.1) mit $\dot{x}_i$ und summieren über alle i. Für den ersten Term der Gleichung ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} (\ddot{x}_i)^2 = \frac{d}{dt} T$$

wobei T die gesamte kinetische Energie des Systems bezeichnet.
Wir nehmen an, daß das äußere Kraftfeld konservativ ist, d.h. als Gradient eines Potentials U dargestellt werden kann:

$$K_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{3.5.3}$$

Wir erhalten dann für den zweiten Term in Gleichung (3.5.1) nach Multiplikation mit $\dot{x}_i$ und Summation über alle i:

$$\sum_{i=1}^{3N} K_i \dot{x}_i = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i = -\frac{d}{dt} U(x_1, ..., x_{3N})$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (3.5.1)

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{3N} \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \dot{x}_i \tag{3.5.4}$$

Die Lösungen der Bewegungsgleichungen $x_i(t)$ müssen die Zwangsbedingungen (3.5.2)

$$G_j(x_1(t), ..., x_{3N}(t), t) = 0$$

erfüllen. Durch Differenzieren nach der Zeit folgt daraus

$$\frac{dG_j}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial G_j}{\partial t} = 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \dot{x}_i = -\frac{\partial G_j}{\partial t}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (3.5.4) ein, erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial t} \tag{3.5.5}$$

Wir folgern: *Sind die Kräfte konservativ und die Zwangsbedingungen zeitunabhängig (skleronom), so ist die Summe $T + U$ aus kinetischer und potentieller Energie konstant.*
Für das in Abschnitt 3.2 diskutierte ebene Pendel gilt dieser Energieerhaltungssatz.

3.6 Das Prinzip von d'Alembert

Wir beginnen wieder mit der Bewegungsgleichung (3.2.2) für einen Massenpunkt

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z},$$

und betrachten zunächst den statischen Fall $\ddot{\vec{r}} = 0$. Dann herrscht das Gleichgewicht der Kräfte

$$\vec{K} + \vec{Z} = 0. \qquad (3.6.1)$$

3.6.1 Virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ eines Massenpunktes

Unter einer virtuellen Verrückung $\delta\vec{r}$ eines Massenpunktes (oder allgemeiner $\delta\vec{r}_i$ des Massenpunktes i) verstehen wir eine infinitesimal kleine, gedachte Ortsveränderung mit zwei wesentlichen Eigenschaften:
(a) Sie verläuft in Übereinstimmung mit den Zwangsbedingungen (z.B. entlang der schiefen Ebene), d.h. anstatt der Aussage $\vec{Z} \parallel$ grad G tritt das *Prinzip der virtuellen Arbeit*

$$\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = 0 \qquad (3.6.2)$$

denn $\vec{Z} \perp \delta\vec{r}$.
Allgemeiner lautet Gleichung (3.6.2)

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (3.6.3)$$

Zwangskräfte verrichten keine virtuelle Arbeit!
(b) Die virtuelle Verrückung ist *instantan*, d.h. die Zwangsbedingungen verändern sich während der Verrückung nicht. Bei skleronomen Zwangsbedingungen braucht diese zweite Eigenschaft sowieso nicht gefordert werden.
Durch die virtuelle Verrückung wird durch die Anwesenheit von Kräften eine (ebenso gedachte) *virtuelle Arbeit* geleistet. Mit $\vec{F}_{tot} = \vec{K} + \vec{Z}$ folgt für die virtuelle Arbeit

$$\delta A = \vec{F}_{tot} \cdot \delta\vec{r} = \vec{K} \cdot \delta\vec{r} + \vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = \vec{K} \cdot \delta\vec{r}, \qquad (3.6.4)$$

weil aufgrund Gleichung (3.6.2) der Beitrag der Zwangskräfte verschwindet.
Die Ableitung von Gleichung (3.6.2) ist bei einfachen mechanischen Problemen wie der schiefen Ebene anschaulich verständlich und daher nachvollziehbar. Bei komplizierteren mechanischen Problemen ist die Anschauung nicht mehr gegeben, sodaß man den Spieß umdrehen muß und das *Prinzip als allgemeingültig erklären muß!* Das Prinzip der virtuellen Verrückung ist also eine mathematisch nicht herleitbare, sondern aus der physikalischen Erkenntnis gewonnene Erweiterung der Newtonschen Mechanik.

3.6.2 Allgemeiner nichtstatischer Fall

Wir betrachten jetzt den nichtstatischen ($\ddot{\vec{r}} \neq 0$) Fall der Dynamik eines Systems von Massenpunkten, deren Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$$

wir für alle i als

$$(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) = 0 \tag{3.6.5}$$

schreiben. Durch Einführung von äußeren Kräften und Zwangskräften und skalare Multiplikation mit den virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ erhalten wir

$$\sum_i (\vec{K}_i + \vec{Z}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.6.6}$$

Unter Ausnutzung des Prinzips der virtuellen Verrückung (3.6.3) folgt das *Prinzip von d'Alembert* für ein System von Massenpunkten

$$\sum_i (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.6.7}$$

Für einen Massenpunkt $i = 1$ reduziert sich Gleichung (3.6.7) auf

$$(\vec{K} - \dot{\vec{p}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \tag{3.6.8}$$

Die Projektion der Bewegungsgleichungen auf die virtuellen Verrückungen in Gleichungen (3.6.7) und (3.6.8) eliminiert also die Zwangskräfte bei der Behandlung des mechanischen Problems. Das ist gut, hat aber zunächst noch einen Nachteil:
Während (3.6.6) auch für alle einzelnen Werte von i gilt, ist dies nicht mehr der Fall bei Gleichung (3.6.7), weil die virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ nicht mehr linear unabhängig sind, da sie die Zwangsbedingungen erfüllen! Deshalb folgt im statischen Fall $\dot{\vec{p}} = 0$ aus Gleichung (3.6.8) auch nicht $\vec{K} = 0$, denn die Komponenten $\delta x, \delta y$ und δz der virtuellen Verrückung sind aufgrund der Zwangsbedingungen nicht voneinander unabhängig. Diesen Nachteil können wir beheben, indem wir auf geeignet gewählte neue verallgemeinerte Koordinaten übergehen.

3.6.3 Verallgemeinerte Koordinaten

Es sollen nun die durch die Zwangsbedingungen voneinander abhängigen Koordinaten ($\vec{r}_i$) durch eine Transformation auf ein System von unabhängigen Koordinaten ($\vec{q}_j$) zurückgeführt werden, sogenannte *verallgemeinerte Koordinaten.* Erst wenn die virtuellen Verrükkungen (in den verallgemeinerten Koordinaten) voneinander unabhängig sind, können die Koeffizienten der $\delta\vec{q}_j$ einzeln gleich Null gesetzt werden. Der Raum der verallgemeinerten

Koordinaten heißt *Konfigurationsraum* und seine Dimension nennt man die Anzahl der *Freiheitsgrade.*
Im Fall von holonomen Zwangsbedingungen heißt das, daß die Zwangsbedingungen für beliebige Werte der q_j erfüllt sind:

$$G_m(x_1(q_1,....,q_s,t),...,x_{3N}(q_1,....,q_s,t),t) = 0, \quad \forall q_j \tag{3.6.9}$$

Dies verdeutlichen wir an zwei bereits bekannten Beispielen:
(a) Vernachlässigen wir bei der schiefen Ebene in Abbildung 3.1 die triviale Tiefe y, so handelt es sich um ein zweidimensionales mechanisches Problem in x und z. Wählen wir die Strecke s auf der schiefen Ebene als verallgemeinerte Koordinate, so legt diese die zwei kartesischen Koordinaten gemäß $x = s\cos\alpha$ und $z = s\sin\alpha$ fest.
Die holonome Zwangsbedingung (3.4.4) ist dann automatisch erfüllt, denn

$$G(x(s),z(s)) = z - x\tan\alpha = s\sin\alpha - s\cos\alpha\tan\alpha = 0$$

und wir haben es mit einem eindimensionales Problem in der verallgemeinerten Koordiante s zu tun.
(b) Beim ebenen Pendel wählen wir den Auslenkungswinkel ϕ als verallgemeinerte Koordinate, der dann die zwei kartesischen Koordinaten gemäß $x = l\sin\phi$ und $y = l\cos\phi$ festlegt. Die holonome Zwansbedingung (3.2.1b) ist dann wieder automatisch erfüllt, denn

$$G(x(\phi),y(\phi)) = x^2(\phi) + y^2(\phi) = l^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = l^2.$$

Für holonome Zwangsbedingungen läßt sich das Prinzip von d'Alembert (3.6.7) aus den Lagrange-Gleichungen 1. Art (3.4.19) begründen. Die Unabhängigkeit der Zwangsbedingungen (3.6.9) von q_j bedeutet für die totale Ableitung

$$\frac{dG_m}{dq_j} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G_m}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0 \tag{3.6.10}$$

Multiplizieren wir (3.4.19) mit $\partial x_i/\partial q_k$ und summieren über i so folgt wegen (3.6.10)

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} K_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_{m=1}^{p}\lambda_m\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial G_m}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} K_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{3.6.11}$$

die Elimination der Zwangskräfte. Gleichung (3.6.11) entspricht in diesem Fall dem Prinzip von d'Alembert (3.6.7).
Im allgemeinen Fall der Dynamik von N Teilchen im dreidimensionalen Ortsraum bei Vorliegen von k Zwangsbedingungem $G_m = 0$ $(m = 1,...,k)$ ergibt sich die Zahl der Freiheitsgrade (d.h. die Anzahl der nötigen verallgemeinerten Koordinaten) zu $s = 3N - k$. Wir suchen also die Transformation der abhängigen Koordinaten, d.h. der Vektoren $\vec{r}_i, i = 1,......., N$, auf verallgemeinerte Koordinaten $q_j (j = 1,....., s)$:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, ..., q_s, t) \tag{3.6.12}$$

Gemäß der Kettenregel folgt dann für die Geschwindigkeiten

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \tag{3.6.13}$$

und die virtuellen Verrückungen

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{3.6.14}$$

In Gleichung (3.6.14) taucht keine partielle Ableitung nach der Zeit t auf, weil nach Definition die virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ instantan in der Zeit sind. Virtuelle Verrückungen beziehen sich nur auf Auslenkungen der Koordinaten.
Aus Gleichung (3.6.13) folgt sofort

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{3.6.15}$$

3.7 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Wir gehen jetzt aus vom Prinzip von d'Alembert (3.6.7),

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \tag{3.7.1}$$

und betrachten die einzelnen Terme in dieser Gleichung.
Mit der Hilfsformel (3.6.14) folgt für den ersten Term

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j \tag{3.7.2}$$

wobei wir die *verallgemeinerte Kraft* durch

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{3.7.3}$$

einführen.
Die Umwandlung des zweiten Terms ist etwas umfangreicher. Mit derselben Hilfsformel erhalten wir

$$I_2 = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{3.7.4}$$

Wir nutzen

$$\frac{d}{dt}[\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}] = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}] \tag{3.7.5}$$

und vertauschen im zweiten Term auf der rechten Seite die Ableitungen, denn

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}] = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_k =$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{d\vec{r}_i}{dt})$$

Dann erhalten wir aus Gleichung (3.7.5)

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}[\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}] - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{d\vec{r}_i}{dt})$$

Eingesetzt in Gleichung (3.7.4) folgt

$$I_2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i(\frac{d}{dt}[\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}] - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j})\delta q_j$$

Mit der Hilfsformel (3.6.15) im ersten Term auf der rechten Seite erhalten wir

$$I_2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i[\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}]\delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i[\frac{d}{dt}(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}]\delta q_j = \sum_{j=1}^{s}[\frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}v_i^2)) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}v_i^2)]\delta q_j$$

Mit der kinetischen Energie $T = \sum_{i=1}^{N}(m_i/2)v_i^2$ ergibt sich also

$$I_2 = \sum_{i=1}^{N}\dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s}[\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j}]\delta q_j. \tag{3.7.6}$$

Einsetzen von Gleichungen (3.7.2) und (3.7.6) in Gleichung (3.7.1) führt auf

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s}[Q_j - \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) + \frac{\partial T}{\partial q_j}]\delta q_j. \tag{3.7.7}$$

Wenn nun, wie angenommen, die Zwangsbedingungen holonom sind, dann sind die verallgemeinerten Koordinaten q_j unabhängig voneinander, ebenso wie die δq_j, sodaß jeder einzelne Koeffizient in Gleichung (3.7.7) verschwinden muß. Es ergeben sich dann die s Gleichungen

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, ..., s \tag{3.7.8}$$

Die Gleichungen (3.7.8) werden als *Lagrange-Gleichungen 2. Art in allgemeiner Form* bezeichnet.

Ein wichtiger Spezialfall sind konservative Kräfte (siehe Kap. 2.3.4), für die das äußere Kraftfeld als Gradient eines **geschwindigkeitsunabhängigen** Potentials $V(x, y, z)$ dargestellt werden kann,

$$\vec{K}_i = -\vec{\nabla}_i V(x, y, z) \tag{3.7.9}$$

In diesem Fall folgt für die verallgemeinerte Kraft (3.7.3) mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{\nabla}_i V = -\sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial V}{\partial x_i} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y_i} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z_i} \vec{e}_z \Big) \cdot \Big(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \vec{e}_x + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \vec{e}_y + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \vec{e}_z \Big) \\ &= -\sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \Big) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \end{aligned} \tag{3.7.10}$$

weil die q_j die verallgemeinerten Koordinatenkomponenten bezeichnen (kein Faktor 3). Für das geschwindigkeitsunabhängige Potential (3.7.9) gilt weiterhin

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\Big) = 0 \tag{3.7.11}$$

Wir erhalten dann für die allgemeinen Lagrange-Gleichungen (3.7.8)

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\Big[\frac{\partial V}{\partial q_j} - 0\Big] = -\Big[\frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\Big)\Big]$$

und mit der *Lagrange-Funktion*

$$L \equiv T - V, \tag{3.7.12}$$

die als Differenz der kinetischen und potentiellen Energie definiert ist, die *Lagrange-Gleichungen 2. Art* zu

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, ..., s \tag{3.7.13}$$

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.7.13) sind aus mehreren Gründen die bevorzugten Gleichungen zur Lösung mechanischer Probleme:

1) Im Vergleich zu den Lagrange-Gleichungen 1. Art haben wir es nur mit $s = 3N - k$ anstatt $3N + k$ Gleichungen zu tun. Wir verzichten dabei auf die Berechnung der Zwangskräfte.

2) Für komplexe Systeme läßt sich die Lagrange-Funktion (3.7.12) viel einfacher aufstellen als alle Kraftterme.

3) Die Lagrange-Funktion ist im allgemeinen eine besonders einfache Funktion der in Frage kommenden Variablen. Dies ist auch wichtig für die Entwicklung neuer physikalischer Theorien insbesondere in der Feldtheorie.

4) Die Lagrange-Funktion ist im Gegensatz zu den vektoriellen Kräften eine skalare Größe und deshalb bei Koordinatentransformationen eine invariante Größe.
Wir behandeln später die Konsequenzen für die allgemeine Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.7.8) bei Vorliegen von geschwindigkeitsabhängigen Kräften und/oder nicht-holonomen Zwangsbedingungen, wenn also die Voraussetzungen zur Ableitung der Gleichungen (3.7.13) anders sind.

3.8 Einfache Anwendungen

3.8.1 Kräftefreie Bewegung

Im Fall der kräftefreien Bewegung ($V = 0$) verwenden wir die natürlichen auch als verallgemeinerte Koordinaten. Die Lagrange-Funktion ist dann durch

$$L = T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

gegeben. Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

folgen für die drei Lagrange-Gleichungen (3.7.13)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} = 0,$$

deren Lösungen die gleichförmige Bewegung ergibt.

3.8.2 Atwoodsche Fallmaschine

Als Beispiel eines konservativen physikalischen Systems mit skleronomen Zwangsbedingungen betrachten wir eine masselose Rolle mit dem Radius R, über die zwei Massen miteinander durch ein masseloses Seil der Länge $l + \pi R$ verbunden sind (siehe Abb. 3.5). Auf die Massen m_1 und m_2 wirkt das Schwerefeld.

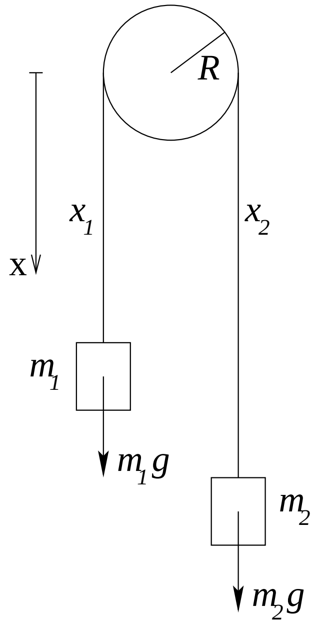

Abb. 3.5: Atwoodsche Fallmaschine.

Die Zwangsbedingung lauetet $x_1 + x_2 = l$. Als verallgemeinerte Koordinate wählen wir den Ort der ersten Masse $q = x_1$. Aufgrund der Zwangsbedingung gilt $x_2 = l - q$.
Für die kinetische Energie erhalten wir dann

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 = \frac{m_1}{2}\dot{q}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}^2,$$

während die potentielle Energie durch

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -m_1 g q - m_2 g(l - q)$$

gegeben ist. Damit erhalten wir für die Lagrange-Funktion (3.7.12)

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + g[m_1 q + m_2(l - q)] \tag{3.8.1}$$

Durch Differentiation folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 - m_2)g$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2)\dot{q},$$

sodaß

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = (m_1 + m_2)\ddot{q}.$$

Die Lagrange-Gleichung 2.Art (3.7.13) lautet in diesem Fall dann

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} - (m_1 - m_2)g = 0$$

oder

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,$$

mit der allgemeinen Lösung

$$q(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{g}{2} t^2 + \ c_1 t + c_2 \tag{3.8.2}$$

Man erhält eine durch das Verhältnis der Massen veränderte Fallbeschleunigung.

3.8.3 Allgemeine Form der kinetischen Energie

Gemäß Gleichung (3.6.13)

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

folgt für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t})^2 = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j + \ 2 \sum_{j=1}^{s} b_j \dot{q}_j + \ c \tag{3.8.3}$$

mit

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \tag{3.8.4}$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \tag{3.8.5}$$

und

$$c = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t})^2 \tag{3.8.6}$$

Ist die Koordinatentransformation $\vec{r}_i \to q_j$ *zeitunabhängig*, d.h.

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0,$$

so sind die Koeffizienten (3.8.5) und (3.8.6) identisch gleich Null,

$$b_j = c = 0,$$

und die kinetische Energie (3.8.3)

$$T = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j \tag{3.8.7}$$

reduziert sich auf eine *homogene* Funktion 2. Grades in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten.
Unter einer homogenen Funktion $f(x)$ vom Grade n versteht man die Eigenschaft

$$f(\lambda x) = \lambda^n f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1. \tag{3.8.8}$$

Betrachten wir als Beispiel den Übergang von zweidimensionalen kartesischen Koordinaten (x, y) auf ebene Polarkoordianten (r, θ) mit den zeitunabhängigen Transformationen (vergleiche Kap. 1.8.3) $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$. Mit

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r(\sin\theta)\dot{\theta}, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r(\cos\theta)\dot{\theta}$$

folgt für die kinetische Eneregie eines Massenpunkts

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}[\dot{r}^2\cos^2\theta - 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} + r^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\sin^2\theta + 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}$$
$$+r^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2] = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] \tag{3.8.9}$$

wieder eine homogene Funktion 2. Grades in den neuen Koordinaten.

3.8.4 Kochrezept für Lagrange-Gleichungen 2.Art

Im Sinne eines "Kochrezepts" fassen wir das Lösungsverfahren bei Lagrange-Gleichungen 2. Art zusammen:
1) Wahl der verallgemeinerten Koordinaten q und Angabe der Transformationen $x = x(q, t)$ zu den kartesischen Koordinaten.
2) Bestimmung der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$.
3) Aufstellen der Bewegungsgleichungen.
4) Bestimmung der Erhaltungsgrößen.
5) Lösung der Bewegungsgleichungen, eventuell unter Verwendung von Erhaltungsgrößen.
6) Bestimmung der Integrationskonstanten.
7) Diskussion der Lösung.

3.9 Weitere Anwendungen

3.9.1 Schiefe Ebene

(vergleiche mit Kap. 3.1.1 und 3.4.1)
Wir wählen die Weglänge s auf der schiefen Ebene (siehe Abb. 3.1) als verallgemeinerte Koordinate. Dann lauten die Transformationen zu den kartesischen Koordinaten

$$x = x(s) = s\cos\alpha, \quad y = y(s) = 0, \quad z = z(s) = s\sin\alpha$$

Aus $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ und $V = mgz$ folgen

$$T = \frac{m}{2}\dot{s}^2, \quad V = mgs\sin\alpha,$$

sodaß die Lagrange-Funktion durch

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - \ mgs\sin\alpha \tag{3.9.1}$$

gegeben ist. Mit

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -mg\sin\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}, \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}) = m\ddot{s}$$

folgt als Lagrange-Gleichung

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha$$

mit der allgemeinen Lösung

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2\sin\alpha + \ V_0 t + \ s_0 \tag{3.9.2}$$

3.9.2 Doppelpendel

Wir betrachten zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2, die durch einen leichten (masselosen) Stab der Länge l_2 verbunden sind, und die durch einen ähnlichen Stab der Länge l_1 im Ursprung aufgehängt sind, der an einem der Teilchen befestigt ist (Abbildung 3.6).

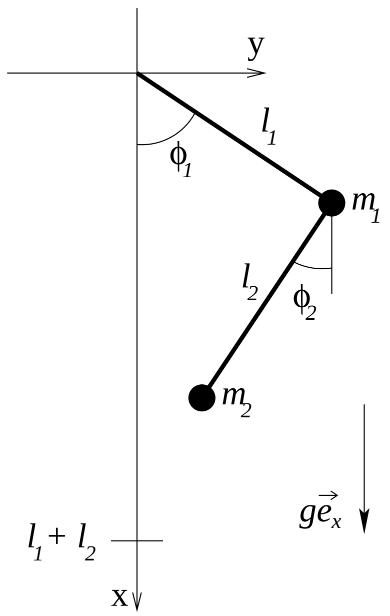

Abb. 3.6: Doppelpendel.

Geeignete verallgemeinerte Koordinaten sind die beiden Winkel θ_1 und θ_2, die mit den kartesischen Ortsvektoren über

$$x_1 = l_1 \cos\theta_1, \quad y_1 = l_1 \sin\theta_1$$

und

$$x_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2, \quad y_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$$

zusammenhängen. Mit

$$\dot{x}_1 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1, \;\; \dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1,$$
$$\dot{x}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2, \quad \dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$

folgt für die kinetische Energie des Systems

$$\begin{aligned} T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_1}{2} l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\big[l_1^2\dot{\theta}_1^2 \sin^2\theta_1 + \\ 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \sin^2\theta_2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \cos^2\theta_2] \\ = \frac{m_1}{2} l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\big[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2)] \\ = \frac{m_1}{2} l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\big[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned} \tag{3.9.3}$$

wobei wir

$$\sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

benutzt haben.
Die potentielle Energie in Bezug auf die Ebene im Abstand $l_1 + l_2$ unterhalb des Aufhängepunkts lautet

$$V = m_1 g[(l_1 + l_2) - l_1\cos\theta_1] + m_2 g[(l_1 + l_2) - (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)] \tag{3.9.4}$$

Für die Lagrange-Funktion erhalten wir dann

$$\begin{aligned} L = T - V = \frac{m_1}{2} l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\big[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ -m_1 g[(l_1 + l_2) - l_1\cos\theta_1] - m_2 g[(l_1 + l_2) - (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)] \end{aligned} \tag{3.9.5}$$

Wir bestimmen jetzt die zwei Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \tag{3.9.6}$$

und

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0. \tag{3.9.7}$$

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1 l_1 g \sin\theta_1 - m_2 l_1 g \sin\theta_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

und

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)](\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

folgt für die erste Lagrange-Gleichung (3.9.6)

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \sin\theta_1 = 0 \quad (3.9.8)$$

Ebenso mit

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 g \sin\theta_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

und

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 [\sin(\theta_1 - \theta_2)](\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

folgt für die zweite Lagrange-Gleichung (3.9.7)

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 [\sin(\theta_1 - \theta_2)](\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$
$$-m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 g \sin\theta_2 = 0$$

also

$$l_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 g \sin\theta_2 = 0 \qquad (3.9.9)$$

Für den *Spezialfall* gleicher Massen ($m_1 = m_2 = m$) und Aufhängelängen $l_1 = l_2 = l$ reduzieren sich die beiden Lagrange-Gleichungen (3.9.8) – (3.9.9) auf das nichtlineare System

$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g\sin\theta_1 = 0 \qquad (3.9.10a)$$

$$l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g\sin\theta_2 = 0, \qquad (3.9.10b)$$

dessen Lösung wir für den Grenzfall kleiner Auslenkungen ($\theta_{1,2} << 1$) diskutieren. In diesem Grenzfall nähern wir

$$\sin\theta \simeq \theta, \quad \cos\theta \simeq 1$$

und vernachlässigen Terme $\propto \dot{\theta}^2$. Das Gleichungssystem (3.9.10) reduziert sich dann auf

$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 \simeq -2g\theta_1 \tag{3.9.11a}$$

und

$$l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 \simeq -g\theta_2 \tag{3.9.11b}$$

Mit den Lösungsansätzen

$$\theta_{1,2} = A_{1,2}\exp(i\omega t), \quad A_{1,2} = const., \quad \omega = const. \tag{3.9.12}$$

folgt mit

$$\dot{\theta}_{1,2} = i\omega A_{1,2}\exp(i\omega t) = i\omega\theta_{1,2}$$

und

$$\ddot{\theta}_{1,2} = -\omega^2 A_{1,2}\exp(i\omega t) = -\omega^2\theta_{1,2}$$

für das System (3.9.11)

$$2(g - l\omega^2)A_1 - l\omega^2 A_2 = 0 \tag{3.9.13a}$$

$$-l\omega^2 A_1 + (g - l\omega^2)A_2 = 0 \tag{3.9.13b}$$

Damit eine Lösung des Gleichungssystems (3.9.13) existiert, muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2(g - l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & (g - l\omega^2) \end{vmatrix} = 2(g - l\omega^2)^2 - l^2\omega^4 = 0$$

verschwinden. Diese Bedingung führt auf

$$\omega^4 - \frac{4g}{l}\omega^2 + 2(\frac{g}{l})^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\omega_1^2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}, \quad \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l} \tag{3.9.14}$$

Aus Gleichung (3.9.13b) folgt für die Amplituden

$$A_2 = \frac{l\omega^2}{g - l\omega^2}A_1 \tag{3.9.15}$$

Für die erste Lösung $\omega^2 = \omega_1^2$ folgt $l\omega_1^2 = (2 + \sqrt{2})g$ und

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 - (2 + \sqrt{2})} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -\frac{(2 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = 2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2 = -\sqrt{2},$$

d.h. die Massenpunkte schwingen mit entgegengesetzter Amplitude mit der Frequenz $\omega_1 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})g/l}$.

Für die zweite Lösung $\omega^2 = \omega_2^2$ folgt $l\omega_2^2 = (2-\sqrt{2})g$ und

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2-\sqrt{2}}{1-(2-\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = (2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2},$$

d.h. die Massenpunkte schwingen mit gleichgerichteter Amplitude mit der Frequenz $\omega_2 = \sqrt{(2-\sqrt{2})g/l}$.

3.10 Exkurs über Variationsprinzipien

Wir formulieren zuerst das *Grundproblem der Variationsrechnung*:
Bestimme die Funktion $y(x)$ so, daß das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx\ f(y(x), y^{'}(x); x) \tag{3.10.1}$$

ein Extremum (entweder Maximum oder Minimum) annimmt. Dabei bezeichnet $y^{'}(x) = dy/dx$ die Ableitung der Funktion $y(x)$ und das Funktional f wird als gegeben angenommen, wie auch die Integrationsgrenzen x_1, x_2 (letztere Annahme ist nicht unbedingt notwendig). Man variiert die Funktion $y(x)$ solange, bis ein Extremwert für das Integral (3.10.1) gefunden ist; d.h. ergibt sich für irgendeine Funktion z.B. ein Minimalwert für das Integral J, so muß *jede* Nachbarfunktion das Integral J größer machen.
Für die *Nachbarfunktion* benutzen wir die parametrische Drastellung $y = y(\alpha, x)$ derart, daß für $\alpha = 0$ $y = y(0, x) = y(x)$ die Funktion ist, die einen Extremwert für J ergibt. Wir schreiben dann

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x), \tag{3.10.2}$$

wobei die Funktion $\eta(x)$ eine stetige erste Ableitung hat und an den Endpunkten verschwindet ($\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$) (siehe Abb. 3.7).

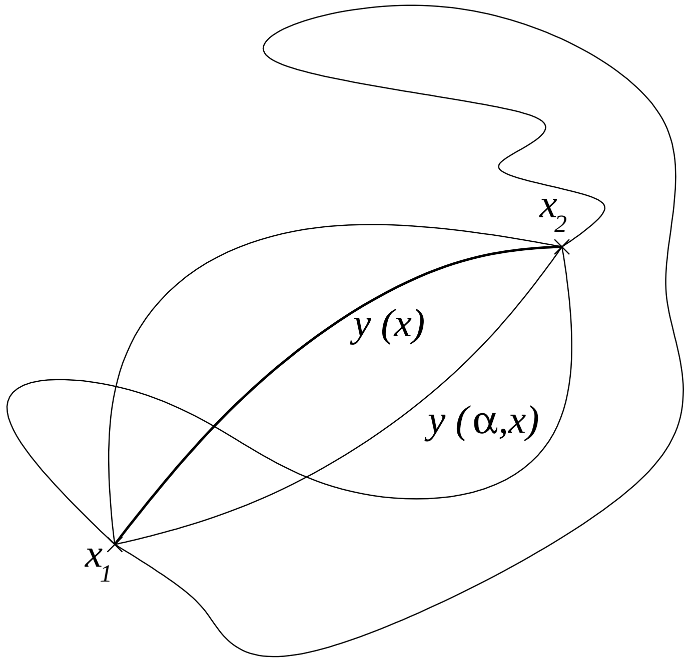

Abb. 3.7: Zur Illustration der Nachbarfunktion (3.10.2).

Mit Funktionen der Art (3.10.2) wird das Integral (3.10.1) vom Parameter α abhängig:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx\ f(y(\alpha, x), y^{'}(\alpha, x); x) \tag{3.10.3}$$

Eine notwendige Bedingung für den Extremwert ist dann

$$[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}]_{\alpha=0} = 0, \quad \forall \eta(x) \tag{3.10.4}$$

3.10.1 Beispiele

Als **Beispiel 1** betrachten wir die einfache Funktion $y = x$ und konstruieren benachbarte Funktionen durch Addition von $\alpha \sin x$ (siehe Abb. 3.8):

$$y(\alpha, x) = x + \alpha \sin x$$

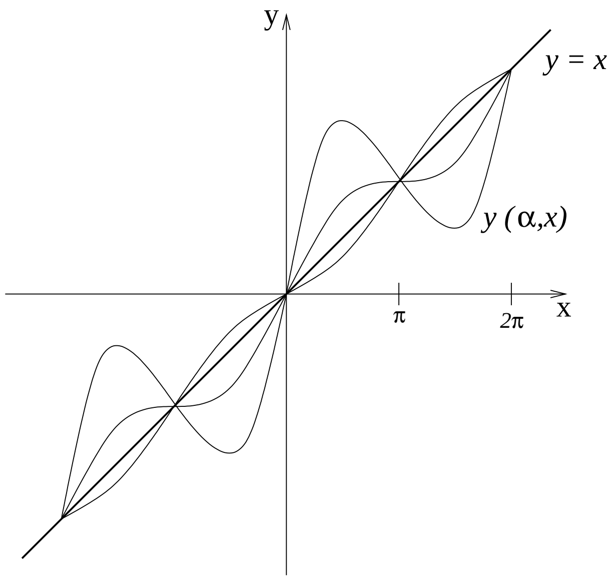

Abb. 3.8: Illustration der Funktionenschar $y(\alpha, x) = x + \alpha \sin x$.

Wir berechnen den Wert des Integrals von $f = (dy/dx)^2$ für $x \in [0, 2\pi]$. In diesem Fall ist $\eta(x) = \sin x$ mit stetiger erster Ableitung und $\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$. Mit

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \alpha \cos x$$

gilt dann

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} dx \; (1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x) = 2\pi + \pi\alpha^2$$

Man erkennt, daß $J(\alpha) > J(0) \; \forall \alpha$, und daß die Bedingung (3.10.4) erfüllt ist,

$$[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}]_{\alpha=0} = [2\alpha\pi]_{\alpha=0} = 0$$

Beispiel 2: Wir betrachten die Gleichung für die Linie, die den kürzesten Abstand zwischen den Punkten $(x_1, y_1) = (0, 0)$ und $(x_2, y_2) = (1, 0)$ in der Ebene ergibt. Das ist natürlich die x-Axchse $y(0, x) = 0$. Wir ändern den Pfad durch

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) = 0 + \alpha(x^2 - x), \tag{3.10.5}$$

wählen also $\eta(x) = x^2 - x$, das wieder $\eta(x_1) = \eta(0) = 0$ und $\eta(x_2) = \eta(1) = 0$ erfüllt.
Das Abstandsdifferential ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \; dx \tag{3.10.6}$$

und die gesamte Weglänge ist dann

$$s = \int_0^1 dx\, \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

Gemäß Gleichung (3.10.5) folgt $y^{'}(\alpha, x) = dy(\alpha, x)/dx = \alpha(2x - 1)$, sodaß

$$s(\alpha) = \int_0^1 dx\, \sqrt{4\alpha^2 x^2 - 4\alpha^2 x + \alpha^2 + 1} \tag{3.10.7}$$

Dieses Integral ergibt (Übungsaufgabe)

$$s(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \alpha^2} + \frac{1}{2\alpha}\mathrm{arsinh}\alpha \tag{3.10.8}$$

Die Taylor-Entwicklung für kleine Werte $\alpha << 1$ führt auf

$$s(\alpha << 1) \simeq \frac{1}{2}(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \mathcal{O}(\alpha^4)) + \frac{1}{2\alpha}(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \mathcal{O}(\alpha^5)) = 1 + \frac{\alpha^2}{6} + \mathcal{O}(\alpha^4),$$

sodaß

$$J(\alpha) = s(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{6} + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

und

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial s(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{3} + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

$\alpha = 0$ liefert den Extremalwert $J(\alpha = 0) = s(\alpha = 0) = 1$ und es gilt

$$[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}]_{\alpha=0} = 0$$

3.10.2 Euler-Gleichung

Aus Gleichungen (3.10.4) und (3.10.3) folgt

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y(\alpha, x), y^{'}(\alpha, x); x) \tag{3.10.9}$$

Weil die Grenzen x_1 und x_2 festliegen, folgt

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, [\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y^{'}}{\partial \alpha}] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, [\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x}] \tag{3.10.10}$$

Den zweiten Term des Integranden integrieren wir partiell nach x:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\frac{\partial y}{\partial \alpha}) = [\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\frac{\partial y}{\partial \alpha} \tag{3.10.11}$$

Nach Gleichung (3.10.2) ist

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \tag{3.10.12}$$

sodaß

$$[\frac{\partial y}{\partial \alpha}]_{x_1}^{x_2} = \eta(x_2) - \eta(x_1) = 0$$

und wir erhalten für Gleichung (3.10.11)

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\frac{\partial y}{\partial \alpha}) = - \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\eta(x)$$

Setzen wir dies und Gleichung (3.10.12) in Gleichung (3.10.10) ein, so folgt

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \, [\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})]\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \, [\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})]\eta(x) \tag{3.10.13}$$

y und $y^{'}$ sind noch Funktionen von α. Wenn aber $\alpha = 0$ ist, dann ist $y(\alpha, x) = y(0, x) = y(x)$ unabhängig von α. Weil $\eta(x)$ beliebige Funktionen sind, folgt aus der Bedingung (3.10.4),

$$[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}]_{\alpha=0} = 0,$$

daß gemäß Gleichung (3.10.13) der Integrand selbst verschwinden muß:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0, \tag{3.10.14}$$

wobei die Ursprungsfunktionen y und $y^{'}$ unabhängig von α sind. Gleichung (3.10.14) wird als *Euler-Gleichung der Variationsrechnung* bezeichnet.

3.10.3 Das Brachistochronen-Problem

Es soll diejenige Kurve gefunden werden, die zwei Punkte verbindet und längs der ein Teilchen in der kürzesten Zeit unter dem Einfluß der Schwerkraft fällt. Das Teilchen mit der Masse m ist anfangs im Punkt 1 in Ruhe und fällt von dort zum niedrigeren Punkt 2 (siehe Abbildung 3.9).

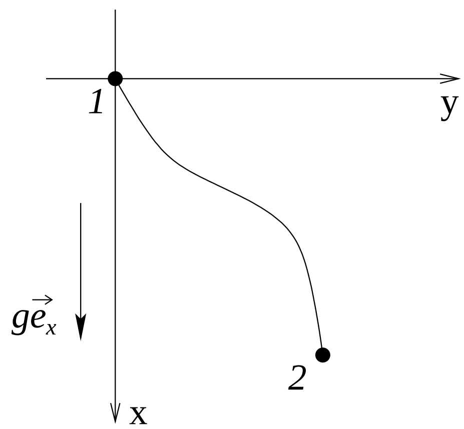

Abb. 3.9: Illustration des Brachistochronen-Problems.

Die Fallzeit ist durch das Wegintegral

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v} \tag{3.10.15}$$

gegeben, und die konstante, nach unten gerichtete Schwerkraft ist konservativ, sodaß der Energiesatz $T + U = const.$ gilt.

Wir messen das Potential U von der Höhe $x = 0$ aus (d.h. $U(x = 0) = 0$), und wegen $v(x = 0) = 0$ ist die anfängliche kinetische Energie $T(x = 0) = 0$, sodaß immer gilt

$$T + U = 0 \tag{3.10.16}$$

Mit $U = -mgx$ und $T = mv^2/2$ folgt $mv^2/2 = mgx$ oder

$$v = \sqrt{2gx} \tag{3.10.17}$$

Wir erhalten dann mit Gleichung (3.10.6) für die Fallzeit (3.10.15)

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \int_1^2 \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \int_1^2 dx \, \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 dx \, (\frac{1 + y'^2}{x})^{1/2} \tag{3.10.18}$$

Vergleichen wir Gleichung (3.10.18) mit dem allgemeinen Ausdruck (3.10.1), so erkennen wir, daß bis auf die Konstante $(2g)^{-1/2}$ das Funktional f durch

$$f(y, y'; x) = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}} \tag{3.10.19}$$

gegeben ist. Weil für dieses Funktional

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

gilt, folgt gemäß der Euler-Gleichung (3.10.14)

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2a}} = const. \tag{3.10.20}$$

mit einer geeignet gewählten Konstanten a.

Aus Gleichung (3.10.19) folgt

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}} \tag{3.10.21}$$

Das Gleichsetzen mit (3.10.20) liefert dann

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a}$$

oder

$$(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{x}{2a-x} \tag{3.10.22}$$

sodaß

$$y = \int dx \, \frac{x^{1/2}}{(2a-x)^{1/2}} = \int dx \, \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}} \tag{3.10.23}$$

Substituieren wir

$$x = a(1-\cos\Theta), \tag{3.10.24}$$

sodaß $dx = a(\sin\Theta)d\Theta$, in Gleichung (3.10.23), dann ergibt sich

$$y = \int d\Theta \frac{a^2(1-\cos\Theta)\sin\Theta}{\sqrt{2a^2(1-\cos\Theta)-a^2(1-\cos\Theta)^2}}$$

$$= a\int d\Theta \frac{(1-\cos\Theta)\sin\Theta}{\sqrt{1-\cos^2\Theta}} = a\int d\Theta(1-\cos\Theta) = a(\Theta-\sin\Theta)+c_1 \tag{3.10.25}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir den Startpunkt 1 in den Ursprung des Koordinatensystems, d.h. $x(t=0) = y(t=0) = 0$. Aus (3.10.24) folgt dann anfänglich $\Theta(t=0) = 0$, sodaß mit $y(t=0) = 0$ dann die Integrationskonstante zu $c_1 = 0$ bestimmt wird. Für die Lösungen (3.10.24) und (3.10.25) folgt dann

$$x = a(1-\cos\Theta), \quad y = a(\Theta-\sin\Theta) \tag{3.10.26}$$

Die Konstante a muß dabei so angepaßt werden, daß die Bahnkurve durch den Punkt 2 verläuft, d.h.

$$x_2 = a(1-\cos\Theta_2), \quad y_2 = a(\Theta_2-\sin\Theta_2) \tag{3.10.27}$$

Die Lösung (3.10.26) stellt die Gleichung einer *Zykloide* dar, die in Abbildung 3.10 veranschaulicht ist.

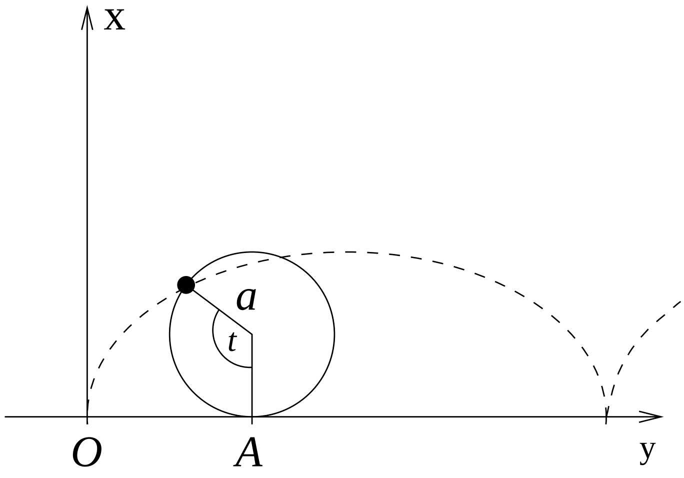

Abb. 3.10: Illustration der Zykloidenbewegung.

Ein Kreis mit dem Radius a rollt auf einer Geraden ab. Ein gegebener Punkt auf dem Kreis beschreibt dann eine Zykloide. Aus Abb. 3.10 entnehmen wir für die Strecken $\overline{OA} = at$ und ebenfalls $\overline{OA} = y + a\sin t$. Weiterhin gilt $a = x + a\cos t$, sodaß

$$y = a(t - \sin t), \quad x = a(1 - \cos t)$$

in Übereinstimmung mit Gleichungen (3.10.27).
Wir lösen (3.10.26a) nach $\cos\Theta$ auf:

$$\cos\Theta = 1 - \frac{x}{a}, \quad \Theta = \arccos\frac{a-x}{a}$$

und erhalten damit

$$\sin\Theta = \sqrt{1-\cos^2\Theta} = \frac{1}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.10.26b) ein, so folgt der Zusammenhang

$$y(x) = -\sqrt{2ax - x^2} + a\arccos\frac{a-x}{a} \tag{3.10.28}$$

Für die Gleitzeit (3.10.18) ergibt sich mit Gleichung (3.10.22)

$$t_{12} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_1^2 dx\,\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{x}{2a-x}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}}[-\arcsin\frac{a-x}{a}]_0^{x_2} =$$

$$\sqrt{\frac{a}{g}}(\arcsin 1 - \arcsin\frac{a-x_2}{a}) = \sqrt{\frac{a}{g}}(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a-x_2}{a}) = \sqrt{\frac{a}{g}}\arccos\frac{a-x_2}{a} \tag{3.10.29}$$

3.10.4 Verallgemeinerung auf mehrere unabhängige Variable

Bisher haben wir die Euler-Gleichung (3.10.14) nur für eine Funktion $y(x)$ abgeleitet, die von einer Variablen x abhing. Jetzt verallgemeinern wir auf den Fall, daß das Funktional f von mehreren unabhängigen Funktionen y_i und ihren Ableitungen y_i' abhängt:

$$f = f\Big(y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), ...; x\Big)$$

oder kurz

$$f = \Big(y_i(x), y_i'(x); x\Big), \quad i = 1, ..., n \tag{3.10.30}$$

Dann führen wir wieder in Analogie zu Gleichung (3.10.2) die Nachbarfunktionen

$$y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha\eta_i(x)$$

ein und erhalten völlig analog zu (3.10.13)

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \sum_{i=1}^{n}[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y_i'})]\eta_i(x) \tag{3.10.31}$$

Da die Variablen y_i unabhängig voneinander sind, sind auch die Funktionen η_i unabhängig voneinander. Für $\alpha = 0$ folgt dann, daß alle einzelnen Integranden in der eckigen Klammer von Gleichung (3.10.32) verschwinden müssen, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y_i'}) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3.10.32}$$

Die Analogie der Euler-Gleichungen (3.10.32) zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.7.13) ist offensichtlich mit den Ersetzungen

$$x \to t, \quad y_i \to q_i, \quad f(y_i, \dot{y}_i, t) \to L(q_i, \dot{q}_I, t) \tag{3.10.33}$$

Mit diesen Ersetzungen ergeben sich aus den Euler-Gleichungen (3.10.32) dann die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3.10.34}$$

und wir haben das *Hamiltonsche Prinzip* bewiesen.

3.11 Hamiltonsches Prinzip

Das soeben bewiesene Prinzip von Hamilton lautet:

Die Bewegung eines physikalischen Systems zwischen dem Zeitpunkt t_1 und dem Zeitpunkt t_2 ist derart, daß das Linienintegral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L \tag{3.11.1}$$

ein Extremum für die durchlaufene Bahn ist.
S hat die Dimension Energie×Zeit und heißt *Wirkung.*

3.11.1 Die δ-Notation

Wir schreiben Gleichung (3.10.13)

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\ \frac{\partial y}{\partial \alpha}[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})] \tag{3.10.13}$$

kurz als

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx\ \delta y[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})] \tag{3.11.2}$$

mit der Notation

$$\delta J \equiv \frac{\partial J}{\partial \alpha}\delta\alpha, \quad \delta y \equiv \frac{\partial y}{\partial \alpha}\delta\alpha \tag{3.11.3}$$

Die Bedingung für den Extremwert lautet dann

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} dx\ f\Big(y, y^{'}; x\Big) = 0 \tag{3.11.4}$$

Sind die Integrationsgrenzen x_1 und x_2 fest, folgt aus Gleichung (3.11.4)

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx\ \delta f\Big(y, y^{'}; x\Big) = \int_{x_1}^{x_2} dx\ \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y^{'}\Big) \tag{3.11.5}$$

Weil

$$\delta y^{'} = \delta(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

folgt für die Variation (3.11.5)

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y)\Big)dx$$

Wie vorher integrieren wir den zweiten Term des Integranden partiell und erhalten

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\Big)\delta y\ dx \tag{3.11.6}$$

Weil die Variation δy beliebig ist, liefert die Bedingung (3.11.4), d.h. $\delta J = 0$, sofort die Euler-Gleichung (3.10.14),

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0$$

Das Symbol δ ist nur eine kurze, kompakte Schreibweise der Variationsrechnung, wie sie im Detail in Abschnitt 3.10.2 ausgeführt wurde.

3.11.2 Das Hamilton-Prinzip

Mit der kompakten δ-Notation schreibt sich das Hamilton-Prinzip (3.11.1) kurz als

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t) dt = 0 \tag{3.11.7}$$

Die Bewegung ist derart, daß die Variation des Linienintegrals S für festes t_1 und t_2 verschwindet.

(3.11.7) wird auch als *Prinzip der kleinsten Wirkung* bezeichnet.

3.11.3 Erweiterung des Hamilton-Prinzips auf nichtkonservative Systeme

Sowohl das Hamilton-Prinzip als auch das d'Alembert-Prinzip führen, wie wir gezeigt haben, zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art. Letzteres ist aber allgemeiner, da es auch für nichtkonservative (und nichtholonome) Kräfte gilt.

Gemäß Gleichung (3.6.6) gilt

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \tag{3.11.8}$$

Mit der Rechnung

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{1}{2} \delta (\dot{\vec{r}}_i)^2$$

folgt nach Einsetzen von Gleichung (3.11.8)

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i [\ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{1}{2} \delta (\dot{\vec{r}}_i)^2] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{m_i}{2} \delta (\dot{\vec{r}}_i)^2] \equiv \delta^* W + \delta T \tag{3.11.9}$$

mit

$$\delta^* W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \tag{3.11.10}$$

und

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_i)^2$$

ist die gesamte kinetische Energie des Systems.

δ^* in Gleichung (3.11.10) deutet an, daß es sich im allgemeinen nicht um eine Variation handelt, sondern um die virtuelle Arbeit bei der Verrückung zur Nachbarkurve. $\delta^* W$ bezeichnet die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte und nicht die Variation δW einer Funktion W.

Integrieren wir Gleichung (3.11.9) nach der Zeit, so ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \; (\delta T + \delta^* W) = \sum_{i=1}^{N} m_i [\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i]_{t_1}^{t_2} = 0,$$

weil $\delta\vec{r}_i(t_1) = \delta\vec{r}_i(t_2) = 0$ an den Endpunkten. Wir erhalten dann das *verallgemeinerte Hamilton-Prinzip* zu

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta^* W) dt = 0 \tag{3.11.11}$$

Im Fall von konservativen Kräften ($\vec{F} = -\vec{\nabla} V$) ergibt sich wieder das Hamilton-Prinzip (3.11.7), denn Gleichung (3.11.10) reduziert sich dann auf

$$\delta^* W = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta V,$$

sodaß wir für Gleichung (3.11.11)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta(T - V) = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$

erhalten.

3.11.4 Erweiterung des Hamilton-Prinzips auf nichtholonome Zwangsbedingungen

Nichtholonome Zwangsbedingungen können oft in nicht-integrabler differentieller Form geschrieben werden (siehe Kap. 3.4.4),

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} dq_k + a_j dt = 0, \quad j = 1, ..., m \tag{3.11.12}$$

wobei m die Zahl der Zwangsbedingungen angibt. Betrachtet man virtuelle Verrückungen, d.h. $dt = 0$, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \delta q_k = 0, \quad j = 1, ..., m \tag{3.11.13}$$

Durch Aufsummieren folgt sowohl

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \delta q_k = 0 \tag{3.11.14}$$

als auch

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \delta q_k = 0, \tag{3.11.15}$$

wobei die Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j, $j = 1, 2, ..., m$, unbestimmte Parameter, im allgemeinen Funktionen der Zeit sind.
Da verschwindend, können wir nun Gleichung (3.11.15) oder dessen Zeitintegral

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j a_{ji} \delta q_i\, dt = 0, \tag{3.11.16}$$

zum Hamiltonschen Prinzip (3.11.7),

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} [\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}] \delta q_i \, dt = 0,$$

dazuaddieren und erhalten

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} \Big) \delta q_i \, dt = 0 \tag{3.11.17}$$

Die δq_i sind natürlich noch nicht unabhängig voneinander, sondern durch die m Beziehungen (3.11.13) miteinander verknüpft. Das heißt: während die ersten $n-m$ von ihnen unabhängig voneinander gewählt werden können, sind die letzten m der δq_i dann durch Gleichung (3.11.13) festgelegt. Allerdings bleiben die Werte der Lagrange-Parameter λ_j zu unser freien Verfügung.

Wir wählen die λ_j so, daß

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} = 0, \quad i = n - m + 1, ..., n, \tag{3.11.18}$$

und betrachten diese Gleichungen als die Bewegungsgleichungen für die letzten m Variablen q_i.

Mit den durch (3.11.18) bestimmten λ_j können wir Gleichung (3.11.17) zu

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n-m} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} \Big) \delta q_i \, dt = 0 \tag{3.11.19}$$

reduzieren. Die hierin auftretenden δq_i sind nun unabhängig voneinander und es folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n - m \tag{3.11.20}$$

Kombinieren wir die Gleichungen (3.11.18) und (3.11.20), so erhalten wir den kompletten Satz *Lagrange-Gleichungen für nichtholonome Systeme* zu

$$\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3.11.21}$$

und es gilt weiterhin (3.11.12) als Differentialgleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \dot{q}_k + a_j = 0, \quad j = 1, ..., m \tag{3.11.22}$$

(3.11.21) und (3.11.22) sind $n + m$ Gleichungen für $n + m$ Unbekannte.

Bemerkung 1:

Die Gleichungen (3.11.12) – (3.11.13) schließen auch holonome Zwangsbedingungen

$$G(q_1, ..., q_n, t) = 0$$

mit ein, denn diese können auch differentiell als

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial G}{\partial t} dt = 0$$

geschrieben werden, was mit (3.11.12) identisch ist für

$$a_{jk} = \frac{\partial G}{\partial q_k}, \quad a_j = \frac{\partial G}{\partial t} \tag{3.11.23}$$

Wir können also diese Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren auch für holonome-Zwangsbedingungen verwenden,
(1) wenn es unbequem ist, alle Koordinaten auf unabhängige verallgemeinerte Koordinaten zu transformieren, und/oder
(2) wenn man die Zwangskräfte berechnen will.

Bemerkung 2:
Die Gleichungen (3.11.12) – (3.11.13) schließen nicht alle nichtholonomen Zwangsbedingungen ein, wie z.B. Ungleichungen.

3.11.5 Beispiel: Rollendes Faß

Wir wollen das gerade Erlernte an einem Beispiel demonstrieren. Wir betrachten ein Faß, das ohne Schlupf eine schiefe Ebene hinabrollt (Abb. 3.11).

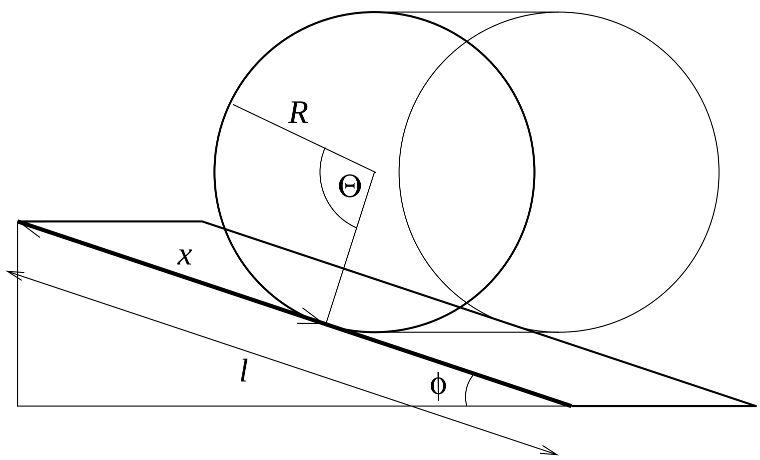

Abb. 3.11: Rollendes Faß ohne Schlupf auf schiefer Ebene.

Die zwei generalisierten Koordinaten sind $(q_1, q_2) = (x, \Theta)$ (siehe Abb. 3.11) und die Zwangsbedingung lautet

$$x = R\Theta. \tag{3.11.24}$$

In holonomer Form entspricht dies $G(x, \Theta) = R\Theta - x$, oder in differentieller Form

$$dx = Rd\Theta$$

In Anlehnung an Gleichung (3.11.23) bestimmen wir aus der Zwangsbedingung die Koeffizienten

$$a_\Theta = \frac{\partial G}{\partial \Theta} = R, \quad a_x = \frac{\partial G}{\partial x} = -1,$$

sodaß Gleichung (3.11.15) in diesem Fall einer einzigen Zwangsbedingung

$$\lambda(-dx + Rd\Theta) = 0 \tag{3.11.25}$$

lautet.
Die kinetische Energie ist die Summe aus der kinetischen Energie der Bewegung des Massenzentrums und der kinetischen Energie der Bewegung um das Massenzentrum:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}R^2\dot{\Theta}^2$$

Die potentielle Energie ist $V = Mg(l-x)\sin\phi$, wobei l die Länge der schiefen Ebene angibt. Die Lagrange-Funktion ist dann durch

$$L = T - V = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}R^2\dot{\Theta}^2 - Mg(l-x)\sin\phi \tag{3.11.26}$$

gegeben.
Die Lagrange-Gleichungen (3.11.21) lauten dann

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda a_x = -\lambda \tag{3.11.27}$$

und

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \lambda a_\Theta = \lambda R \tag{3.11.28}$$

Aus der Lagrange-Funktion (3.11.26) erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Mg\sin\phi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \Theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = MR^2\dot{\Theta}$$

Die Lagrange-Gleichungen (3.11.27) und (3.11.28) lauten dann

$$M\ddot{x} - Mg\sin\phi + \lambda = 0 \tag{3.11.29}$$

und

$$MR^2\ddot{\Theta} - \lambda R = 0 \tag{3.11.30}$$

Wir leiten die Zwangsbedingung (3.11.24) zweimal nach der Zeit ab und erhalten

$$R\ddot{\Theta} = \ddot{x} \tag{3.11.31}$$

und setzen dies in Gleichung (3.11.30) ein. Dann erhalten wir

$$M\ddot{x} = \lambda, \tag{3.11.32}$$

sodaß aus Gleichung (3.11.29) folgt

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\phi}{2}, \quad \text{und } \lambda = \frac{Mg\sin\phi}{2} \tag{3.11.33}$$

Mit Gleichung (3.11.31) ergibt sich dann sofort

$$\ddot{\Theta} = \frac{g\sin\phi}{2R} \tag{3.11.34}$$

Gleichungen (3.11.33) und (3.11.34) lassen sich sofort zweimal über die Zeit integrieren und ergeben die allgemeine Lösung.
Wir erkennen an Gleichung (3.11.33a), daß das Faß die schiefe Ebene nur mit der halben Beschleunigung hinabrollt, die es hätte, wenn es eine reibungslose Ebene hinabglitte. Die Zwangskraft in negative x-Richtung hat die Stärke $\lambda = Mg\sin\phi/2$.

Übungsaufgaben:
A3.11.1) Ein anfänglich ruhender Körper fällt aus einer Höhe von 20 m und erreicht den Erdboden nach 2 Sekunden. Zahlenmäßig wäre die Gleichung zwischen der Fallhöhe s und der Zeit t mit folgenden drei Gesetzen verträglich: $s = g_1 t$, $s = \frac{1}{2}g_2 t^2$, $s = \frac{1}{4}g_3 t^3$ mit $g_1 = 10$ m/s, $g_2 = 10$ m/s^2, $g_3 = 10$ m/s^3. Zeigen Sie, daß daß das richtige Fallgesetz ein Minimum für das Wirkungsintegral des Hamilton-Prinzips ergibt.

3.11.6 Das Wesentliche der Lagrange-Dynamik

1) Die Lagrange-Mechanik ist keine neue Theorie: sie ist völlig äquivalent zur Newton-Mechanik. Nur die Methode ist anders.
2) Newton betont *äußere Einwirkungen* auf einen Körper (wie die Kraft), während bei der Lagrange-Dynamik physikalische Größen betrachtet werden, die mit dem Körper assoziiert sind (kinetische und potentielle Energie). Nirgendwo in der Lagrange-Formulierung geht das Konzept einer Kraft ein. Dies ist besonders wichtig, denn Energien sind Skalare, sodaß die Lagrange-Funktion invariant ist gegen Koordinaten-Transformationen!
3) Bei komplexen mechanischen Problemen ist es oft schwierig, alle Kräfte anzugeben, und leichter, die kinetische und potentielle Energie aller interessierenden Massenpunkte zu berechnen.
4) Die Newton-Mechanik ist die differentielle Formulierung (Änderung; Ableitung) der Mechanik. Das Hamilton-Prinzip ist die integrale Formulierung. Beide Formulierungen sind völlig äquivalent.
5) Nach dem Hamilton-Prinzip richtet die Natur es so ein, daß das Zeitintegral über die Differenz von kinetischer und potentieller Energie minimiert wird. Manche Zeitgenossen bezeichnen dies als: "Natur ist faul."

3.12 Symmetrien und Erhaltungssätze

Erhaltungssätze ermöglichen allgemeine Aussagen über das Verhalten eines physikalischen Problems, ohne die Lösungen der Bewegungsgleichungen mit ihrer Zeitabhängigkeit zu kennen.
Eine Größe F ist Erhaltungsgröße, wenn sie sich nicht mit der Zeit ändert, d.h.

$$\frac{d}{dt}F = 0 \tag{3.12.1}$$

Der Lagrange-Formalismus ermöglich das schnelle Erkennen von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir die Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.7.13):

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, ..., s$$

Falls es eine verallgemeinerte Koordinate q_k gibt, die nicht explizit in der Lagrange-Funktion auftaucht, d.h. $\exists q_k$ mit $(\partial L/\partial q_k) = 0$, dann folgt aus der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) = 0 \tag{3.12.2}$$

und $(\partial L/\partial \dot{q}_k)$ ist Erhaltungsgröße.
Definition 1:

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.12.3}$$

heißt der zur Koordinate q_k *kanonisch konjugierte Impuls*
Definition 2: q_k heißt *zyklische Koordiante*, falls

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{3.12.4}$$

Mit diesen beiden Definitionen folgt der Satz: *Ist q_k zyklisch, so bleibt der dazugehörende kanonisch konjugierte Impuls erhalten.*
Die Definition 1 ist plausibel, wie folgende zwei Beispiele zeigen:
(i) Ist das Potential V geschwindigkeitsunabhängig und q_k repräsentiere die kartesische Koordinate. Dann reduziert sich für einen Massenpunkt m der kanonisch konjugierte Impuls

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2) = m\dot{x}$$

auf die x-Komponente des linearen Impulses.
(ii) Falls bei Polarkoordinaten q_k ein Winkel ist, so erhält man aus $(\partial L/\partial \dot{q}_k)$ einen Drehimpuls.
Erweitert man von der Ortskoordinate x mit dem dazugehörenden kanonisch konjugierten Impuls $(\partial L/\partial \dot{x})$ auf den Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$, so bezeichnet

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}} L = (\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}) \tag{3.12.5}$$

entsprechend den dazugehörigen kanonisch konjugierten Impulsvektor.

3.12.1 Energieerhaltungssatz

Wir beweisen jetzt den Energieerhaltungssatz: *Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie eines physikalischen Systems ist erhalten, falls das System abgeschlossen und das Potential konservativ ist.* Abgeschlossen heißt: Es findet keine Wechselwirkung des Systems mit der Außenwelt statt, sodaß

(1) die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \tag{3.12.6}$$

und

(2) auch (a) die Zwangsbedingungen und (b) das Potential nicht explizit von der Zeit abhängig sind. Bedingung (a) impliziert, daß die Koordinatentransformationsgleichungen (3.6.13) zeitunabhängig sind,

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} = 0\ .$$

Diese Unabhängigkeit von der Zeit wird als *Homogenität der Zeit* bezeichnet.

Wir beweisen den Energieerhaltungssatz in zwei Schritten: zunächst zeigen wir, daß bei Homogenität der Zeit die sogenannte Hamilton-Funktion (siehe Gleichung (3.12.10)) eine Erhaltungsgröße ist. Anschließend zeigen wir, daß bei konservativen Potential, wenn also das Potential geschwindigkeitsunabhängig ist,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

diese Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie des Systems ist. Dann gilt der

Satz: Gelten für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ eines physikalischen Systems die Bedingungen

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0, \tag{3.12.7}$$

so bleibt die Gesamtenergie $E = T + V$ erhalten.

Für den Beweis brauchen wir das *Euler-Theorem* für homogene Funktionen: Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine homogene Funktion m-ten Grades, d.h. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall \vec{x} = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ gilt $f(\lambda\vec{x}) = \lambda^m f(\vec{x})$.

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = m f(\vec{x}) \tag{3.12.8}$$

Beweis: Das totale Differential von $f(\lambda\vec{x}) = \lambda^m f(\vec{x})$ nach λ ergibt mit der Kettenregel

$$\frac{df(\lambda\vec{x})}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)} \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial\lambda} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)} x_i = m\lambda^{m-1} f(\vec{x}), \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\lambda = 1$, so folgt

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = m f(\vec{x})$$

Q.E.D.

Jetzt wenden wir uns dem Beweis des Energiesatzes zu. Wir berechnen die totale zeitliche Ableitung der Lagrange-Funktion $L(q_j, \dot{q}_j, t)$:

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Mit $(\partial L/\partial t) = 0$ folgt unter Verwendung der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{j=1}^{s} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \Big) = \sum_{j=1}^{s} \Big(\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \Big) = \sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \Big)$$

oder

$$0 = \frac{d}{dt} \Big[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \Big], \tag{3.12.9}$$

d.h. die Größe

$$H \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \tag{3.12.10}$$

ist Erhaltungsgröße.

Mit der Definition 1 der kanonisch konjugierten Impulse (3.12.3) können wir diese Erhaltungsgröße auch in der Form

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L \tag{3.12.11}$$

schreiben. H wird als *Hamilton-Funktion* oder *Hamiltonian* des Systems bezeichnet.

Wegen $(\partial V/\partial \dot{q}_j) = 0$ ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \tag{3.12.12}$$

Wegen $(\partial \vec{r}_j/\partial t) = 0$ ist die kinetische Energie T eine homogene Funktion 2.Grades in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ (Beweis siehe Abschnitt 3.8.3, Gleichung 3.8.7)):

$$T(\dot{\vec{q}}) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \tag{3.12.13}$$

sodaß gilt $T(\lambda\dot{\vec{q}}) = \lambda^2 T(\dot{\vec{q}})$, und es folgt aus dem Euler-Theorem (3.12.8):

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \tag{3.12.14}$$

Damit erhalten wir für die Erhaltungsgröße (3.12.10):

$$H = \Big[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \ L\Big] = \Big[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \ L\Big] = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V = E \tag{3.12.15}$$

Wir merken an, daß wir die Beziehung (3.12.14) alternativ auch direkt aus der Darstellung (3.12.13) beweisen können. Aus jener folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_j a_{jl} \dot{q}_j + \sum_k a_{lk} \dot{q}_k$$

Es folgt

$$\sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l = \sum_l \sum_j a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_l \sum_k a_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l = 2T,$$

weil Indizes beliebig numeriert werden können.

3.12.2 Impulssatz, Schwerpunktsystem, Schwerpunktsatz

Wir beweisen jetzt weitere Erhaltungssätze.

Impulssatz: Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ *eines Systems von* N *Massenpunkten bleibt erhalten, wenn die Lagrange-Funktion translationsinvariant ist.*

Translationsinvarianz bedeutet, daß das N-Teilchensystem in eine beliebige Richtung verschoben werden kann, ohne daß sich die Lagrange-Funktion ändert. Es darf daher kein äußeres Potential V geben, deren Gradient $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ eine ortsabhängige Kraft auf das System ausübt und damit den Impuls der Teilchen gemäß $\dot{\vec{p}}_i = -\vec{\nabla}_i V$ verändert. Diese Eigenschaft des Systems wird als *Homogenität des Raums* bezeichnet.

Beweis: Bezeichne δL die Änderung der Lagrange-Funktion bei einer infinitesimalen Verschiebung des Systems um $\delta\vec{r}$. Die Verschiebung entspricht der Transformation $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta\vec{r}$. Die Geschwindigkeitsvektoren ändern sich nicht, weil ihre Richtungen in den Bezugssystemen vor und nach der Koordinatentransformation unverändert bleiben. (Bei Drehungen ist es allerdings anders, siehe Kap. 3.12.3!) Da sich nur die Ortsvektoren ändern, folgt bei Translationsinvarianz ($\delta L = 0$)

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Da $\delta\vec{r} \neq 0$ und beliebig ist, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

Stellt man die Lagrange-Gleichungen für alle Massenpunkte auf und summiert diese über alle i, so folgt

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

Nach Einführung der kanonisch konjugierten Impulsvektoren (3.12.5) der einzelnen Massenpunkte $\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}} i}$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \vec{P} = 0$$

oder

$$\vec{P} = const. \tag{3.12.16}$$

Q.E.D.
Der Gesamtimpuls des Systems bleibt erhalten, was im allgemeinen nicht für die Einzelimpulse gilt.
Bemerkung: Es kann vorkommen, daß die Lagrange-Funktion nur in einer Richtung, z.B. der $\vec{e}_3$-Richtung, translationsinvariant ist. Dann dürfen die infinitesimalen Verschiebungen $\delta\vec{r}$ nur in die $\vec{e}_3$-Richtung vollzogen werden, d.h.

$$\delta L = (0, 0, \delta z) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial y_i}, \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial z_i} \Big) = \delta z \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0$$

Da $\delta z \neq 0$ und beliebig ist, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0, \tag{3.12.17}$$

sodaß nur die z-Komponente des Gesamtimpulses in $\vec{e}_3$-Richtung erhalten bleibt. Die anderen Gesamtimpulskomponenten bleiben jedoch nicht erhalten.
Ein Beispiel dafür ist die schiefe Ebene aus Kap. 3.1.1: der Massenpunkt kann in die y-Richtung, die senkrecht zur Papierebene zeigt, beliebig bewegt werden, ohne Änderung der Lagrange-Funktion. y ist eine zyklische Koordinate und der dazugehörende kanonisch konjugierte Impuls, der in diesem Fall gleich der y-Komponente des Gesamtimpulses ist, bleibt erhalten.
Schwerpunktsatz: Wir untersuchen jetzt die Änderung des Gesamtimpulses eines N-Teilchensystems bei einer Galilei-Transformation in ein anderes Inertialsystem K', das sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{V}$ relativ zum ursprünglichen Koordinatensystem K bewegt (siehe Abbildung 3.12).

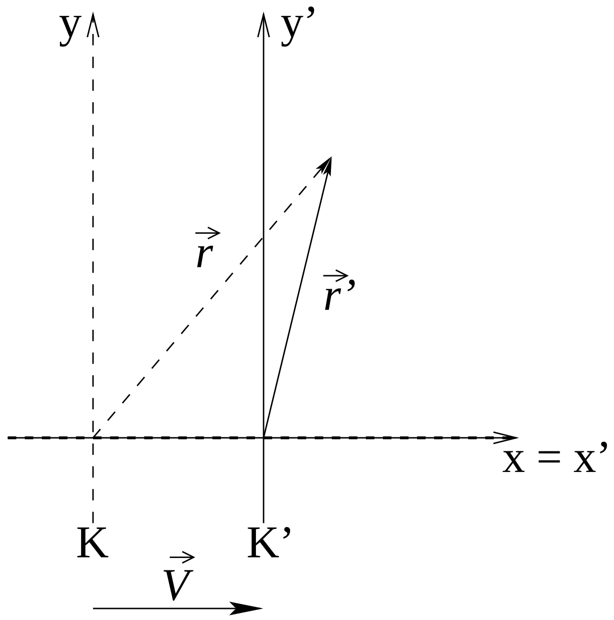

Abb. 3.12: Transformation des Ortsvektors bei Galilei-Transformation.

Für alle Ortsvektoren lauten die Transformationsgleichungen

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,\prime} + \vec{V}t, \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i^{\,\prime} + \vec{V}$$

Für den Gesamtimpuls erhalten wir dann

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,\prime} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V} = \vec{P}' + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V} = \vec{P}' + M\vec{V}, \tag{3.12.18}$$

wobei $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ die Gesamtmasse des Systems ist.
Definition: Das System, in dem der Gesamtimpuls $\vec{P}' = 0$ verschwindet, heißt *Schwerpunktsystem.*
Nach Gleichung (3.12.18) erhält man (wegen $\vec{P}' = 0$) $\vec{P} = M\vec{V}$ oder

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dot{\vec{R}}_0, \tag{3.12.19}$$

wobei $\vec{R}_0$ der Schwerpunktvektor des Systems ist:

$$\vec{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{3.12.20}$$

Aus Gleichung (3.12.19) folgt sofort der
Schwerpunktsatz: Bleibt der Gesamtimpuls $\vec{P}$ eines Systems erhalten, so ist die Schwerpunktgeschwindigkeit $\vec{V}$ ebenfalls eine Erhaltungsgröße. Insbesondere ist dann das Schwerpunktsystem ein Inertialsystem.
Abschließend betrachten wir die Bewegungsgleichung für den Gesamtimpuls bei konservativen Kräften. Die Lagrange-Funktion eines N-Teilchensystems lautet

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - V$$

Für konservative Kräfte ist V eine Funktion der N Ortsvektoren mit der Eigenschaft

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

Aus der Summe der Lagrange-Gleichungen der einzelnen Massenpunkte folgt dann

$$\sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \Big) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \Big] = \sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{d}{dt} (\vec{p}_i) - \vec{F}_i \Big] = \frac{d}{dt} \vec{P} - \vec{F} = 0$$

oder

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}, \tag{3.12.21}$$

das natürlich dem zweiten Newtonschen Axiom für ein N-Teilchensystem entspricht: Die Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äußeren Kräfte.

3.12.3 Drehimpulserhaltung

Drehimpulserhaltungssatz: Bei Systemen, deren Lagrange-Funktion invariant gegenüber Drehungen um ein Zentrum ist, bleibt der Gesamtdrehimpuls bezüglich des Zentrums erhalten.

Diese Rotationsinvarianz wird als *Isotropie des Raums* bezeichnet.

Infinitesimale Drehungen (im Gegensatz zu endlichen Drehungen) lassen sich durch den Vektor

$$\delta \vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r} \tag{3.12.22}$$

darstellen, wobei $|d\vec{\phi}|$ der Wert des infinitesimalen Drehwinkels (siehe Abb. 3.13) ist und $d\vec{\phi}$ in die Richtung der Drehachse zeigt. (Der genaue Beweis folgt aus den Transformationseigenschaften des Vektors.)

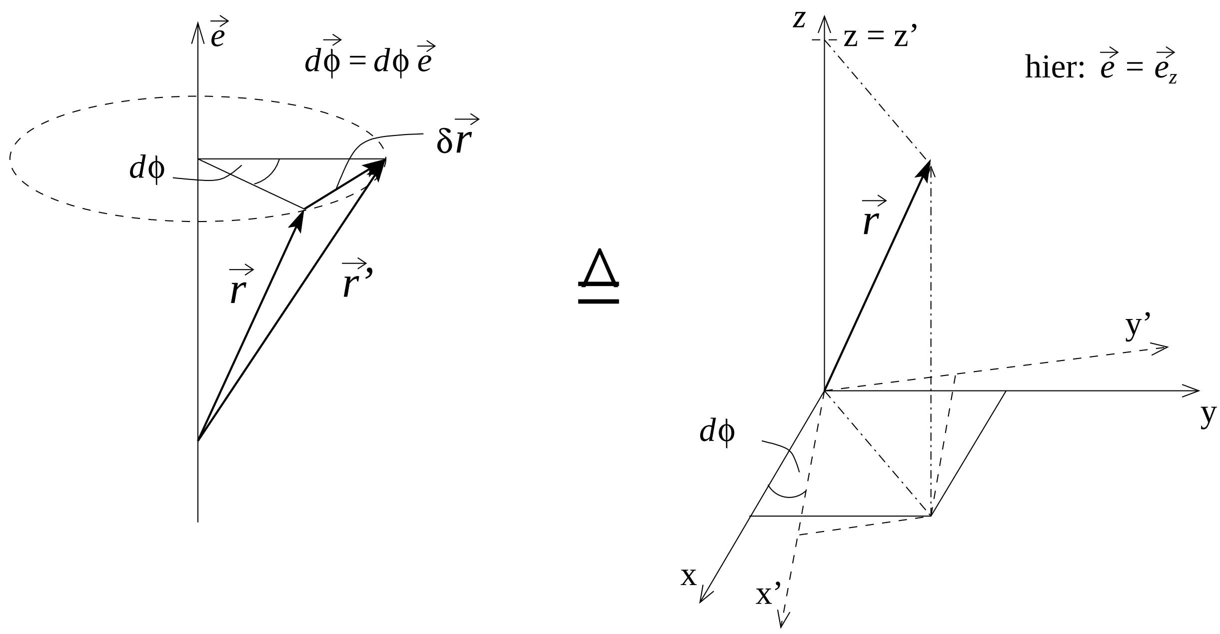

Abb. 3.13: Änderung eines Ortsvektors bei einer infinitesimaler Drehung des Systems.

Wir zeigen zunächst, daß die Drehoperation kommutativ für infinitesimale Änderungen ist. Dazu betrachten wir zwei infinitesimale Rotationen $d\vec{\phi}_1$ und $d\vec{\phi}_2$. Durch die erste Rotation $d\vec{\phi}_1$ ändert sich der Ortsvektor

$$\vec{r} \to \vec{r} + \delta\vec{r}_1 \quad \text{mit } \delta\vec{r}_1 = d\vec{\phi}_1 \times \vec{r}$$

Diesen Vektor drehen wir dann um $d\vec{\phi}_2$ um eine andere Achse, sodaß

$$\delta\vec{r}_2 = d\vec{\phi}_2 \times (\vec{r} + \delta\vec{r}_1)$$

Nach diesen zwei Drehungen erhalten wir den Vektor

$$\vec{r} + \delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r} + [d\vec{\phi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\phi}_2 \times (\vec{r} + \delta\vec{r}_1)]$$

sodaß

$$\delta\vec{r}_{1,2} = d\vec{\phi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\phi}_2 \times \vec{r},$$

wobei wir den Term 2. Ordnung $d\vec{\phi}_2 \times \delta\vec{r}_1$ aufgrund der Annahme infinitesimal kleiner Drehwinkel vernachlässigen können.
Nun vertauschen wir die Reihenfolge der Drehungen 1 und 2 und erhalten ebenso den Vektor

$$\vec{r} + \delta\vec{r}_{2,1} = \vec{r} + [d\vec{\phi}_2 \times \vec{r} + d\vec{\phi}_1 \times (\vec{r} + \delta\vec{r}_2)]$$

mit

$$\delta\vec{r}_{2,1} = d\vec{\phi}_2 \times \vec{r} + d\vec{\phi}_1 \times \vec{r} = \delta\vec{r}_{1,2},$$

womit die Kommutativität der Rotationsvektoren $d\vec{\phi}_1$ und $d\vec{\phi}_2$ bewiesen ist.
Da Gleichung (3.12.22) für die Änderung aller Vektoren gilt, erhalten wir speziell für das Verhalten der Geschwindigkeitsvektoren bei infinitesimalen Rotationen

$$\delta\dot{\vec{r}} = d\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}} \tag{3.12.23}$$

Für die Änderung der Lagrange-Funktion eines N-Teilchensystems bei infinitesimalen Rotationen erhalten wir dann

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta\dot{\vec{r}}_i \Big) = \sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot (d\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (d\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i) \Big] \tag{3.12.24}$$

Mit den konjugierten Impulsen $\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$ und den Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \dot{\vec{p}}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

folgt für Gleichung (3.12.24)

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \Big[\dot{\vec{p}}_i \cdot (d\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i \cdot (d\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i) \Big] \tag{3.12.25}$$

Aufgrund der zyklischen Vertauschbarkeit der Spatprodukte (vgl. Gl. (1.4.2)) folgt

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \Big(d\vec{\phi} \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i) + d\vec{\phi} \cdot (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i) \Big] = d\vec{\phi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = d\vec{\phi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \vec{l}_i, \tag{3.12.26}$$

wobei $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ der Drehimpuls des i-ten Teilchens ist.
Aus der Invarianz der Lagrange-Funktion gegenüber Drehungen $\delta L = 0$ folgt dann

$$0 = \delta L = d\vec{\phi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \vec{l}_i,$$

und weil dies für jede beliebige Drehung $d\vec{\phi}$ gelten muß,

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{L}}. \tag{3.12.27}$$

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i$ ist Erhaltungsgröße. Nur dieser, und nicht die Drehimpulse der einzelnen Massenpunkte, bleibt bei Rotationsinvarianz erhalten.
Damit ist der Drehimpulserhaltungssatz bewiesen.

Übungsaufgaben:

A3.12.1) Beweisen Sie, daß nur eine Gesamtdrehimpulskomponente erhalten bleibt, wenn die Lagrange-Funktion invariant ist gegenüber Drehungen um eine Achse.

3.12.4 Zusammenfassung

Wir haben drei wichtige Beziehungen zwischen den Symmetrieeigenschaften eines abgeschlossenen Systems und der Erhaltung von physikalischen Größen bewiesen, die in Tabelle 3.1 zusammengefaßt sind.

Tabelle 3.1 Symmetrien und Erhaltungssätze

Eigenschaft des Inertialsystems	Lagrange-Funktion	Erhaltungsgröße
Homogenität der Zeit	keine explizite Funktion der Zeit	Hamilton-Funktion (bei konservativen Kraftfeldern gleich Gesamtenergie)
Homogenität des Raums	translationsinvariant	Gesamtimpuls
Isotropie des Raums	rotationsinvariant	Gesamtdrehimpuls

Alle drei Erhaltungssätze lassen sich ebenfalls elegant aus dem Noether-Theorem ableiten.

3.12.5 Noether-Theorem für autonome Systeme

Wie wir gesehen haben, hängt das Auftreten zyklischer Variablen und damit die Existenz von Bewegungsintegralen eng zusammen mit Symmetrien des Systems. Eine solche Symmetrie liegt vor, wenn die Lagrange-Funktion des Systems gegenüber einer Symmetrietransformation der Variablen:

$$\tilde{q}_i = h_i(q_i, \alpha) \tag{3.12.28}$$

invariant ist, wenn also gilt

$$L(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{3.12.29}$$

Dabei ist die Transformation von einem Parameter α abhängig, mit der Bedingung, daß sich für $\alpha = 0$ die identische Transformation ergibt:

$$h_i(q_i, 0) = q_i$$

Bei einer zyklischen Variablen q_k besteht die Symmetrietransformation in einer Verschiebung um α längs der q_k-Achse im Konfigurationsraum:

$$\tilde{q}_k = q_k + \alpha,$$

bei der die Lagrange-Funktion sich natürlich nicht ändert, da sie gar nicht von q_k abhängt.

Im allgemeinen Fall gilt für autonome Systeme, für die also L nicht explizit von der Zeit abhängt, das

Theorem von Emmy Noether: Die Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ sei unter der Transformation $\tilde{q}_i = h_i(\vec{q}, \alpha)$ invariant, wobei α ein kontinuierlicher Parameter und $h_i(\vec{q}, 0) = q_i$ die Identität ist. Es existiert dann ein Bewegungsintegral

$$G(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\frac{d}{d\alpha} h_i(\vec{q}, \alpha)]_{\alpha=0} \tag{3.12.30}$$

Beweis:

Zum einen erfüllen auch die transformierten Bahnen $\tilde{q}_i(t, \alpha) = h_i(q_i(t), \alpha)$ die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\tilde{\vec{q}}(t, \alpha), \dot{\tilde{\vec{q}}}(t, \alpha))}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L(\tilde{\vec{q}}(t, \alpha), \dot{\tilde{\vec{q}}}(t, \alpha))}{\partial q_i} \tag{3.12.31}$$

Andererseits soll nach Voraussetzung L invariant gegenüber Symmetrietransformationen sein, also nicht von α abhängen:

$$\frac{d}{d\alpha} L(\tilde{\vec{q}}(t, \alpha), \dot{\tilde{\vec{q}}}(t, \alpha)) = \frac{d}{d\alpha} L(\vec{q}(t, \alpha), \dot{\vec{q}}(t, \alpha)) = \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{d\alpha} \Big) = 0 \tag{3.12.32}$$

Durch Einsetzen von $(\partial L / \partial q_i)$ aus Gleichung (3.7.13) und $q_i = h_i(\vec{q}, 0) = h_i(\vec{q}, \alpha)_{\alpha=0}$ folgt wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationen nach t und α:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) [\frac{dh_i(\vec{q}, \alpha)}{d\alpha}]_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} [\frac{dh_i(\vec{q}, \alpha)}{d\alpha}]_{\alpha=0} \Big) = \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\frac{dh_i(\vec{q}, \alpha)}{d\alpha}]_{\alpha=0} \Big) = 0 \end{aligned} \tag{3.12.33}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Q.E.D.

Mit dem Noether-Theorem beweisen wir jetzt spezielle Symmetrie-Eigenschaften.

Homogenität des Raumes: Da kein Raumpunkt ausgezeichnet ist, stellt für ein abgeschlossenes System die Verschiebung um a_x in x-Richtung eine Symmetrietransformation dar. Für ein N-Teilchensystem ist

$$\tilde{x}_j = x_j + a_x, \quad j = 1, ..., N$$

Das entsprechende Bewegungsintegral ist nach dem Noether-Theorem (3.12.30)

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} [\frac{d}{da_x}(x_j + a_x)]_{a_x=0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \sum_{j=1}^{N} p_{xj} = P_x, \tag{3.12.34}$$

also die x-Komponente des Gesamtimpulses. Entsprechendes gilt für die y- und die z-Koordinate.

Isotropie des Raumes: Da keine Drehrichtung im Raum ausgezeichnet ist, stellt die Drehung um die z-Achse um α_z für abgeschlossene Systeme eine Symmetrietransformation dar. Die Lagrange-Funktion muß dabei invariant bleiben. Die Koordinaten eines Systems von Massenpunkten ändern sich bei der Drehung in folgender Weise (vergl. Kap. 1.5):

$$\tilde{x}_j = x_j \cos\alpha_z - y_j \sin\alpha_z, \quad \tilde{y}_j = x_j \sin\alpha_z + y_j \cos\alpha_z$$

Das zugehörige Bewegungsintegral ist dann

$$\sum_{j=1}^{N}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\big[\frac{d}{d\alpha_z}(x_j\cos\alpha_z - y_j\sin\alpha_z)\big]_{\alpha_z=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}\big[\frac{d}{d\alpha_z}(x_j\sin\alpha_z + y_j\cos\alpha_z)\big]_{\alpha_z=0}\Big] =$$

$$\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}x_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}y_j\Big) = \sum_{j=1}^{N}(x_j p_{yj} - y_j p_{xj}) = \sum_{j=1}^{N} l_{zj} = \mathcal{L}_z, \tag{3.12.35}$$

also die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses. Entsprechendes gilt für die x- und die y-Komponente.

Wenn das System nicht abgeschlossen ist, kann seine Lagrange-Funktion trotzdem gegenüber einigen dieser Symmetrietransformationen invariant sein und zu den entsprechenden Bewegungsintegralen führen. Als Beispiel diene ein Massenpunkt m im homogenen Schwerefeld mit der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Obwohl dieses System nicht abgeschlossen ist, stellen die Verschiebungen in x- und y-Richtung und die Drehung um die z-Achse Symmetrieoperationen dar. Es bleiben daher p_x, p_y und L_z erhalten.

Das Noether-Theorem wurde hier nur für autonome Systeme und zeitunabhängige Symmetrietransformationen bewiesen. Das Theorem gilt auch für den zeitabhängigen Fall, nimmt dann aber eine wesentlich kompliziertere Gestalt an (Killing-Gleichungen).

Das Theorem von Noether bezieht sich nur auf Transformationen, die über einen Parameter kontinuierlich aus der Identität hervorgehen (siehe (3.12.28) – (3.12.30)). Daneben gibt es auch unstetige Transformationen wie die Raum-, Zeit- und Ladungsspiegelung, denen ebenfalls Erhaltungsgrößen zugeordnet sind (Parität). Sie spielen in der klassischen Mechanik kaum eine Rolle, sind aber von großer Bedeutung in der Quantenmechanik.

3.13 Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Wir wollen nun die Lagrange-Gleichungen auf geschwindigkeitsabhängige Potentiale

$$V^*(q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s, t)$$

erweitern, statt wie bisher konservative Felder mit $(\partial V/\partial \dot{q}_k) = 0$ anzunehmen. Diese Erweiterung ist wichtig für die Behandlung der Lorentz-Kraft (Kap. 3.13.1) und von Reibungskräften (Kap. 3.13.2).

Von dem geschwindigkeitsabhängigen Potential V^* fordert man, daß sich damit die verallgemeinerten Kräfte Q_j (siehe Gleichung (3.7.3)) schreiben lassen als

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V^*}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V^*}{\partial \dot{q}_j} \tag{3.13.1}$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.7.8),

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, ..., s \tag{3.7.8}$$

ein, so folgt

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial V^*}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial V^*}{\partial q_j}$$

oder

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial (T - V^*)}{\partial \dot{q}_j}] - \frac{\partial (T - V^*)}{\partial q_j} = 0,$$

sodaß mit

$$L = T - V^* \tag{3.13.2}$$

wieder

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, ..., s \tag{3.13.3}$$

die Lagrange-Gleichungen 2. Art resultieren, die somit auch für Kräfte gültig sind, die sich gemäß Gleichung (3.13.1) aus einem geschwindigkeitsabhängigen Potential ableiten lassen. Diese Erweiterung ist sinnvoll, wie das Beispiel der Lorentz-Kraft zeigt.

3.13.1 Beispiel: Lorentz-Kraft

Auf ein Teilchen der Ladung e im elektromagnetischen Feld wirkt die sogenannte Lorentzkraft (im Gaußschen Maßsystem)

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \tag{3.13.4}$$

wobei $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke, $\vec{B}$ die magnetische Feldstärke, $\vec{v}$ die Teilchengeschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit darstellen. In der Vorlesung Elektrodynamik wird gezeigt werden, daß sich die Feldstärken

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.13.5}$$

aus einem skalaren Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ und einem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ableiten lassen. Setzt man die Gleichungen (3.13.5) in Gleichung (3.13.4) ein, so folgt für die Lorentzkraft

$$\vec{F} = e\Big(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Big) \tag{3.13.6}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, betrachten wir die x-Komponente des letzten Terms:

$$T_3 = [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_x = v_y(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) - v_z(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) = v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

Nun addieren wir

$$0 = v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

und erhalten mit

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z})$$

daß

$$T_3 = v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Damit erhalten wir nach (3.13.6) für die x-Komponente der Lorentzkraft

$$F_x/e = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt}$$

Weil $\vec{A}(\vec{r}, t)$ nicht von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ abhängt, gilt

$$A_x = \frac{\partial}{\partial v_x}(A_x v_x) = \frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{A}\cdot\vec{v}),$$

sodaß

$$F_x/e = -\frac{\partial}{\partial x}[\Phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}] - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{A}\cdot\vec{v})\Big) \tag{3.13.7}$$

Da das skalare Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ ebenfalls nicht von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ abhängt, dürfen wir schreiben

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_x} \tag{3.13.8}$$

mit dem generalisierten Potential

$$U \equiv e\Phi - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} \tag{3.13.9}$$

Entsprechendes gilt für die y- und z-Komponente der Lorentzkraft, d.h.

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_z},$$

sodaß allgemein

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} U + \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_{\vec{v}} U) \tag{3.13.10}$$

Die Gleichungen (3.13.8) und (3.13.10) erfüllen genau die in Gleichung (3.13.1) gestellten Anforderungen an das verallgemeinerte Potential V^*.
Für die Lagrange-Funktion (3.13.2) folgt mit $V^* = U$:

$$L = T - \; e\Phi + \; \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} \tag{3.13.11}$$

Für den zu q_k kanonisch konjugierten Impuls erhalten wir dann

$$\hat{p}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \; \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.13.12}$$

Liegen keine Zwangsbedingungen vor, so sind die verallgemeinerten Koordinaten q_k gleich den natürlichen Koordinaten x_k. Es gilt dann für den zu x_k kanonisch konjugierten Impuls

$$\hat{p}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} + \; \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{x}_k} = p_k + \; \frac{e}{c}A_k \tag{3.13.13}$$

wobei p_k der lineare Impuls ist. Also ist der kanonische konjugierte Gesamtimpuls des Teilchens

$$\hat{\vec{p}} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \tag{3.13.14}$$

d.h. ein Teilchen im Magnetfeld ändert seinen Impuls um $\frac{e}{c}\vec{A}$. Dies ist ein Beispiel dafür, daß der kanonisch konjugierte Impuls bei geschwindigkeitsabhängigem Potential nicht mit dem mechanischen Linearimpuls übereinstimmt.

3.13.2 Reibungskräfte und Dissipationsfunktion

Reibungskräfte haben wir bereits in Kap. 2.5.1 kennengelernt.
Wir beginnen die Diskussion wieder bei Gleichung (3.7.8),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \; \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, ..., s \tag{3.7.8}$$

Nun spalten wir die verallgemeinerte Kraft

$$Q_j = Q_j^{(k)} + Q_j^{(r)} \tag{3.13.15}$$

in einen konservativen Anteil $Q_j^{(k)}$ und die verallgemeinerten Reibungskraft $Q_j^{(r)}$ auf. Der konservative Anteil

$$Q_j^{(k)} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

läßt sich aus einem Potential ableiten. Für die verallgemeinerte Reibungskraft erhalten wir gemäß Gleichung (3.7.3)

$$Q_j^{(r)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(r)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{3.13.16}$$

und können diese aus den Reibungskräften $\vec{F}_i^{(r)}$ in natürlichen Koordinaten berechnen. Mit der Lagrange-Funktion $L = T - V$ folgt dann für (3.7.8)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(r)}, \quad j = 1, ..., s \tag{3.13.17}$$

Damit kann man prinzipiell die Bewegungsgleichungen bestimmen; allerdings ist die Berechnung der verallgemeinerten Reibungskräfte oft aufwendig.
Verwenden wir den allgemeinen Ansatz (2.5.1),

$$\vec{F}_i^{(r)} = -K_i(v_i)\frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, ..., N. \tag{3.13.18}$$

dann folgt für (3.13.16)

$$Q_j^{(r)} = -\sum_{i=1}^{N} K_i(v_i)\frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Mit der Hilfsformel (3.6.15),

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

folgt

$$Q_j^{(r)} = -\sum_{i=1}^{N} K_i(v_i)\frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Es ist

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2}\frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j},$$

sodaß

$$Q_j^{(r)} = -\sum_{i=1}^{N} K_i(v_i)\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{3.13.19}$$

Trick: Sei F die Stammfunktion von f, also

$$\int_0^{a(x)} dy\, f(y) = F(a(x)) - F(0)$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dx}\int_0^{a(x)} dy\, f(y) = \frac{d}{dx}[F(a(x)) - F(0)] = f(a(x))\frac{da(x)}{dx} \tag{3.13.20}$$

Wenden wir diesen Trick auf Gleichung (3.13.19) an, dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\int_0^{v_i} d\tilde{v}_i\, K_i(\tilde{v}_i) = K_i(v_i)\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}$$

und wir erhalten

$$Q_j^{(r)} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{i=1}^{N}\int_0^{v_i} d\tilde{v}_i\, K_i(\tilde{v}_i) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \tag{3.13.21}$$

mit der *Dissipationsfunktion*

$$D \equiv \sum_{i=1}^{N}\int_0^{v_i} d\tilde{v}_i\, K_i(\tilde{v}_i) \tag{3.13.22}$$

Damit wird dann aus (3.13.17)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0, \qquad j = 1, ..., s \tag{3.13.23}$$

Beispiel: Im Fall der Stokesschen Reibung (2.5.2), $\vec{F}_i^{(r)} = -K_i\vec{v}_i$, ist $K_i(v_i) = K_i v_i$, sodaß nach Gleichung (3.13.22)

$$D = \sum_{i=1}^{N} K_i \int_0^{v_i} d\tilde{v}_i\, \tilde{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} K_i v_i^2 \tag{3.13.24}$$

Diese spezielle Dissipationsfunktion wird als *Rayleighsche Dissipationsfunktion* bezeichnet. Die vom System gegen die Reibung geleistete Arbeit ist

$$dW = -\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(r)}\cdot d\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(r)}\cdot \vec{v}_i dt = \sum_{i=1}^{N} K_i v_i^2 dt = 2D\, dt, \tag{3.13.25}$$

d.h. die Leistung $(dW/dt) = 2D$ ist gleich dem doppelten Wert der Dissipationsfunktion. Da diese Energie in Wärme umgewandelt wird und dem System dadurch verloren geht, spricht man von Energiedissipation, was auch die Namensgebung für die Funktion D rechtfertigt.

3.14. Der Virialsatz

Der Virialsatz ist oft sehr hilfreich, um das zeitliche Mittel einer physikalischen Größe $S(t)$ zu berechnen.

Definition: Der Mittelwert (oder Erwartungswert) einer zeitlich veränderlichen physikalischen Größe wird durch

$$< W(t) >= \overline{W} \equiv \frac{1}{\tau}\int_0^\tau W(t)dt \tag{3.14.1}$$

definiert, wobei τ ein zu wählendes Zeitintervall kennzeichnet.
Für ein System von N-Massenpunkten in einem begrenzten Volumen, die sich mit endlicher Geschwindigkeit bewegen (d.h. die Werte r_i und p_i sind begrenzt), betrachten wir die Größe

$$S \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \tag{3.14.2}$$

Dann gilt

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \tag{3.14.3}$$

Mit $\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i$ folgt für den 2.Term:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\dot{r}_i^2 = 2T;$$

mit $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$ folgt für den 1.Term:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i,$$

sodaß sich für Gleichung (3.14.3) ergibt:

$$\frac{dS}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \tag{3.14.4}$$

Wir mitteln nun diesen Ausdruck gemäß der Vorschrift (3.14.1) und erhalten

$$\overline{2T} + \overline{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} =< \frac{dS}{dt} >= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dS(t)}{dt}dt = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} \tag{3.14.5}$$

Im Grenzfall $\tau \to \infty$ gilt wegen der angenommenen Beschränktheit von S:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} = 0,$$

sodaß wir den Virial-Satz erhalten

$$< T >= -\frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} \tag{3.14.6}$$

Dieser erweist sich als sehr nützlich in der kinetischen Theorie der Gase.
Wir nehmen jetzt zwei zusätzliche Bedingungen für die Kraft $\vec{F}_i$ an:
(a) Die Kraft ist konservativ: $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$.
(b) Das Potential ist eine homogene Funktion vom Grad k, d.h. $V(\lambda x) = \lambda^k V(x)$.

Dann gilt das Euler-Theorem (3.12.8):

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{\nabla}_i V) \cdot \vec{r}_i = kV \tag{3.14.7}$$

Mit Bedingung (a) und (3.14.7) erhalten wir für den Virialsatz (3.14.6)

$$< T >= \frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^{N}(\vec{\nabla}_i V) \cdot \vec{r}_i} = \frac{k}{2} < V > \tag{3.14.8}$$

und für die Gesamtenergie folgt

$$E =< T > + < V >= \frac{k+2}{2} < V >= \frac{k+2}{k} < T > \tag{3.14.9}$$

Betrachten wir als Beispiel den harmonischen Oszillator (Kap. 2.4.4) mit dem Potential $V = ar^2$, d.h. vom Grad $k = 2$. In diesem Fall ist $< T >=< V >$ und $E = 2 < V >= 2 < T >$.

Im Beispiel des Gravitationspotentials $V = -b/r$, d.h. vom Grad $k = -1$, ist $< T >= -\frac{1}{2} < V >$ und $E = -\frac{1}{2} < V > + < V >= - < b/2r > < 0$.