2. Newtonsche Mechanik

Die klassische Mechanik stellt zugleich den Beginn und die Grundlage nicht nur der heutigen Physik, sondern in hohem Maße der modernen Naturwissenschaft überhaupt dar. Begründet wird sie durch ein Buch, das durch seine Folgen die Welt wohl stärker verändert hat als das Neue Testament, der Koran oder das Kapital von Marx. Dieses Buch erschien 1687 in Cambridge, England:
Isaac Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica
Um die Bedeutung dieser Neuerung einzuschätzen, ist es sinnvoll, sich mit den vorhergehenden Anschauungen zu beschäftigen.

2.1 Das Physikalische Weltbild vor und nach Newton *

Das ursprüngliche Weltbild ist in allen Kulturen ein magisch-religiöses. Die Vorgänge in der Natur, also in der den Menschen umgebenden Welt, werden gedeutet als Folgen bewußter Handlungen übernatürlicher Wesen: Götter, Geister, Dämonen. Die "Wissenden" sind daher Priester, auch wenn die Naturbeobachtung, wie in Babylon, schon quantitativ ist. Raum und Zeit haben eine absolute Bedeutung. Die Welt ist flach und begrenzt. Das Zentrum der eigenen Kultur ist zugleich auch das der Welt, sei es nun Ägypten, Babylon, Rom oder China (das "Reich der Mitte"). Darüber wölbt sich die recht flache Scheibe des Himmels, die am Weltrand aufliegt. Quantitative Angaben, soweit sie überhaupt gemacht werden, sind rein spekulativ. Der Raum ist also inhomogen, zugleich aber auch anisotrop: "oben" und "unten" sind absolute Kategorien. Auch die Zeit ist im allgemeinen absolut und inhomogen: sie hat einen Anfang und ein Ende.
Zu einem völligen Umbruch, der einen fast an das Auftreten einer neuen Menschenart glauben lassen könnte, und damit zum Beginn dessen, was wir heute Naturwissenschaft nennen, kommt es um das Jahr 700 vor Christus herum mit dem Auftreten der griechischen Naturphilosophen, die eine ganz neue Haltung gegenüber der Welt einnehmen. Bezeichnenderweise sind sie keine Priester, sondern praktisch tätige, weitgereiste und weitgehend vorurteilsfreie Männer. Sie stellen sich bewußt als Subjekt der Natur als Objekt gegenüber, betrachten die Welt gewissermaßen von außen. Das Naturgeschehen ist für sie nicht eine Folge willkürlicher Akte übernatürlicher Wesen, sondern von inneren Gesetzmäßigkeiten beherrscht, die der Mensch mit seiner Vernunft erkennen kann. Ihr Weltbild ist also rational, aber anders als unser heutiges nicht kausal, sondern final, teleologisch. Das Weltgeschehen hat für sie einen Zweck, einen Sinn. Es wird beherrscht durch universelle Entwicklungs- und Ordnungsprinzipien ("Kosmos").
Zusammengefaßt und in einem gewissen Sinn abgeschlossen wird diese idealistische Natur-

* *Dieser Abschnitt ist der Vorlesung meines verehrten Lehrers Prof. Dr. Dieter Schlüter, Universität Kiel, entnommen.*

philosophie durch das Werk von Aristoteles, dessen Weltbild erst durch das von Newton begründete abgelöst wurde. Danach ist die Welt im wesentlichen kugelförmig, hat ein Zentrum und eine äußere Berandung, die Fixsternsphäre. Außerhalb ihrer befindet sich nichts, auch kein leerer Raum, der als denkunmöglich angesehen wird. Der Raum ist also nach wie vor inhomogen und anisotrop. Es gibt eine Vorzugsrichtung, hin zum Weltmittelpunkt, aber um diese Welt herum ist die Welt im wesentlichen isotrop. Die Begriffe "oben" und "unten" sind also relativ. Das Universum war schon immer und wird immer sein. Die Zeit hat weder einen Anfang noch ein Ende, sie ist absolut, aber homogen.
Die Welt zerfällt in zwei Teile, den irdischen und den himmlischen, die aber beide rational betrachtet werden. Die quantitative Beschreibung von Bewegungen in Raum und Zeit (Kinematik) ist für beide die gleiche, insbesondere gelten auch im himmlischen Bereich die Gesetze der Geometrie, verschieden ist die Erklärung der Ursachen der Bewegung (Dynamik). Im heutigen Verständnis bilden Kinematik und Dynamik zusammen die Mechanik, für Aristoteles bleiben sie getrennt. Wegen ihres quantitativen geometrischen Charakters zählt für ihn – und bis in die Zeit von Kepler – die Kinematik zur Mathematik, die nicht-quantitative Dynamik und die damit zusammenhängende Struktur der Materie zur Physik.

Diese Struktur ist nun in beiden Teilen der Welt wesentlich verschieden. Die irdische Materie ist aus vier Elementen (Erde, Wasser, Luft, Feuer) aufgebaut und hat, je nach ihrer Zusammensetzung, Anteil an deren Eigenschaften. Sie ist zum Beispiel absolut schwer oder leicht, dabei ist "leicht" nicht ein geringerer Grad von "schwer", sondern ihm entgegengesetzt. Es gibt keine Bewegung ohne Beweger. Schwere Körper streben auf Grund einer inneren oder "lebendigen" Kraft zum Weltmittelpunkt. Ihre freie Bewegung ist also stets abwärts gerichtet, sie suchen dort ihren "natürlichen Ort". Sie fallen umso schneller, je schwerer sie sind. Umgekehrt strebt absolut leichte Materie stets aufwärts und steigt äußerstenfalls bis zur inneren Begrenzung des Himmels, der Sphäre des Mondes, auf. Jede seitliche Bewegung eines Körpers muß dagegen erzwungen werden durch eine äußere oder "tote" Kraft und hört ohne Antrieb auf. Die irdische oder sublunare Welt ist unvollkommen und ständigem Wandel unterworfen. Im Gegensatz dazu besteht die himmlische Materie aus dem fünften Grundstoff, der schwerelosen "quinta essentia". Sie ist vollkommen und unwandelbar. Das gleiche gilt von ihrer Bewegung. Diese erfolgt daher gleichmäßig in Kreisen und auf Kugelschalen um den Weltmittelpunkt herum.
Die Erde ist kugelförmig und, wie Aristoteles sagt, "nicht sehr groß". Eratosthenes hat auf geistreiche Weise (Brunnen von Syene) ihren Umfang zu 252000 Stadien gemessen. Da die Länge eines Stadions nicht einheitlich festgelegt war, kann man bei entsprechender Auswahl zu einem Wert des Erdumfangs von 39690 km kommen, der fast exakt mit dem modernen Wert von 40075 km übereinstimmt, realistisch dürfte eine Genauigkeit von etwa zehn Prozent sein. Keine andere Kultur unabhängig von der griechischen ist zu dieser umwälzenden Erkenntnis fähig gewesen. Da der Erdkörper aus schwerer Materie besteht,

fällt sein Mittelpunkt mit dem der Welt zusammen, nicht umgekehrt! Die Himmelskörper sind ebenfalls Kugeln mit meßbaren Radien. Die Phasen des Mondes und Mond- und Sonnenfinsternisse werden geometrisch als Beleuchtungs- und Schatteneffekte gedeutet und zur Bestimmung von Radien und Entfernungen benutzt, wiederum eine einzig darstehende Leistung der Griechen. Wegen der unzureichenden Meßgenauigkeit werden allerdings Radius und Entfernung der Sonne und damit die Dimension des Sonnensystems um einen Faktor 25 unterschätzt.

Zur Physik des Aristoteles gibt es in der griechischen Naturphilosophie durchaus Gegenmeinungen. Nach Demokrit ist alle Materie aus verschiedenen Arten von nicht weiter zerlegbaren Teilchen, den Atomen, aufgebaut, die sich ziellos im unbegrenzten leeren Raum bewegen und bei Zusammenstößen wechselwirken. Das Naturgeschehen verläuft also kausal, nicht final. Dieses rational-materialistische Weltbild steht im scharfen Gegensatz zu dem rational-idealistischen des Aristoteles und gilt sogar bei den sehr freigeistigen Griechen als atheistisch. Ebenfalls im Gegensatz zu Aristoteles steht die viel später von Kopernikus wieder aufgenommene Lehre des Aristarch von Samos, daß sich die Erde bewegt. Da diese konkurrierenden Auffassungen rein spekulativ sind und keine Stütze in damals bekannten Naturerscheinungen finden, bleiben sie in einer Außenseiterrolle. Das ist nicht der Fall mit den kinematischen Theorien von Hipparch und Ptolemäus. Die sehr genauen astronomischen Beobachtungen zeigen, daß die Bewegung der Himmelskörper, speziell der Sonne, um die Erde und damit um den Weltmittelpunkt herum keine gleichförmige Kreisbewegung sein kann. Um die Beobachtungen darzustellen, "die Phänomene zu retten", werden exzentrische Kreise und Bewegungsmittelpunkte oder Epizykel verwendet, was notwendigerweise die Veränderung des Abstandes vom Weltmittelpunkt zur Folge hat. Dieser Widerspruch zur Theorie des Aristoteles wird zwar gesehen, aber nicht ernst genommen, da man die Bahnen ohnehin nur als mathematische Konstruktionen betrachtet. Ihren Höhepunkt erreicht diese Kinematik der Himmelskörper um das Jahr 150 herum im zusammenfassenden Werk "matematike syntaxis" des Ptolemäus, woraus die Zeitgenossen zunächst "megale syntaxis", dann sogar "megiste sytaxis" machen. Bei der Übersetzung ins Arabische wird daraus "al magisti" und schließlich bei der Übertragung ins Lateinische "almagestum".

Zwischen der "syntaxis" und dem Almagest liegt ein Jahrtausend ohne nennenswerten Fortschritt. Das ist im wesentlichen darauf zurückzuführen, daß sich im niedergehenden römischen Reich etwa ab dem Jahr 300 eine weltabgewandte, wissenschaftsfeindliche und extrem intolerante Ideologie durchsetzt und im Jahr 394 zur Staatsreligion wird: das fundamentalistische Christentum. Für die geistigen Führer dieser Bewegung, die Kirchenväter, insbesondere Lactantius, Augustinus und Hieronymus, handelt es sich bei der griechischen Naturwissenschaft um die "törichte Weisheit der heidnischen Philosophen", die sowohl dem gesunden Menschenverstand, als auch, und das ist entscheidend, der "Heiligen Schrift" widerspricht. Insbesondere können sie sich nicht von der Vorstellung eines absoluten "oben" und "unten" lösen. Sie stellen dem ein eigenes Weltbild entgegen, das aus Bibelstellen begründet wird und seine Zusammenfassung um 500 herum in der "Topographia Christiana", der christlichen Weltbeschreibung des Cosmas Indicopleustes, findet. Danach ist die Erde flach und viereckig. Die Welt ähnelt einer Truhe, deren gewölbter Deckel einerseits die "Wasser über der Feste" enthält und andererseits den Wohnsitz der himmlischen Heerscharen bildet. Sonne, Mond und Sterne werden von Engeln herumgetragen, und das Dunkel der Nacht entsteht dadurch, daß die Sonne sich hinter einem hohen Berg im Norden befindet. Es handelt sich also um eine primitive Version des tausend Jahre älteren babylonischen Weltbildes. Gleichzeitig wird, besonders im weströmischen Reich, die philosophische und wissenschaftliche Literatur der Antike bis auf ein paar Werke lateinischer Kompilatoren fast vollständig vernichtet. Es beginnt im Jahr 391 mit der Niederbrennung des Museion, der weltberühmten Bibliothek von Alexandria, an der unter anderen Eratosthenes und Ptolemäus gewirkt haben, und führt dazu, daß um das Jahr 700 im gesamten Abendland weder die Werke von Aristoteles und Ptolemäus noch die von Euklid und Apollonius oder Hippokrates und Galenus mehr zu finden sind.

Daß das Erbe der antiken Kultur nicht unwiederbringlich verloren ist, verdanken wir dem Auftreten einer konkurrierenden Ideologie, des Islam, der zwar ähnlich intolerant, aber nicht in gleichem Maße mystisch-irrational eingestellt ist. Ab dem Jahr 700 beginnen die Kalifen Al Mansur, Harun al Raschid und Al Mamun in Belgrad mit dem systematischen Sammeln aller Reste der griechischen Wissenschaft; dabei wird insbesondere der Almagest auf dem Umweg über das Syrische ins Arabische übersetzt und intensiv studiert.

Ab der Mitte des 10. Jahrhunderts setzt sich auch im Abendland durch den Kontakt mit der arabischen Welt die Lehre von der Kugelgestalt der Erde wieder durch, und von 1100 bis 1300 werden die Werke von Aristoteles, Euklid und Ptolemäus neben vielen anderen aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Es kommt zu einer Wiedergeburt – "Renaissance" – der antiken Kultur. Auf die Herabwürdigung folgt eine kritiklose Überschätzung insbesondere der Schriften des Aristoteles, zunächst der über die Logik, dann der über Naturphilosophie. "Der Philosoph" wird zur unumstrittenen Autorität in allen außer Glaubensfragen. Sein Weltbild wird nur insofern modifiziert, als jetzt außerhalb der Fixsternsphäre der Wohnsitz Gottes und der Engel, innerhalb der Erde die Hölle angesiedelt wird.

In den folgenden zwei Jahrhunderten kommt es aber auch gerade durch die Beschäftigung mit der aristotelischen Logik zur Kritik an den Einzelheiten seiner Naturphilosophie. Nikolaus von Kues erörtert z.B. spekulativ-philosophisch die Möglichkeit eines unendlich ausgedehnten Raumes ohne Mittelpunkt und Berandung. Im besonderen ist Gegenstand der Kritik aber die Lehre von der Wurfbewegung, die schon im Altertum als nicht sehr überzeugend angesehen wurde. Dazu trägt unter anderem auch die Entwicklung der Artillerie nach der Erfindung des Schießpulvers bei. Im 17. Jahrhundert wird schließlich die These von der Unmöglichkeit eines leeren Raumes ("horror vacui") von Torricelli und von Guericke widerlegt, was zur Neubewertung des Atomismus führt.

Noch wichtiger sind die Entwicklungen in der Kinematik der Himmelskörper. Um 1500 greift Kopernikus die Lehre von der Bewegung der Erde wieder auf, nimmt die Sonne als im Weltzentrum befindlich an und ersetzt die Rotation der Fixsternsphäre durch die der Erde. Obwohl das neue Weltbild dem alten kinematisch fast völlig äquivalent ist und auch für die Positionsberechnungen keine wesentliche Verbesserung darstellt, sind seine dynamischen Konsequenzen revolutionär. Die Erde verliert ihre Sonderstellung und wird ein Planet unter anderen. Die Fixsterne müssen nicht mehr von einer Sphäre getragen werden und brauchen daher auch nicht im gleichen Abstand zum Mittelpunkt zu stehen, sondern können im Raum verteilt sein. Im noch stärkeren Gegensatz zum antiken Weltbild stehen die Keplerschen Gesetze, wonach die relativen Bewegungen der Himmelskörper nicht aus gleichförmigen Kreisbewegungen, sondern aus ungleichförmig durchlaufenen Ellipsen zusammengesetzt sind. Gleichzeitig, also zu Beginn des 17. Jahrhunderts, widerlegt Galilei sowohl durch seine quantitativen Fallversuche als auch durch seine Beobachtungen mit dem Teleskop (Berge auf dem Mond) das Dogma vom grundsätzlichen Unterschied zwischen himmlischer und irdischer Materie. Er gibt auch die Trennung zwischen Kinematik und Dynamik auf: "Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben".

Die Kirche fühlt, durchaus nicht ohne Grund, die Basis ihrer Anschauungen bedroht und versucht mit Hilfe der Inquisition die neuen Erkenntnisse zu unterdrücken, aber erfolglos. Schon 12 Jahre nach dem Prozeß gegen Galilei (1633) kommt es in London zur Gründung einer Vorläuferin der späteren Royal Society. Hier nimmt auch die Trennung der beiden Kulturen, wie C. P. Snow sie später genannt hat, – nämlich der literarisch-philosophischen und der naturwissenschaftlich-technischen – ihren Anfang, denn das Programm der Royal Society ist: "To improve the knowledge of natural things, and all useful Arts, Manufactures, Mechanick Practices, Engynes and Inventions by Experiments (not meddling with Divinity, Metaphysics, Moralls, Politicks, Grammar, Rhetorick or Logicks)". Im Jahr 1672 wird der 1642 – also im Todesjahr Galileis – geborene Isaac Newton Fellow und 1703 Präsident dieser Gesellschaft. Ihr langjähriger Sekretär Edmund Halley bringt ihn mit vieler Mühe 1687 dazu, die "Principia" auf Kosten der Gesellschaft zu veröffentlichen. Die Wirkung auf seine Zeitgenossen geben die Verse von Alexander Pope wieder:

"Nature and Nature's Laws, Lay hid in Night, God said: Let Newton be!, And all was Light."

Damit ist das neue Weltbild weitgehend vollendet und bildet eine Grundlage des folgenden Jahrhunderts der Aufklärung. Auf dem Kontinent werden Newtons Arbeiten nach 1738 populär durch die "Elemens de la philosophie de Newton" von Voltaire und Emilie du Chatelet, die später auch die "Principia" ins Französische übersetzt. Es folgt, hauptsächlich in Frankreich und der Schweiz, eine stürmische Entwicklung der theoretischen Mechanik und ihrer analytischen Grundlagen durch eine Reihe genialer Mathematiker: die Bernoullis, Leibniz, Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Legrendre. Sie tragen wesentlich zur Entwicklung eines mechanistisch-rationalistischen Weltbildes bei, einer der Grundlagen der französischen Revolution. Zu einer kurzlebigen Gegenreaktion kommt es um 1800 mit

der "romantischen Physik", der spekulativen Naturphilosophie der Vertreter des deutschen Idealismus, insbesondere Hegel, die aber eher ein Kuriosum bleibt. Gleichzeitig wird die analytische Mechanik weiterentwickelt durch Gauß, Jacobi und Hamilton und erreicht einen gewissen Abschluß um 1900 herum mit den Arbeiten von Poincare, die schon in Verbindung mit der speziellen Relativitätstheorie einerseits und dem Stabilitätsverhalten nichtlinearer Systeme (Chaos-Theorie) andererseits stehen.
Die wissenschaftliche Methode Newtons, die bis heute die der Naturwissenschaft geblieben ist, unterscheidet sich grundlegend von der der idealistischen Naturphilosophie, sowohl seines Vorgängers Aristoteles, als auch seines Zeitgenossen Descartes und seines Nachfolgers Hegel. Während diese der Meinung waren, daß die Naturgesetze durch reines Denken aus allgemeinen metaphysischen Grundsätzen logisch ableiten zu können, ist für Newton die Erfahrung, sowohl die zufällige, als auch die durch systematische Experimente gewonnene, die einzige Quelle naturwissenschaftlicher Erkenntnisse. Eine Erklärung aus philosophischen Prinzipien lehnt er ab: "Hypotheses non fingo". Seine induktive-deduktive Methode besteht darin, zunächst aus gesammelten Erfahrungen induktiv auf Gesetzmäßigkeiten zu schließen. Aus ihrer Annahme werden dann weitere Phänomene vorhergesagt und die Theorie im Experiment überprüft. Bei einer Falsifikation muß sie aufgegeben oder modifiziert werden.
Gegenstand der Physik sind ausschließlich Erscheinungen, die sich zumindest prinzipiell messen lassen. Physikalische Größen werden durch Meßprozesse definiert, nicht verbal ("Wortgeklingel"), wie etwa in der Naturphilosophie von Hegel und Schelling. Da die Erfahrungen als Ergebnisse von Messungen in der Regel als Zahlen vorliegen, sind die Gesetzmäßigkeiten in der physikalischen Theorie notwendig mathematische Beziehungen, aus denen ebenfalls quantitative Vorhersagen abgeleitet werden. Die Welt der Erfahrungen wird so auf eine mathematische Modellwelt abgebildet, an die als einzige Bedingung die der logischen Konsistenz gestellt wird. Sie braucht nicht "höhere Prinzipien" oder dem "gesunden Menschenverstand" zu genügen, sofern sie nur in der Lage ist, die Gesamtheit der Erfahrungen im Rahmen der Meßgenauigkeit zu reproduzieren.

2.2 Die Newtonschen Axiome

Für Newton bilden Kinematik und Dynamik – im Gegensatz zu Aristoteles, aber in Übereinstimmung mit Galilei – eine Einheit: die quantitative, also mathematisierte, Mechanik. Er baut sie nach dem Muster der "Elemente" des Euklid ("more geometrico") auf, geht also aus von einer Reihe von Begriffserklärungen (Scholien) und Axiomen (Bewegungsgesetze). Diese folgen letztlich induktiv aus der Erfahrung, dem Experiment, und nicht aus metaphysischen Überlegungen. Sie werden bestätigt (oder falsifiziert), indem aus ihnen deduktiv Voraussagen hergeleitet und mit weiteren Experimenten verglichen werden.
Newton beginnt mit Aussagen über Raum und Zeit (Kinematik):

1) Der absolute Raum ist leer, unendlich ausgedehnt, homogen und isotrop. In seinen Worten: "Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne eine Beziehung zu einem äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich". Durch die Einführung eines Koordinatensystems werden den Raumpunkten – letzlich durch Messungen mit Maßstäben – Zahlentripel $\vec{r}$ zugeordnet. Der Raum wird dadurch auf ein mathematisches Objekt, einen dreidimsionalen affinen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, abgebildet.
2) Die absolute Zeit ist homogen. In seinen Worten: "Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung zu einem äußeren Gegenstand." Das bedeutet, daß die Zeit in allen Koordinatensystemen gleich und invariant ist.
Durch Messungen mit Uhren werden den Zeitpunkten die Elemente t eines eindimensionalen Raumes $\mathbb{R}^1$ zugeordnet und damit den Ereignissen $(\vec{r}, t)$ das Kroneckerprodukt in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$. Die Eigenschaften von Raum und Zeit selbst sind auf diese Weise grundsätzlich Gegenstand von Experimenten (Messungen) und somit der Erfahrung und – im Gegensatz etwa zur Auffassung von Kant – keine a-priori-Kategorien.
Es folgen drei Axiome über die Bewegung materieller Körper und ihre Ursachen (Dynamik):
Lex I: das Trägheitsgesetz,
Lex II: die dynamische Grundgleichung, und
Lex III: das Wechselwirkungsgesetz.

2.2.1 Das Trägheitsgesetz

Materielle Objekte sind aus Massenpunkten, von Newton "Körper" genannt, aufgebaut, die in vielen Eigenschaften mit den Atomen von Demokrit übereinstimmen, aber von beliebiger Größe und Form sein können. Sie haben einen wohldefinierten Ort, beschrieben durch einen Ortsvektor $\vec{r}(t)$. Die Ursache für ihre Bewegung sind nicht final, sondern kausal. Sie agieren nicht auf Grund eines inneren Bestrebens, wie bei Aristoteles, sondern reagieren nur auf äußere Einwirkungen, von Newton "Kräfte" genannt, die letztlich von anderen Körpern ausgeübt werden, sind also "träge" (inert). Im völligen Gegensatz zur aristotelischen Physik können sie sich aber auch ohne Beweger bewegen:
LEX I: Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

2.2.2 Das Kraftwirkungsgesetz

Liegt eine solche Einwirkung vor, dann wird durch sie primär nicht der Ort verändert – das geschieht ja auch bei der geradlinig-gleichförmigen Bewegung – sondern die Geschwindigkeit. Während alle Vorgänger, auch Demokrit, davon ausgingen, daß eine Kraft auf einen Körper nur bei direktem Kontakt wirken kann, nimmt Newton an, daß die Kraftwirkung wie beim Magnetismus durch den leeren Raum hindurch erfolgt (Fernkraft, "action at a distance"). Sie muß daher momentan vor sich gehen. Die entsprechende Geschwindigkeitsänderung geschieht nicht sprungweise, wie zum Beispiel bei einzelnen Stößen, deren Wahrscheinlichkeit für punktförmige Körper ohnehin verschwindend klein ist, sondern kontinuierlich. Eine solche veränderliche Geschwindigkeit kann exakt nur durch einen Grenzwertprozeß definiert werden, nämlich als Differentialquotient

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.2.1}$$

Zur Formulierung der Newtonschen Theorie sind deshalb die Infinitesimalrechnung und vektorielle Differentialoperatoren (siehe Kap. 1.9) erforderlich, was einerseits mathematischen Laien den Zugang sehr erschwert, und andererseits die mathematischen Betrachtungen von Kapitel 1 nachträglich rechtfertigt.

Wie die experimentelle Erfahrung zeigt, ist bei gleicher äußerer Einwirkung die Geschwindigkeitsänderung für verschiedene Massenpunkte unterschiedlich. Newton schreibt deshalb den Körpern eine invariante innere Eigenschaft zu: die träge Masse m. Er definiert sie als "Menge der Materie" oder als Produkt von Volumen und Dichte. Das ist zunächst eine Zirkeldefinition und keine Meßvorschrift. Sie erhält einen Sinn, wenn man bedenkt, daß vom atomistischen Standpunkt aus jeder Körper aus einer bestimmten Anzahl gleichartiger Elementarteilchen aufgebaut ist. Die Masse ist dann proportional zu dieser Anzahl. Je größer die Masse m eines Körpers ist, desto kleiner fällt die durch die gegebene Einwirkung $\vec{F}$ erzeugte Geschwindigkeitsänderung aus. Es gilt also

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} \tag{2.2.2}$$

Mit der Bewegungsgröße $m\vec{v} = \vec{p}$, die als "Impuls", "Linearimpuls" oder "linearer Impuls" bezeichnet wird, lautet dann das für die Newtonsche Mechanik grundlegende Kraftwirkungsgesetz, die dynamische Grundgleichung:

LEX II: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Da nach Newton die Masse eines Körpers als invariante Größe $m = const.$ betrachtet wird, kann man die Änderung des Linearimpulses durch die Beschleunigung $\vec{a}$ ersetzen:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}, \tag{2.2.3}$$

d.h. die Beschleunigung $\vec{a}$ eines Massenpunktes ist der auf ihn einwirkenden Kraft direkt proportional und fällt mit der Richtung der Kraft zusammen.

Die auf den Körper von den umgebenden Objekten ausgeübte Kraft kann nur von seinem relativen Ort $\vec{r}$ und seiner relativen Geschwindigkeit $\vec{v}$ in Bezug auf diese Umgebung abhängen, da der leere Raum einerseits homogen ist und andererseits nicht selbst auf den Körper einwirken kann. Es gilt daher

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t) \tag{2.2.4}$$

Wenn also der Ort $\vec{r}$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Körpers zu einem Zeitpunkt t gegeben sind, folgt daraus zwangsläufig zunächst die Änderung $\Delta\vec{v}$ der Geschwindigkeit und damit die Änderung $\Delta\vec{r}$ des Ortes im Zeitintervall Δt. Damit sind Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkz $t + \Delta t$ gegeben. Diese Verfahren kann unbegrenzt fortgesetzt werden. Die Bahn $\vec{r}(t)$ ist also durch die kausale Wechselwirkung $\vec{F}$ und die Anfangswerte $\vec{r}_0$ und $\vec{v}_0$ für alle Zeiten eindeutig festgelegt, determiniert. Die Bewegungsgleichung hat eine völlig andere Bedeutung als etwa das Ohmsche Gesetz $U = RI$. Es handelt sich nicht um eine überprüfbare Beziehung zwischen zwei meßbaren physikalischen Größen, sondern um eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit Randbedingungen, der die gesuchte Bahn $\vec{r}(t)$ bei gegebener Wechselwirkung genügen muß. Sie ist also auch nicht etwa eine bloße Definitionsgleichung für $\vec{F}$. Die Unschärfe des Begriffs "Kraft", die noch dadurch verstärkt wird, daß dieses Wort umgangssprachlich in sehr verschiedener Bedeutung gebraucht wird (Muskelkraft, Ausdruckskraft, Manneskraft, Atomkraft usw.), spielt zwar bei der Anwendung der Bewegungsgleichung in konkreten Situationen keine Rolle, hat aber langwierige methodische und philosophische Diskussionen ausgelöst. In der Lagrange- und Hamilton-Formulierung der Mechanik wird der Begriff der Wechselwirkungskraft deshalb ersetzt durch den präzisen Begriff der Wechselwirkungsenergie.

2.2.3 Das Wechselwirkungsgesetz

Über die Natur der auf einen Körper einwirkenden Objekte wurde bisher keine Annahme gemacht. Entsprechend dem Newtonschen Weltbild muß es sich dabei natürlich um Aggregate von Massenpunkten handeln. Das einfachste physikalische System, in dem eine Einwirkung stattfindet, besteht daher aus zwei Körpern mit den Massen m_1 und m_2. Wenn der Körper 2 auf den Körper 1 eine Kraft $\vec{F}_{12}$ ausübt:

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}, \tag{2.2.5}$$

muß aus Symmetriegründen auch gelten

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}. \tag{2.2.6}$$

Newton postuliert daher als drittes Axiom das Wechselwirkungsgesetz "actio=reactio":

LEX III: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzer Richtung.

Dieses Reaktionsprinzip "actio=reactio" führt im vorliegenden Fall zu

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.2.7}$$

Mit dem 2. Axiom folgt dann

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_1 = m_1\vec{a}_1 = -\frac{d}{dt}\vec{p}_2 = -m_2\vec{a}_2, \tag{2.2.8}$$

also

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{2.2.9}$$

Spezifiziert man m_1 als Einheitsmasse und mißt man das Verhältnis der Beschleunigungen, so läßt sich damit die Masse m_2 des Körpers 2 bestimmen. Für diese Messung benötigt man Uhren und Meßbänder und man muß ein geeignetes Koordinatensystem auswählen.

2.2.4 Das Äquivalenzprinzip

Häufig geschieht die Massenbestimmung durch Wiegen: in der durch das Gravitationsfeld ausgeübten Beschleunigung $\vec{g}$ ist das Gewicht

$$\vec{W} = m_s\vec{g} \tag{2.2.10}$$

gerade gleich der auf den Körper wirkenden Kraft

$$\vec{F} = m_t\vec{a}. \tag{2.2.11}$$

Gemäß des **Äquivalenz-Prinzips** $m_s = m_t$ wird nun angenommen, daß die "schwere" Masse m_s in Gleichung (2.2.10) exakt gleich ist zur "trägen" Masse m_t im Kraftgesetz (2.2.11).
Die träge Masse (Inertialmasse) m_t ist gerade die Masse, die die Beschleunigung eines Körpers bei Wirkung einer gegebenen Kraft bestimmt. Die schwere Masse (Gravitationsmasse) m_s ist die Masse, die in das Gravitationsgesetz (2.2.10) eingeht, oder allgemeiner die Masse, die die Gravitationskräfte zwischen verschiedenen Körpern bestimmt. Bisherige Experimente (Galilei, Newton, Eötvös, Dicke u. a.) bestätigen das Äquivalenzprinzip zur Gleichheit von träger und schwerer Masse mit einer Genauigkeit von 10^{-12}. Die europäische Weltraumorganisation ESA wird mit dem Satellitenexperiment $STEP$ das Äquivalenzprinzip mit weit höherer Genauigkeit überprüfen.

2.2.5 Das Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen

Die Überlegungen zum Wechselwirkungsgesetz von zwei Körpern lassen sich ohne Änderung auf den Fall von N wechselwirkenden Massenpunkten übertragen. Es muß dann gelten:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}. \tag{2.2.12}$$

Bei mehr als zwei Körpern entsteht das Problem der Überlagerung von mehreren gleichzeitigen Einwirkungen auf einen Massenpunkt. Daß die Kräfte Vektoren im physikalischen Sinn, also gegenüber Drehungen des Koordinatensystems im Raum invariante Größen (siehe Kap. 1.6) mit Richtung und Betrag sind, bedeutet nicht notwendig, daß sie auch einen linearen Vektorraum im mathematischen Sinn bilden. Ein Gegenbeispiel liefert die Darstellung durch "Drehvektoren", deren Richtung mit der Drehachse übereinstimmt und deren Betrag gleich dem Tangens des halben Drehwinkels ist, die wir später (Kap. 6.1) noch ausführlich betrachten werden. Da diese Drehungen, außer für infinitesimale Drehwinkel nicht miteinander kommutieren, erhält man den Drehvektor einer zusammengesetzten Drehung im allgemeinen nicht durch Vektoraddition (Parallelogrammkonstruktion) aus den Drehvektoren der beiden Teildrehungen. In entsprechender Weise könnten sich auch Kräfte bei der Zusammensetzung gegenseitig beeinflussen. Die Bewegung unter dem Einfluß der resultierenden Kraft müßte nicht notwendig durch lineare Zusammensetzung der beiden Teilbewegungen entstehen. Nach Aristoteles stören sich sogar verschiedene Bewegungen grundsätzlich; ein Körper kann daher in jedem Augenblick nicht mehr als eine Bewegung ausführen. Von gleicher Bedeutung wie die ersten drei Axiome ist deshalb Newtons Zusatz zu den Bewegungssätzen:

LEX IV: Wirken auf einen Körper zwei Kräfte gleichzeitig, so setzen sie sich zur Diagonale des Parallelogramms zusammen.

Gemäß dieses Superpositionsprinzips der Kraftwirkungen (oder Prinzip der ungestörten Überlagerung) erzeugen Teilkräfte also unabhängige Teilbewegungen. Umgekehrt kann eine Kraft in beliebiger Weise in Komponenten zerlegt werden.

Für ein System von N Massenpunkten lauten die Bewegungsgleichungen dann

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{v}_i - \vec{v}_j, t), \quad i = 1, ..., N. \tag{2.2.13}$$

Das ist ein System von $3N$ gekoppelten (simultanen) gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Mit den Anfangsbedingungen

$$\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0}, \quad \vec{v}_i(0) = \vec{v}_{i0}$$

ergeben sich daraus nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz die vollständig determinierten Bahnen

$$\vec{r}_i = \vec{r}(\vec{r}_{i0}, ..., \vec{r}_{iN}, \vec{v}_{i0}, ..., \vec{v}_{iN}, t). \tag{2.2.14}$$

Wenn man sich auf den extremen Standpunkt des Demokrit ("Wirklich sind nur Atome und Leeres") stellt, daß die Welt ausschließlich aus einer sehr großen Anzahl wechselwirkender Massenpunkte aufgebaut ist, liefe das Geschehen in der Welt also wie ein Uhrwerk ab (mechanistisches Weltbild) und ließe zum Beispiel die Existenz eines freien Willens nicht zu. Die einzige, allerdings recht umfangreiche Aufgabe der Mechanik wäre dann die Integration dieses riesigen Systems von Differentialgleichungen.

Eine solche Behandlung der Welt als Ganzes ist natürlich unmöglich. Man zerlegt sie daher in einen Teil, für den man sich im wesentlichen interessiert, das physikalische System, und den Rest, die Umgebung. Wenn zwischen beiden keine Wechselwirkung besteht, nennt man das System abgeschlossen. Seine zeitliche Entwicklung verläuft dann genauso, als ob es sich allein im leeren Raum befände. Exakt ist dieser Fall natürlich nie realisiert. Wenn die Wechselwirkung mit der Umgebung nicht vernachlässigbar ist, kann man versuchen, das System durch Hinzunahme derjenigen Massenpunkte der Umgebung, mit denen es wechselwirkt, zu erweitern, aber auch dieses Verfahren ist nie exakt möglich und führt zudem im allgemeinen zu einer wesentlichen Komplizierung. Häufig ist zwar eine erhebliche Einwirkung der Umgebung auf das System vorhanden, während die Rückwirkung des Systems auf die Umgebung vernachlässigt werden kann. Für das betrachtete System ist der umgebende Raum dann im allgemeinen weder homogen noch isotrop und, da die Vorgänge in der Umgebung von ihm unbeeinflußt ablaufen, die Zeit nicht mehr homogen, Die Bewegungsgleichungen nehmen dann die Form an:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{v}_i - \vec{v}_j, t) + \vec{F}_i^{(e)}(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t). \tag{2.2.15}$$

Hier stellen die $\vec{F}_i^{(e)}$ die einseitige Wechselwirkung mit der Umgebung (äußere Kräfte) dar.

2.2.6 Anmerkungen

Zunächst ist sofort einsichtig, daß das 1. Axiom als Spezialfall des 2. Axioms aufgefaßt werden kann. Wenn $\vec{F} = 0$ ist, dann ist $m\vec{v}$ =const. und weil m unabhängig von $\vec{v}$ ist, folgt $\vec{v}$ =const.

Hinsichtlich der Annahmen von Newton über (a) die Existenz der absoluten Zeit, (b) die Existenz des absoluten Raum, (c) der Unabhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit und (d) der Aussage, daß die Masse eines abgeschlossenen Systems von Körpern unabhängig ist von den in diesem System ablaufenden Prozessen gleich welcher Art, ist anzumerken, daß diese nach der heutigen Physik insbesondere bei hohen Geschwindigkeiten von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit und bei atomaren Prozessen zu modifizieren sind. Die spezielle Relativitätstheorie von Einstein modifiziert die Annahmen (a)-(c), insbesondere verliert die Zeit ihren absoluten Charakter und wird bei der Lorentz-Transformation in gleicher Weise wie die Raumkoordinaten behandelt. Inelastische Kernstöße wie $p + p \to p + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ verletzen Annahme (d) über die Unabhängigkeit der Masse im subatomaren Bereich.

Wir schließen hier mit der Bemerkung, daß die Newtonsche Mechanik begrifflich nicht einfach ist. Der Kosmologe Hermann Bondi hat hierzu treffend formuliert: "Einstein's contribution has a name for being difficult, but this is quite wrong. Einstein's contribution is very easy to understand, but unfortunately it rests on the theories of Galilei and Newton which are very difficult to understand."

2.3 Grundbegriffe der Mechanik

2.3.1 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Nach dem Trägheitsprinzip zeichnen sich Koordinatensysteme im absolut leeren Raum dadurch aus, daß sich in Bezug auf sie wechselwirkungsfreie Körper geradlinig-gleichförmig bewegen. Das ist aber auch der Fall bezüglich Systemen, die sich gegenüber dem Absoluten Raum mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{V} = const.$ bewegen. Auch in ihnen gilt also das Trägheitsgesetzt; sie heißen daher *Inertialsysteme.*
Da außerdem Wechselwirkungen zwischen Körpern nur von ihren relativen Positionen und Geschwindigkeiten abhängen können, führt die *Galilei-Transformation*

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{V}t, \quad t^* = t \tag{2.3.1}$$

auf ein anderes, mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{V}$ bewegtes, Inertialsystem zu keiner Änderung der Form der Bewegungsgleichungen eines abgeschlossenen Systems. Gehen wir von der dynamischen Grundgleichung (2.2.13),

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{v}_i - \vec{v}_j, t)$$

mittels der Transformationsgleichung (2.3.1) auf das bewegte Inertialsystem über, so folgt mit

$$\vec{v}_i^* = \frac{d}{dt}\vec{r}_i^* = \frac{d}{dt}\vec{r}_i - \vec{V} = \vec{v}_i - \vec{V}$$

daß

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_i^*}{dt^2},$$

sodaß die dynamische Grundgleichung im bewegten System dieselbe Form

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i^*}{dt^{*2}} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i^* - \vec{r}_j^*, \vec{v}_i^* - \vec{v}_j^*, t^*) \tag{2.3.2}$$

annimmt. Die dynamische Grundgleichung ist also invariant bei Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen. Kein Experiment gibt daher Aufschluß über die verschiedenen Koordinatensysteme, die aus den Galilei-Transformationen hervorgehen. Inertialsysteme sind also im Rahmen der Newtonschen Mechanik grundsätzlich ununterscheidbar. und das ursprüngliche Newtonsche Konzept eines absoluten Raumes verliert damit seinen physikalischen Sinn.
In der vierdimensionalen Raumzeit der Ereignisse $(\vec{r}, t)$ wird durch die Galilei-Transformation (2.3.1) der Raum relativiert, während die Zeit absolut bleibt (Galilei-Relativität). Im Gegensatz dazu behalten in der speziellen Relativitätstheorie Einsteins zwar die Inertialsysteme ihre Sonderrolle bei, aber die Zeit verliert ihren absoluten Charakter und wird bei der Lorentz-Transformation ebenso wie die Raumkoordinaten behandelt (siehe Kap. 7.1).

2.3.2 Arbeit

Wenn eine Kraft $\vec{F}$ die Verschiebung eines Massenpunktes um ein Wegelement $d\vec{r}$ hervorruft, so nennen wir das Skalarprodukt

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}) \tag{2.3.3}$$

die von der Kraft $\vec{F}$ geleistete differentielle *Arbeit.* Die Arbeit hat die Einheit erg=g cm^2 s^{-2} im cgs-System und Newtonmeter Nm=kg m^2 s^{-2} im MKS-System; offensichtlich entspricht 1Nm=10^7 erg.

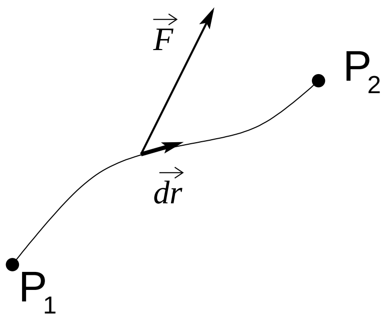

Abb. 2.1: Zur Illustration des Begriffs der Arbeit.

Die gesamte Arbeit W entlang eines Wegs $\overline{P_1P_2}$ zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ist dann durch das Integral

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.3.4}$$

gegeben.

2.3.3 Kinetische Energie

Multiplizieren wir die dynamische Grundgleichung (2.2.2) in der Form

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{2.3.5}$$

skalar mit $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt$, so folgt

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}dt = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}^2)dt = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)dt. \tag{2.3.6}$$

Wir definieren deshalb die *kinetische Energie* des Massenpunktes

$$T = E_{\text{kin}} \equiv \frac{1}{2}mv^2. \tag{2.3.7}$$

Gleichung (2.3.6) schreibt sich dann mit Gleichung (2.3.3) zu

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW \tag{2.3.8}$$

oder

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = T(P_2) - T(P_1). \tag{2.3.9}$$

Offensichtlich erhöht sich die kinetische Energie um die von außen am Massenpunkt geleistete Arbeit.

2.3.4 Konservative Kräfte

Ein Kraftfeld $\vec{F}$ heißt *konservativ*, wenn es sich als Gradient eines Potentials

$$\vec{F} = -\text{grad } V(x, y, z) \tag{2.3.10}$$

darstellen läßt. Aufgrund der Beziehung (1.10.4.2), rot grad $V = 0$, ist die Definition (2.3.10) äquivalent zur Forderung

$$\text{rot } \vec{F} = 0. \tag{2.3.11}$$

In diesem Fall erhalten wir für das Wegintegral in Gleichung (2.3.9)

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \text{grad } V \cdot d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} dV =$$
$$-(V(P_2) - V(P_1)) = -(V_2 - V_1), \tag{2.3.12}$$

wobei wir Gleichung (1.9.1.3) für das totale Differential benutzt haben. Das Integral (2.3.4) zur Berechnung der Arbeit ist in diesem Fall unabhängig vom Integrationsweg und durch die Differenz des Potentials an den Endpunkten gegeben;

$$W = V_1 - V_2. \tag{2.3.13}$$

$V(x, y, z)$ wird *potentielle Energie, skalares Potential*, oder kurz *Potential* genannt.
Kombiniert man die Gleichungen (2.3.13) und (2.3.9) so erhält man den Energiesatz

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = E = const. \tag{2.3.14}$$

für konservative Kräfte, wobei E die Gesamtenergie bezeichnet.

2.3.5 Zentralkräfte

Eine wichtige Gruppe von konservativen Kraftfeldern sind *Zentralkräfte*, die von einem Zentrum aus stets in radialer Richtung wirken:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r}, \tag{2.3.15}$$

wobei $r = |\vec{r}|$ und $f(r)$ eine beliebige Funktion des Abstands r ist.
In diesem Fall ergibt sich die potentielle Energie nach (2.3.12) durch das Wegintegral entlang eines beliebigen Wegs $\vec{s}$ zu

$$-V(r) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} f(r) \frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{r} = \int_{P_1}^{P_2} f(r) dr = f(P_2) - f(P_1). \tag{2.3.16}$$

Für die elastische Kraft $\vec{F} = k\vec{r} = kr\frac{\vec{r}}{r}$ folgt speziell

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} dr\, kr = -k(r^2 - r_0^2)/2. \tag{2.3.17}$$

Für die Gravitationskraft

$$\vec{F} = GMm\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2.3.18}$$

folgt für das Potential

$$V(r) = -GMm \int_{r_0}^{r} dr\, r^{-2} = GMm(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}). \tag{2.3.19}$$

2.3.6 Drehimpuls und Drehmoment

Mit Hilfe des Ortsvektors $\vec{r}$ definieren wir bezüglich jeden festen Punktes den *Drehimpuls*

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{2.3.20}$$

und das *Drehmoment*

$$\vec{D} \equiv \vec{r} \times \vec{F}. \tag{2.3.21}$$

Für die zeitliche Ableitung des Drehimpulses folgt dann

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \ m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + \ m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \tag{2.3.22}$$

Bilden wir das Kreuzprodukt des Ortsvektors $\vec{r}$ mit der dynamische Grundgleichung (2.3.5), so folgt

$$\vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}, \tag{2.3.23}$$

und unter Verwendung von (2.3.22) ergibt sich sofort der Drehimpulssatz

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} \tag{2.3.24}$$

daß die zeitliche Änderung des Drehimpulses am Ort $\vec{r}$ durch das dortige Drehmoment $\vec{D}$ bestimmt ist.

Für **Zentralkräfte** ist speziell $\vec{D} = 0$, weil daß Kraftfeld $\vec{F} \parallel \vec{r}$ parallel zu $\vec{r}$ wirkt. Nach dem Drehimpulssatz (2.3.24) folgt dann sofort die zeitliche Konstanz des Drehimpulses für Zentralkräfte:

$$\vec{L} = const.. \tag{2.3.25}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ und das Drehmoment $\vec{D}$ hängen von der Wahl des Bezugspunkts $\vec{r}$ ab. Verschiebt man diesen von $\vec{r}$ zu $\vec{r}+\vec{u}$, so erhalten wir für den Drehimpuls bezogen auf den neuen Punkt

$$\vec{L}' = (\vec{r}+\vec{u}) \times m(\dot{\vec{r}}+\dot{\vec{u}}). \tag{2.3.26}$$

Speziell bei der Transformation in ein anderes Inertialsysteme, die einer Verschiebung mit $\ddot{u}=0$ entspricht, folgt aus Gleichung (2.3.26)

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = (\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt}) \times m(\dot{\vec{r}}+\dot{\vec{u}}) + (\vec{r}+\vec{u}) \times m\ddot{\vec{r}} = m[\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}+\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{u}}+\dot{\vec{u}}\times\dot{\vec{r}}+\dot{\vec{u}}\times\dot{\vec{u}}]+m(\vec{r}+\vec{u})\times\ddot{\vec{r}}.$$

Die eckige Klammer ergibt keinen Beitrag, weil der erste und der vierte Term verschwinden und der dritte Term wegen der Antisymmetrie des Kreuzprodukts ($\dot{\vec{u}}\times\dot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{u}}$) gerade gleich dem negativen Wert des zweiten Terms ist. Man erhält also

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = m(\vec{r}+\vec{u}) \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{L}}{dt} + m\vec{u}\times\ddot{\vec{r}}. \tag{2.3.27}$$

Führen wir das Drehmoment ebenfalls bezogen auf den neuen Punkt $\vec{r}+\vec{u}$ als

$$\vec{D}' = (\vec{r}+\vec{u}) \times \vec{F} = \vec{r}\times\vec{F} + \vec{u}\times\vec{F} = \vec{D} + m\vec{u}\times\ddot{\vec{r}}, \tag{2.3.28}$$

so schreibt sich Gleichung (2.3.27) als

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{D}'. \tag{2.3.29}$$

Der Drehimpulssatz gilt also für jeden beliebigen inertialen Bezugspunkt, oder anders ausgedrückt, der Drehimpulssatz ist invariant gegenüber der Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen.

2.3.7 Zusammenfassung: Erhaltungssätze für einen Massenpunkt

Fassen wir die in diesem Abschnitt gewonnenen Erhaltungssätze für die Bewegung eines Massenpunktes in einem abgeschlossenen System zusammen:
(a) Für konservative Kräfte (rot $\vec{F}=0$) ist die Gesamtenergie $E=T+V$ erhalten.
(b) Für Zentralkräfte ($\vec{r}\times\vec{F}=0$) ist der Drehimpuls $\vec{L}\equiv\vec{r}\times\vec{p}$ erhalten.
(c) Gemäß des Trägheitsgesetzes ist bei verschwindender Kraft ($\vec{F}=0$) der lineare Impuls $\vec{p}=m\vec{v}$ erhalten.

2.4 Integration der Bewegungsgleichungen

Ein allgemeines Verfahren zur Lösung (Integration) der Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten existiert nicht. Das gilt auch für den Sonderfall eines abgeschlossenen ($\vec{F}^{(e)} = 0$) Systems, bei dem die Wechselwirkungen nur von den relativen Abständen abhängen, das sogenannte N-Körper-Problem. Gemäß (2.2.15) gilt

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} f_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{2.4.1}$$

Für $N = 1$ ist seine Lösung trivial und folgt schon aus LEX I: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$.
Die Lösung des Zweikörperproblems ($N = 2$) ist das erste und wichtigste Beispiel der Newton-Mechanik und bildet einen wesentlichen Teil der "Principia". Da es sich aber besonders einfach in sphärischen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) darstellen läßt, wird seine Behandlung auf Kapitel 4 verschoben.
Das Dreikörperproblem ($N = 3$) war der Anlaß vieler Untersuchungen, die wesentlich zur Entwicklung der theoretischen Mechanik beitrugen. Zu seiner analytischen Lösung sind mindestens 16 unabhängige Bewegungsintegrale erforderlich, von denen 10 aus den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit folgen. Nach Vorarbeiten von Lagrange und Poincare hat Bruns aber gezeigt, daß im allgemeinen Fall keine weiteren Bewegungsintegrale in analytischer Form existieren. In diesem Sinn ist das Dreikörperproblem also unlösbar.
Wir betrachten jetzt das nichtabgeschlossene Einkörperproblem

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0, \; \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0. \tag{2.4.2}$$

Es handelt sich also um ein System von drei gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Seine Lösung erfordert in der Regel die Separation in drei unabhängige Gleichungen für $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$. Diese ist immer möglich für ein lineares System

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \alpha(t)\frac{d\vec{r}}{dt} + \beta(t)\vec{r} + \vec{F}(t). \tag{2.4.3}$$

Für ein zeitabhängiges homogenes Kraftfeld ($\alpha(t) = \beta(t) = 0$) folgt zum Beispiel durch Integration der Bewegungsgleichung

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t dt' \vec{F}(t'), \tag{2.4.4}$$

d.h. die Änderung des Impulses ist gleich dem Kraftstoß. Durch weitere Integration von (2.4.4) ergibt sich

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t dt^* \int_0^{t^*} dt' \vec{F}(t'). \tag{2.4.5}$$

Das Problem ist damit auf Quadraturen zurückgeführt und insofern gelöst.

Wenn die Separation möglich ist, führt sie auf drei Bewegungsgleichungen für jeweils ein eindimensionales System, deren erste lautet

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \tag{2.4.6}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ zur Zeit $t = 0$.
Ein generelles Lösungsverfahren für diese allgemeinste Form der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Art gibt es nicht. Wir untersuchen deshalb Sonderfälle.

2.4.1 Zeitabhängiges Kraftfeld $F = F(t)$

Der Fall eines rein zeitabhängigen oder konstanten Kraftfeldes wurde schon in Gleichung (2.4.5) behandelt.
Im Beispiel einer konstanten Kraft $F = mg$ ergibt sich sofort die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \dot{x}_0 t + x_0 \tag{2.4.7}$$

2.4.2 Geschwindigkeitsabhängiges Kraftfeld $F = f(\dot{x}) = f(v)$

Im Fall einer geschwindigkeitsabhängigen Kraft ist die Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}f(v),$$

die sich durch Trennung der Variablen lösen läßt:

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{dv}{f(v)} = \frac{1}{m}\int_0^t dt' = \frac{t}{m} \tag{2.4.8}$$

Durch Auflösen nach $\dot{x}$ ergibt sich

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = G(\dot{x}_0, t)$$

und dann durch weitere Integration nach der Zeit

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' G(\dot{x}_0, t') \tag{2.4.9}$$

Dies illustrieren wir am Beispiel einer Kraft $F = -av^2$, wobei a =const. In diesem Fall lautet die Gleichung (2.4.8)

$$\frac{a}{m}t = -\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{\dot{x}} - \frac{1}{\dot{x}_0}$$

Das Auflösen nach $\dot{x}$ führt auf

$$\frac{dx}{dt} = [\frac{a}{m}t + \frac{1}{\dot{x}_0}]^{-1}$$

und die nochmalige Integration über die Zeit ergibt die Lösung

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{a}\ln[1 + \frac{a}{m}\dot{x}_0 t]$$

2.4.3 Konservatives Kraftfeld $F = f(x)$

Jedes rein ortsabhängige Kraftfeld $f(x)$ ist ein konservatives Kraftfeld (2.3.10), da wir es als Gradient

$$f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

des Potentialfeldes

$$V(x) = -\int_0^x dx' f(x') \tag{2.4.10}$$

darstellen können.

Multiplizieren wir die Bewegungsgleichung mit $\dot{x}$, so folgt

$$m\ddot{x}\dot{x} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = f(x)\dot{x} = f(x)\frac{dx}{dt}$$

Durch Integration über die Zeit folgt mit (2.4.10)

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^x dx' f(x') = -V(x) + V(x_0),$$

oder

$$\frac{m}{2}v^2 + V(x) = \frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0) = E = const. \tag{2.4.11}$$

der Energiesatz (2.3.14) für dieses spezielle konservative Kraftfeld. Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist also ein Bewegungsintegral bzw. eine Erhaltungsgröße. Durch Auflösen von Gleichung (2.4.11) nach v erhalten wir

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

und daraus durch Trennung der Variablen

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))}} \tag{2.4.12}$$

Das Problem läßt sich also auf Quadraturen (Integrale) zurückführen und ist damit vollständig gelöst.

Unabhängig von der speziellen Form des konservativen Kraftfeldes $f(x)$ oder des Potentialverlaufs $V(x)$ lassen sich aus den Lösungen (2.4.11) – (2.4.12) allgemeine Aussagen zur Bewegungsform ableiten, insbesondere lassen sich Bedingungen für oszillierende Bewegung aufstellen. Jedes Teilchen im Potentialfeld $V(x)$ beginnt seine Bewegung am Ort x_0 mit der Geschwindigkeit $\dot{x}_0$:

1) Damit es zu diesem Ort zurückkehrt, muß sich die Geschwindigkeit an irgendeinem anderen Punkt U_1 (sog. Umkehrpunkt) umkehren, d.h. dort gilt $\dot{x}_{U_1} = 0$. Es durchläuft dann den Anfangspunkt mit entgegengesetzter Geschwindigkeit und damit es nach dem Durchlaufen wieder an den Anfangspunkt zurückkehrt, braucht man einen zweiten Umkehrpunkt U_2 mit ebenfalls $\dot{x}_{U_2} = 0$. Desweiteren muß bei den Umkehrpunkten die Kraft $(dV/dx)_{U_1,U_2}$ $\neq 0$ nichtverschwindend sein.
2) Gemäß Gleichung (2.4.11) gelten an den Umkehrpunkten wegen $v_{U_1} = v_{U_2} = 0$ die Beziehungen

$$V(x_{U_1}) = V(x_{U_2}) = E \tag{2.4.13}$$

Existieren keine zwei Punkte, die die Gleichungen (2.4.13) erfüllen, so ist keine Schwingungsbewegung möglich.

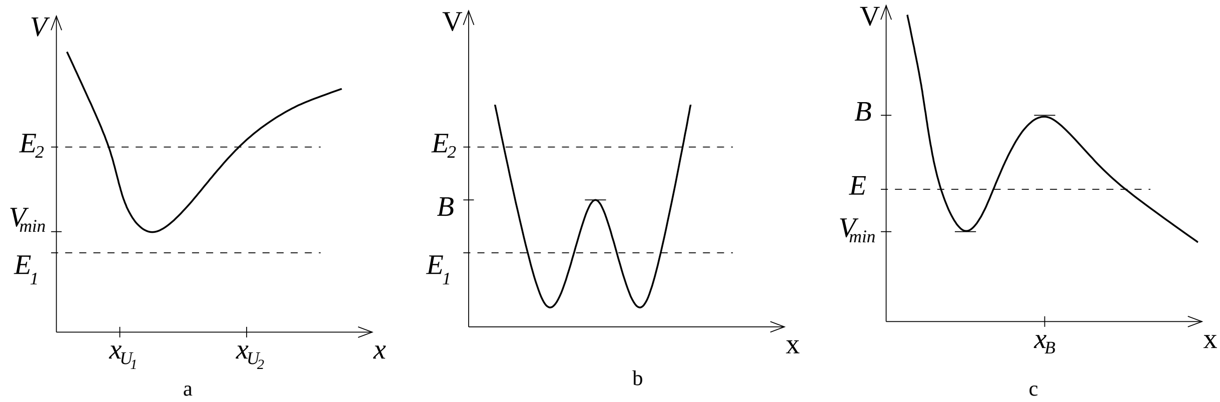

Abb. 2.2: Bewegungsformen für drei Beispielpotentiale.

Dieser Befund läßt sich an den drei in Abbildung 2.2 gezeigten Potentialbeispielen verdeutlichen. Das in Teilabbildung 2.2.a gezeigte Potential hat ein Minimum V_{min}. Ist die Gesamtenergie $E = E_1 < V_{min}$, gibt es keine oszillierende Bewegung. Für Werte $E = E_2 > V_{min}$ existieren zwei Umkehrpunkte, und man erhält Schwingungsbewegungen mit Amplituden, die mit wachsendem E ansteigen.
Das in Abbildung 2.2.b illustrierte Potential hat bei x_b die Barriere B. Ist die Gesamtenergie $E = E_1 < B$, aber größer als die Potentialminima, so ergeben sich Schwingungsbewegungen auf beiden Seiten der Barriere. Ist $E = E_2 > B$, so erstrecken sich die Schwingungen über die gesamte Breite des Potentialtopfs. Im Fall $E = B$ bleibt das Teilchen genau auf der Potentialspitze liegen, aber infinitesimal kleine Änderungen machen die Bewegung wieder oszillierend.
Das in Abbildung 2.2.c gezeigte Potential erlaubt oszillierende Bewegungen nur für Teilchen, die links $x < x_B$ von der Spitze liegen, wenn $V_{min} < E < B$ ist.

2.4.4 Harmonischer Oszillator $F = f(x)$

Wir betrachten jetzt das spezielle eindimensionale Potential $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ mit $k > 0$ des harmonischen Oszillators, daß auf das rücktreibende Hookesche Kraftgesetz

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -kx \tag{2.4.14}$$

führt.

Dieses Kraftgesetz hat eine besondere Bedeutung in der Physik, da man komplizierte beliebige Kraftfelder $F(x)$ oft durch Taylor-Entwicklung um einen Punkt x_0 entwickelt

$$F(x) \simeq F(x_0) + x(\frac{dF}{dx})_{x=x_0} + \frac{x^2}{2}(\frac{d^2F}{dx^2})_{x=x_0} + ... \tag{2.4.15}$$

Bei kleinen Auslenkungen $|x - x_0| << x_0$ berücksichtigt man nur den Term 1. Ordnung in der Entwicklung, und nach Berücksichtigung von $F(x_0)$ in einer erneuten Normierung ergibt sich gerade das Hookesche Kraftgesetz

$$F(x) - F(x_0) \simeq -kx, \quad \text{mit } k = -(\frac{dF}{dx})_{x=x_0} \tag{2.4.16}$$

Als Anfangsbedingung benutzen wir, daß für $t = 0$ das Teilchen an der Stelle a ruht $\dot{x} = v = 0$ (siehe Abbildung 2.3). Die rücktreibende Kraft (2.4.14) sorgt dann zunächst für die Bewegung des Teilchens zum Punkt $x = 0$ hin.

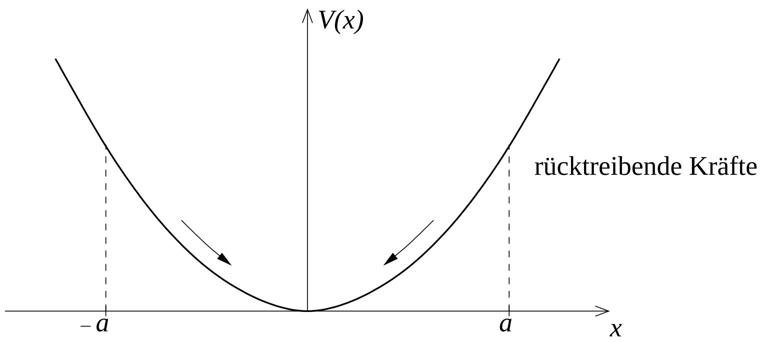

Abb. 2.3: Zum harmonischen Oszillator .

Das Kraftgesetz (2.4.14) ist konservativ, da sich als Ableitung des Potentials $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ darstellen gesetzt. Deshalb gilt der Energiesatz (2.4.11) oder (2.3.14) in der Form

$$T + V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E = const. \tag{2.4.17}$$

Aus der Anfangsbedingung erschließen wir $T(t = 0) = \frac{m}{2}\dot{x}^2_{x=a} = 0$, sodaß die Gesamtenergie E durch

$$E = \frac{k}{2}a^2 \tag{2.4.18}$$

gegeben ist. Der Energiesatz (2.4.17) reduziert sich dann auf

$$\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{k}{2}(a^2 - x^2)$$

oder

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)} \tag{2.4.19}$$

Wählen wir das positive Vorzeichen der Quadratwurzel und integrieren wir über die Zeit, so erhalten wir mit der Integrationskonstanten c_1

$$\int^x \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \ c_1$$

Die Substitution $s = ay$ führt auf

$$\int^{x/a} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin(x/a) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \ c_1 \tag{2.4.20}$$

Nutzen wir die zweite Anfangsbedingung $x(t = 0) = a$ aus, so folgt für den Wert der Integrationskonstanten

$$c_1 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

und die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung lautet

$$\arcsin(\frac{x}{a}) = \frac{\pi}{2} + \ \sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{2.4.21}$$

Bilden wir den *sin* dieser Gleichung, so folgt

$$\sin[\arcsin(\frac{x(t)}{a})] = \frac{x(t)}{a} = \sin(\frac{\pi}{2} + \ \sqrt{\frac{k}{m}}t) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \ \cos\frac{\pi}{2}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

oder

$$x(t) = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t = a\cos\omega t = a\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{2.4.22}$$

Das Teilchen führt eine periodische Schwingungsbewegung mit der Frequenz $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T = \sqrt{\frac{k}{m}}$ aus. Diese Frequenz wird oftmals als Federkonstante bezeichnet.

2.4.5 Senkrechter Wurf im Schwerefeld ohne Reibung

Wir untersuchen jetzt die Bewegungsgleichung im Kraftfeld

$$\vec{F}_G = -mg\vec{e}_3, \quad \text{mit } g = \frac{GM_e}{R_E^2} = 9.81\ ms^{-2} \tag{2.4.23}$$

In diesem Fall reduziert sich die dynamische Grundgleichung (2.2.3) auf

$$m\ddot{z}\vec{e}_3 = -mg\vec{e}_3, \tag{2.4.24}$$

also auf

$$\ddot{z}(t) = -g. \tag{2.4.25}$$

Mit den Anfangsbedingungen $z(t = 0) = 0$ und $\dot{z}(t = 0) = V_0 > 0$ für den senkrechten Wurf nach oben, ergeben die Integrationen von Gleichung (2.4.25) nach der Zeit

$$\dot{z}(t) = v(t) = V_0 - gt, \quad z(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2.4.26}$$

Bezeichnet T die Steigzeit bis zum Umkehrpunkt $\dot{z}(T) = 0$, so ergibt sich aus Gleichung (2.4.26a) diese zu $T = V_0/g$. Gemäß Gleichung (2.4.26b) berechnet man die maximale Steighöhe h dann zu

$$h = z(T) = V_0 T - \frac{g}{2} T^2 = \frac{V_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g} \tag{2.4.27}$$

Drückt man gemäß (2.4.26a) die Zeit $t = (V_0 - v)/g$ durch die Geschwindigkeit aus und setzt dies in Gleichung (2.4.26b) ein, so folgt

$$z(t) = \frac{1}{2g}[2V_0(V_0 - v) - (V_0 - v)^2] = \frac{V_0^2 - v^2}{2g} = h - \frac{v^2}{2g} \tag{2.4.28}$$

oder der Zusammenhang

$$v(z) = \sqrt{2g(h - z)} \tag{2.4.29}$$

2.4.6 Schiefer Wurf im Schwerefeld ohne Reibung

Im Unterschied zum gerade behandelten Fall des senkrechten Wurfs untersuchen wir jetzt den schrägen Wurf, d.h. die Anfangsgeschwindigkeit hat zwei Komponenten gemäß

$$\dot{\vec{r}}(t = 0) = \vec{v}_0 = V_0(\cos\alpha \vec{e}_2 + \sin\alpha \vec{e}_3), \quad V_0 > 0 \tag{2.4.30}$$

wobei α den Abwurfwinkel bezeichnet (siehe Abbildung 2.4). Im Fall $\alpha = \pi/2$ ergibt sich gerade wieder der Fall des senkrechten Wurf.

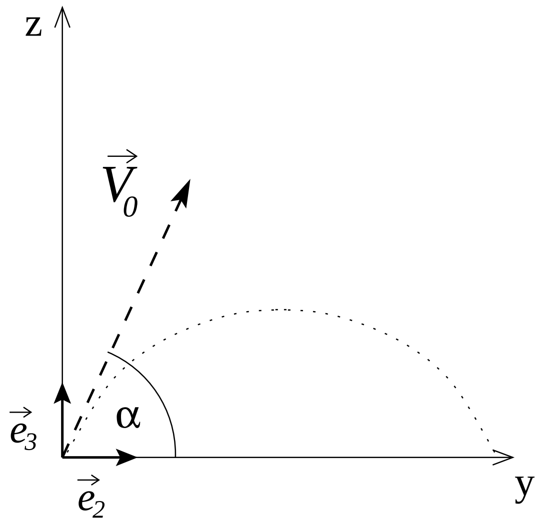

Abb. 2.4: Schräger Wurf.

Die dynamische Bewegungsgleichung ist wieder durch Gleichung (2.4.24) gegeben

$$m\ddot{z}\vec{e}_3 = -mg\vec{e}_3,$$

oder

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g\vec{e}_3 \tag{2.4.31}$$

Die Integration dieser Gleichung führt sofort auf

$$\vec{v}(t) = -gt\vec{e}_3 + \vec{c}_2$$

mit dem zeitlich konstanten Vektor $\vec{c}_2$. Aus der Anfangsbedingung (2.4.30) erschließt man

$$\vec{c}_2 = \vec{v}_0 = V_0(\cos\alpha\vec{e}_2 + \sin\alpha\vec{e}_3),$$

sodaß

$$\vec{v}(t) = (V_0\sin\alpha - gt)\vec{e}_3 + V_0\cos\alpha\vec{e}_2 \tag{2.4.32}$$

Die Steigzeit T ergibt sich aus der Bedingung $\vec{v}(t = T)\cdot\vec{e}_3 = 0$ zu $T = V_0\sin\alpha/g$. Durch nochmalige Integration von Gleichung (2.4.32) ergibt sich mit der Anfangsbedingung $\vec{r}(t = 0) = \vec{0}$ die Lösung der Bewegungsgleichung zu

$$\vec{r}(t) = (0, y(t), z(t)) = [V_0(\sin\alpha)t - \frac{g}{2}t^2]\vec{e}_3 + V_0(\cos\alpha)t\vec{e}_2 \tag{2.4.33}$$

Aus der Gleichung für die y-Komponente der Bewegung $y(t) = tV_0\cos\alpha$ folgt

$$t = \frac{y}{V_0\cos\alpha}$$

Eingesetzt in die Gleichung für die z-Komponente der Bewegung folgt die Parabelgleichung

$$z(t) = V_0(\sin\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 = y(t)\tan\alpha - \frac{g}{2}(\frac{y(t)}{V_0\cos\alpha})^2 \tag{2.4.34}$$

für den Zusammenhang $z = z(y)$, der in Abbildung 2.5 illustriert ist.

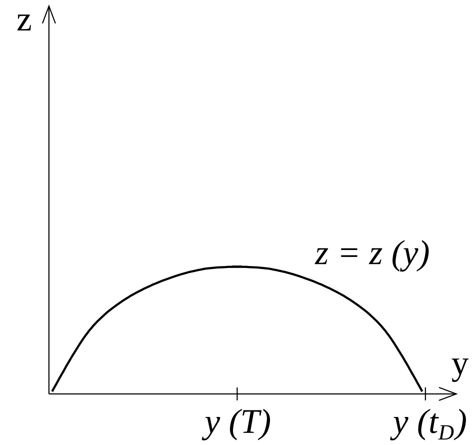

Abb. 2.5: Höhe-Weite-Verlauf beim schrägen Wurf.

Die Wurfdauer ergibt sich aus der Bedingung $z(t_D) = 0$ zu dem Doppelten der Steigzeit $t_0 = 2V_0\sin\alpha/g = 2T$. Die Wurfweite ist dann durch

$$y(t_D) = t_D V_0\cos\alpha = 2V_0^2\sin\alpha\cos\alpha/g = V_0^2\sin 2\alpha/g \tag{2.4.35}$$

gegeben. Die maximale Wurfweite bei konstantem V_0 wird für Abwurfwinkel $\alpha = \pi/4$ erreicht, weil dann $\sin 2\alpha = 1$ seinen maximalen Wert annimmt. Natürlich gelten diese Rechnungen nur bei Vernachlässigung der Luftreibung, die als nächstes betrachtet wird.

2.5 Reibung

2.5.1 Empirische Reibungskräfte

Die Wechselwirkung eines bewegten Körpers mit seiner ruhenden Umgebung führt zur Abbremsung des Körpers. Die Reibungskräfte sind stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und *nicht* konservativ, sodaß der Energiesatz (2.3.14) nicht gilt. Die kinetische Energie des Körpers wird in Wärme des Umgebungsmediums umgesetzt.

Für die Reibungskräfte bei Geschossen in zähen Medien macht man den allgemeinen Ansatz einer Geschwindigkeitsabhängigkeit

$$\vec{F}_R = -F(v)\frac{\vec{v}}{v} \tag{2.5.1}$$

und bestimmt die Proportionalitätsfunktion $F(v)$ empirisch. Als Annäherung verstehen sich die Fälle der

(a) **Stokesschen Reibung**

$$\vec{F}_R = -\beta\vec{v}, \quad \beta = const. > 0, \tag{2.5.2}$$

die für schnell bewegte Geschosse in zähen Medien gilt, und der

(b) **Newtonschen Reibung**

$$\vec{F}_R = -\gamma v\vec{v}, \quad \gamma = const. > 0, \tag{2.5.3}$$

die für langsam bewegte Geschosse in zähen Medien gilt.

Bei der Reibung zwischen festen Körpern unterscheidet man zwischen zwei Arten der Reibung: Gleitreibung und Haftreibung.

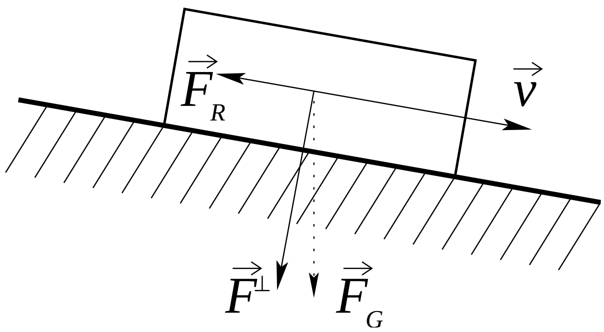

Abb. 2.6: Zur Illustration der Gleitreibung.

In Abb. 2.6 drückt der bewegte ($\vec{v} \neq \vec{0}$) Körper 1 mit der Kraftkomponente $\vec{F}^{\perp}$ auf seine Unterlage und die Gleitreibung

$$\vec{F}_R = -\mu_g|\vec{F}^{\perp}|\frac{\vec{v}}{v} \tag{2.5.4}$$

ist proportional zu dieser Kraftkomponente. Der Wert des konstanten Gleitreibungskoeffizienten μ_g hängt von den Materialen der Körper 1 und 2 ab.

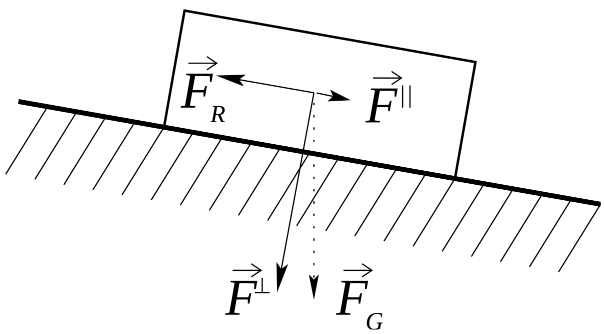

Abb. 2.7: Zur Illustration der Haftreibung.

In Abb. 2.7 verharrt Körper 1 in Ruhe ($\vec{v} = \vec{0}$), wenn die parallel angreifenden Kräfte gerade durch die Haftreibung kompensiert werden. Körper 1 bewegt sich nicht, solange

$$|\vec{F}^{\|}| < \mu_h|\vec{F}^{\perp}| \tag{2.5.5}$$

wobei der konstante Haftreibungskoeffizient μ_h wieder materialabhängig ist.

2.5.2 Schräger Wurf im Schwerefeld mit Reibung nach Stokes

Wir betrachten jetzt den Einfluß der Stokesschen Reibung auf den schrägen Wurf. Als Anfangsbedingung benutzen wir wieder Gleichung (2.4.30). Mit Gleichung (2.5.2) lautet die dynamische Bewegungsgleichung jetzt aber

$$m\ddot{\vec{r}} = -\beta\dot{\vec{r}} - \ mg\vec{e}_3 \tag{2.5.6}$$

oder

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\beta}{m}\vec{v} = -g\vec{e}_3 \tag{2.5.7}$$

Wegen (integrierender Faktor)

$$e^{-\beta t/m}\frac{d}{dt}[\vec{v}(t)e^{\beta t/m}] = \dot{\vec{v}} + \frac{\beta}{m}\vec{v}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}[\vec{v}(t)e^{\beta t/m}] = -g\vec{e}_3 e^{\beta t/m}$$

und durch direkte Integration

$$\vec{v}(t)e^{\beta t/m} = -g\vec{e}_3\int^t ds e^{\beta s/m} + \ \vec{c}_3 = -\frac{mg}{\beta}e^{\beta t/m}\vec{e}_3 + \ \vec{c}_3,$$

also

$$\vec{v}(t) = -\frac{mg}{\beta}\vec{e}_3 + \ \vec{c}_3 e^{-\beta t/m} \tag{2.5.8}$$

Mit der Anfangsbedingung (2.4.30) folgt

$$\vec{v}(t=0) = -\frac{mg}{\beta}\vec{e}_3 + \ \vec{c}_3 = V_0(\cos\alpha\vec{e}_2 + \sin\alpha\vec{e}_3),$$

also

$$\vec{c}_3 = \vec{v}(t=0) + \ \frac{mg}{\beta}\vec{e}_3 = V_0\cos\alpha\vec{e}_2 + \ (V_0\sin\alpha + \frac{mg}{\beta})\vec{e}_3 \tag{2.5.9}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (2.5.8) ein, erhalten wir

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = V_0\cos\alpha e^{-\beta t/m}\vec{e}_2 + \ \vec{e}_3[-\frac{mg}{\beta} + (V_0\sin\alpha + \frac{mg}{\beta})e^{-\beta t/m}] \tag{2.5.10}$$

Für große Zeiten $t >> m/\beta$ ist $e^{-\beta t/m} << 1$ und der Geschwindigkeitsverlauf (2.5.10) lässt sich gut durch

$$\vec{v}(t >> \frac{m}{\beta}) \simeq -\frac{mg}{\beta}\vec{e}_3 \tag{2.5.11}$$

approximieren, das dem senkrechten Fall mit der konstanten Geschwindigkeit (mg/β) entspricht.

Durch nochmalige Integration von Gleichung (2.5.10) erhalten wir für den Ort

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_4 - \frac{V_0 m}{\beta} \cos\alpha e^{-\beta t/m} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 [-\frac{mg}{\beta} t - \frac{m}{\beta}(V_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\beta}) e^{-\beta t/m}] \qquad (2.5.12)$$

Aus der Anfangsbedingung $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$ folgt

$$\vec{c}_4 = \frac{V_0 m}{\beta} \cos\alpha \vec{e}_2 + \frac{m}{\beta}(V_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\beta}) \vec{e}_3$$

und eingesetzt in Gleichung (2.5.12) ergibt sich als vollständige Lösung

$$\vec{r}(t) = (0, y(t), z(t)) = \frac{V_0 m}{\beta} \cos\alpha (1 - e^{-\beta t/m}) \vec{e}_2 + [-\frac{mg}{\beta} t + \frac{m}{\beta}(V_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\beta})(1 - e^{-\beta t/m})] \vec{e}_3 \qquad (2.5.13)$$

Für die y-Komponente erhalten wir

$$y(t) = \frac{V_0 m}{\beta} \cos\alpha (1 - e^{-\beta t/m}), \qquad (2.5.14)$$

die für große Zeiten $t >> m/\beta$ asymptotisch gegen die maximale Entfernung

$$y(t >> \frac{m}{\beta}) \to \frac{V_0 m}{\beta} \cos\alpha \qquad (2.5.15)$$

konvergiert. Gemäß Gleichung (2.5.14) erhalten wir für die Zeit

$$t = -\frac{m}{\beta} \ln[1 - \frac{\beta}{m} \frac{y}{V_0 \cos\alpha}] \qquad (2.5.16)$$

Setzen wir dies in die z-Komponente der Bewegungsgleichung

$$z(t) = -\frac{mg}{\beta} t + \frac{m}{\beta}(V_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\beta})(1 - e^{-\beta t/m})$$

ein, so folgt für die Bahngleichung

$$z(y) = \frac{m^2 g}{\beta^2} \ln[1 - \frac{\beta}{m} \frac{y}{V_0 \cos\alpha}] + (V_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\beta}) \frac{y}{V_0 \cos\alpha} \qquad (2.5.17)$$

Übungsaufgabe:

A2.5.1) Berechnen Sie die Bewegungsgleichung und die Bahnkurve für den schiefen Wurf im Schwerefeld mit Newtonscher Reibung.