0. Einleitung

0.1 Vorbemerkungen

Dieses Vorlesungsskript basiert auf Vorlesungen, die ich im Wintersemester 1998/99 und 2002/2003 an der Ruhr-Universität Bochum für Studierende des Diplomstudiengangs Physik im 3. Semester gehalten habe. Bei der Ausarbeitung habe ich vieles von den Skripten gleichnamiger Vorlesungen von Prof. Dr. Dieter Schlüter an der Universität Kiel und Prof. Dr. Max Huber an der Universität Bonn übernommen. Besonders danken möchte ich Herrn cand. phys. Urs Schaefer-Rolffs, der die grafischen Illustrationen zum Buch beigetragen hat, und Herrn cand. phys. Stephan Meißner, der viele Schreibfehler in einer früheren Version gefunden hat.

Ich hoffe, daß dieses Skript vielen Studierenden beim Erlernen der Theoretischen Mechanik hilft.

Reinhard Schlickeiser, Bochum, im September 2003

1. Vektorrechnung

1.1 Grunddefinitionen

1.1.1 Skalare und Vektoren

Skalare sind physikalische Größen, die durch Angaben eines Zahlenwertes vollständig bestimmt sind wie z.B. Masse, Temperatur, Frequenz, Energie.
Vektoren: die vollständige Beschreibung eines Vektors $\vec{a}$ erfordert neben dem Zahlenwert, dem Betrag, noch die Angabe der Richtung des Vektors. Beispiele für physikalische Vektorgrößen sind Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Drehmoment. Ein Vektor wird geometrisch durch einen Pfeil in Richtung des Vektors dargestellt, wobei die Länge des Vektors proportional zu seinem Betrag $a = |\vec{a}|$ ist.

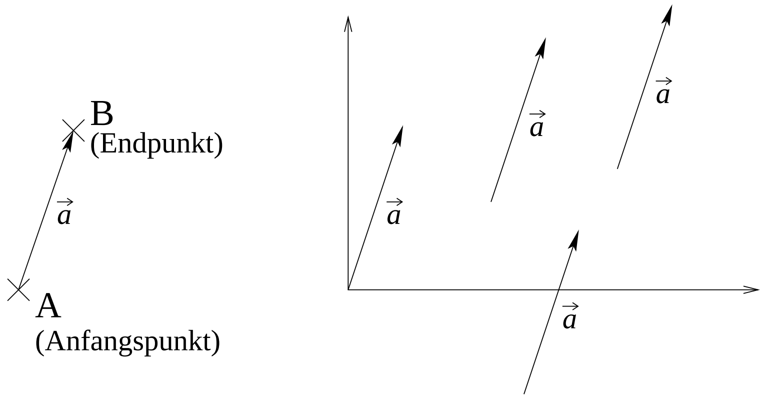


Abb. 1.1: Geometrische Darstellung eines Vektors $\vec{a}$.

Definition : Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **gleich**, wenn
1) deren Beträge gleich sind: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und
2) deren Richtungen gleichgerichtet (parallel) sind: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.
Definition : Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **entgegengesetzt gleich**, wenn
1) deren Beträge gleich sind: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und
2) deren Richtungen entgegengerichtet (antiparallel) sind: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.
Man bezeichnet den zu $\vec{a}$ entgegengesetzt gleichen Vektor mit $-\vec{a}$.
Aus Definition 1 ergibt sich die **Folgerung:** Ein Vektor ist unverändert, wenn er parallel zu sich selbst verschoben wird.

1.1.2 Einheitsvektor

Definition : Als **Einheitsvektor** bezeichnet man einen Vektor mit dem Betrag 1.
Es folgt: ist $\vec{a} \neq \vec{0}$ ein beliebiger vom Nullvektor verschiedener Vektor, so ist

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}$$

ein Einheitsvektor.

Definition : **Kartesische Einheitsvektoren** sind Einheitsvektoren, die in in einem kartesischen Koordinatensystem in Richtung der positiven x-, y- oder z-Achse liegen (siehe Abbildung 1.2).

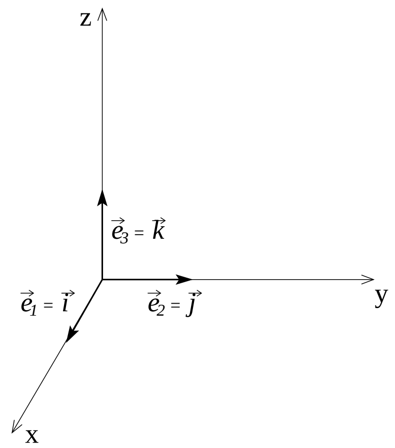


Abb. 1.2: Darstellung von kartesischen Einheitsvektoren.

1.2 Vektoroperationen

Wir definieren fünf Vektoroperationen: Addition, Subtraktion und drei Arten der Multiplikation.

1.2.1 Addition von Vektoren

Die **Addition** zweier Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ erfolgt so, daß der Vektor $\vec{b}$ so verschoben werden darf, daß sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt des Vektors $\vec{a}$ zusammenfällt (siehe Abbildung 1.3).

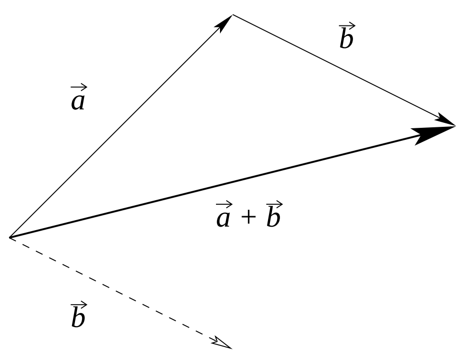


Abb. 1.3: Geometrische Darstellung der Addition zweier Vektoren.

Für die Addition von Vektoren gelten
das Kommutativitätsgesetz $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ und
das Assoziativitätsgesetz $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

1.2.2 Subtraktion von Vektoren und Nullvektor

Die **Subtraktion** ist definiert als die Addition des Entgegengesetzt-Vektors:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (\vec{-b}) \tag{1.2.1}$$

Der **Nullvektor** $\vec{0} \equiv \vec{a} - \vec{a}$ hat den Betrag 0 und ist richtungslos.

1.2.3 Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

Sei p eine reelle Zahl. Der Vektor $p\vec{a}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\vec{a}$ und den Betrag $|p\vec{a}| = |p||\vec{a}|$.
Seien p, q reelle Zahlen. Dann gilt

$$q(p\vec{a}) = p(q\vec{a}) = qp\vec{a}$$
$$(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$$
$$p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$$

1.2.4 Skalarprodukt von Vektoren

Definition: Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren ($\vec{a}$ und $\vec{b}$) ist definiert als die reelle Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\phi, \quad \phi = \angle(\vec{a}, \vec{b}), \tag{1.2.2}$$

wobei ϕ den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet. Anschaulich (Abb. 1.4) entspricht das Skalarprodukt der Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$, multipliziert mit dem Betrag $|\vec{a}|$ des Vektors $\vec{a}$, oder der Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$, multipliziert mit dem Betrag $|\vec{b}|$ des Vektors $\vec{b}$.

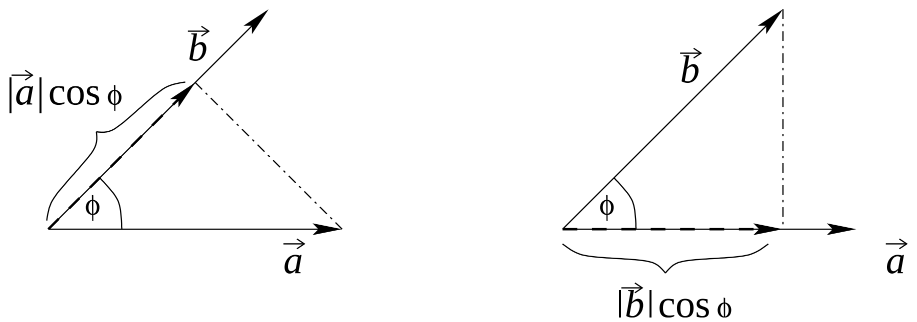


Abb. 1.4: Geometrische Darstellung des Skalarprodukts $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Offensichtlich hat das Skalarprodukt folgende Eigenschaften:
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ nimmt seinen größten Wert $|\vec{a}||\vec{b}| = ab$ für gleichgerichtete Vektoren an, sodaß der Winkel $\phi = 0$ ist.
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ nimmt seinen kleinsten Wert $-|\vec{a}||\vec{b}| = -ab$ für entgegengerichtete Vektoren an, sodaß der Winkel $\phi = \pi$ ist.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, d.h. $\phi = \pi/2$ oder $\vec{a} \perp \vec{b}$.
Für das Skalarprodukt gelten folgende Rechenregeln:
Kommutativitätsgesetz $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Distributivitätsgesetz $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
Mit reeller Zahl p gilt

$$p(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (p\vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Da der eingeschlossene Winkel zwischen zwei jeweiligen kartesischen Einheitsvektoren entweder Null oder ein rechter ($\phi = \pi/2$) Winkel ist, gelten die **Orthonormalitätsrelationen**

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \tag{1.2.3}$$

und die **Orthogonalitätsrelationen**

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{1.2.4}$$

oder zusammenfassend

$$\vec{e}_\nu \cdot \vec{e}_\mu = \delta_{\nu\mu} \tag{1.2.5}$$

wobei das **Kronecker-Symbol**

$$\delta_{\nu\mu} \equiv \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \nu \neq \mu \\ 1 & \text{für} \quad \nu = \mu \end{cases} \tag{1.2.6}$$

eingeführt wurde.

1.2.5 Kreuzprodukt von Vektoren

Definition: Das **Kreuzprodukt** oder auch **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist durch den Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\phi\,\vec{n} \tag{1.2.7}$$

wobei $\vec{n}$ den Einheitsvektor bezeichnet, der senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ festgelegten Ebene steht (Rechte-Hand-Regel). Der Betrag des Kreuzprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms (siehe Abbildung 1.5).

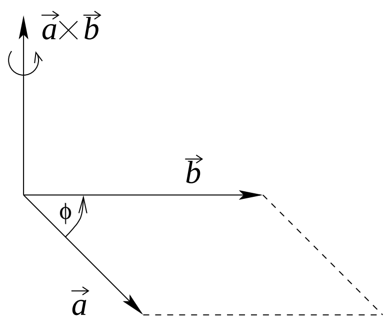


Abb. 1.5: Geometrische Darstellung des Kreuzprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$.

Offensichtlich hat das Kreuzprodukt folgende Eigenschaften:
(a) $\vec{a} \times \vec{b}$ hat seinen größten Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, d.h. $\phi = \pi/2$ oder $\vec{a} \perp \vec{b}$.
(b) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, wenn die Vektoren gleichgerichtet ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) oder entgegengesetzt ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$) gerichtet sind.
(c) Es gilt speziell $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
Mit $\odot$ kennzeichnet man einen Vektor, der senkrecht zur Zeichenebene steht und aus ihr herausragt; mit $\otimes$ kennzeichnet man einen Vektor, der senkrecht zur Zeichenebene steht und in sie hineinzeigt.
Für das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln:
(d) Anti-Kommutativitätsgesetz $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, d.h. die Reihenfolge der Verknüpfung ist wichtig.
(e) Distributivitätsgesetz $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$. Dieses Gesetz läßt sich am besten geometrisch beweisen.
(f) Keine Assoziativität: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
(g) Mit reeller Zahl p gilt

$$p(\vec{a} \times \vec{b}) = (p\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (p\vec{b})$$

Für das Kreuzprodukt der kartesischen Einheitsvektoren gilt

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0, \quad \vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k}, \quad \vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i}, \quad \vec{k}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{k} = \vec{j} \quad (1.2.8)$$

1.3 Komponentendarstellung von Vektoren in kartesischen Koordinaten

Jeder Vektor kann als Linearkombination der kartesischen Einheitsvektoren dargestellt werden:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

wobei (mit $a = |\vec{a}|$) $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} = a\cos\alpha$, $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j} = a\cos\beta$ und $a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} = a\cos\gamma$ die jeweiligen Projektionen auf die kartesischen Einheitsvektoren bezeichnen (siehe Abbildung 1.6).

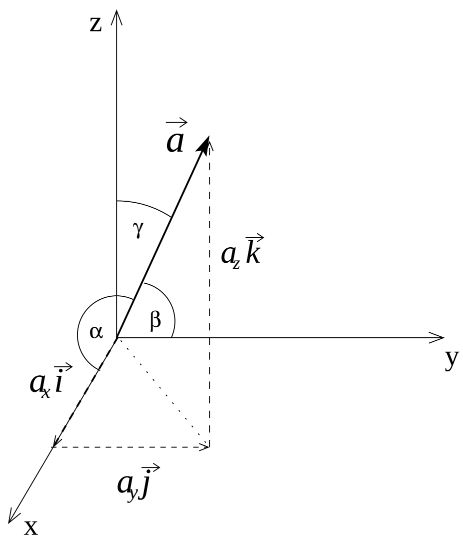


Abb. 1.6: Darstellung der Komponentendarstellung von Vektoren.

Nach dem Satz von Pythagoras gilt dann:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.3.2}$$

sodaß folgt

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a} \tag{1.3.3}$$

Mit der Komponentendarstellung lassen sich die Vektoroperationen aus Kap. 1.2 anders formulieren:

(a) für die Addition gilt

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k},$$

d.h. Vektoren werden addiert, indem man sie komponentenweise addiert.

(b) Multiplikation mit Skalaren:

$$p\vec{a} = p(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = (pa_x)\vec{i} + (pa_y)\vec{j} + (pa_z)\vec{k}$$

(c) Für das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt sich unter Ausnutzung der Orthonormalitätsrelationen (1.2.3)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k} + a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k} + a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k} =$$

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{1.3.4}$$

oder mit $a_x = a_1$, $a_y = a_2$, $a_z = a_3$, d.h. $\vec{a} = \sum_{n=1}^{3} a_n\vec{e}_n$ und $\vec{b} = \sum_{m=1}^{3} a_m\vec{e}_m$ kurz geschrieben als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{n=1}^{3} a_nb_n \tag{1.3.5}$$

Mit der Komponentendarstellung läßt sich der Winkel zwischen zwei Vektoren ϕ bequem ausrechnen. Es gilt mit Gl. (1.3.4)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\phi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

sodaß

$$\phi = \arccos\Big[\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\Big] \tag{1.3.6}$$

Beispiel: Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ und $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$. Dann ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 - 12 - 9 = -9$, $a = \sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61} = 7.81$ und $b = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22} = 4.69$, sodaß $\cos\phi = \frac{-9}{7.81 \cdot 4.69} = -0.246$ und $\phi = 1.82$ radian oder $\phi = 104.2$ Grad.

(d) Mit der Komponentendarstellung $\vec{a} = \sum_{n=1}^{3} a_n \vec{e}_n$ und $\vec{b} = \sum_{m=1}^{3} b_m \vec{e}_m$ folgt für das Kreuzprodukt unter Ausnutzung der bisherigen Regeln

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) =$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \tag{1.3.7}$$

Dieses Ergebnis läßt sich offensichtlich als Determinante darstellen, denn

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \tag{1.3.8}$$

Das Kreuzprodukt läßt sich auch mithilfe des **Levi-Civitta-Symbols**

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{wenn mindestens zwei der Indizes } i, j, k \text{ gleich sind} \\ 1 & \text{wenn die Indizes } i, j, k \text{ eine gerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ sind} \\ -1 & \text{wenn die Indizes } i, j, k \text{ eine ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ sind} \end{cases} \tag{1.3.9}$$

darstellen. Im einzelnen gilt

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{222} = \epsilon_{333} = \epsilon_{122} = \epsilon_{133} = 0 \text{ usw. }, \quad \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \tag{1.3.10}$$

Dann gilt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \text{ wobei } c_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{1.3.11}$$

Benutzt man die **Einsteinsche Summenkonvention**, daß über alle doppelt auftretenden Indizes in einer Gleichung summiert werden muss, schreibt sich Gl. (1.3.11) kurz als

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Für das **dreifache Kreuzprodukt** gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{1.3.12}$$

Beweis : Zum Beweis von (1.3.12) betrachten wir die x-Komponente des dreifachen Kreuzprodukts:

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_x = a_y(\vec{b} \times \vec{c})_z - a_z(\vec{b} \times \vec{c})_y = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(-b_x c_z + b_z c_x)$$

und addieren auf beiden Seiten den Ausdruck

$$0 = a_x b_x c_x - a_x b_x c_x$$

dazu. Es ergibt sich

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = b_x(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_x(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Ebenso verfährt man mit den y- und z-Komponenten, sodaß die Behauptung bewiesen ist. Q.E.D.

Übungsaufgaben:

A1.3.1) Drei Vektoren sind gegeben durch $\vec{P} = (3, 2, -1)$, $\vec{Q} = (-6, -4, 2)$ und $\vec{R} = (1, -2, 1)$. Berechnen Sie die Winkel zwischen diesen Vektoren, um herauszufinden, welche dieser Vektoren senkrecht zueinander stehen oder gleichgerichtet oder entgegengesetzt gleichgerichtet sind.

A1.3.2) Bestimmen Sie die Seitenlängen und Winkel des Dreiecks ABC, das durch die drei Vektoren $\vec{A} = (1, 0, 0)$, $\vec{B} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ und $\vec{C} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ festgelegt ist. Jeder Vektor beginnt im Ursprung.

A1.3.3) Die magnetische Induktion $\vec{B}$ ist durch die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ bestimmt. Durch drei Messungen finden wir, daß für (i) $\vec{v} = \vec{e}_1$, $\vec{F}/q = 2\vec{e}_3 - 4\vec{e}_2$, (ii)$\vec{v} = \vec{e}_2$, $\vec{F}/q = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_3$, (iii)$\vec{v} = \vec{e}_3$, $\vec{F}/q = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1$. Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$.

A1.3.4) Beweisen Sie die Identitäten (mit Summenkonvention)

(a)

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

(b)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

(Hinweis: benutzen Sie Identität (a))

(c)$\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

1.4 Spatprodukt

Unter dem Spatprodukt versteht man das "gemischte" Produkt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.
In Komponenten-Schreibweise ergibt sich

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot [(b_1, b_2, b_3) \times (c_1, c_2, c_3)] = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ -b_1 c_3 + b_3 c_1 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} =$$

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(-b_1c_3 + b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1.4.1}$$

Aufgrund der Determinantenregel über die Vertauschbarkeit von Zeilen folgt, daß das Spatprodukt zyklisch vertauschbar ist:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{1.4.2}$$

Geometrisch entspricht das Spatprodukt dem Volumen eines aus den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (siehe Abbildung 1.7).

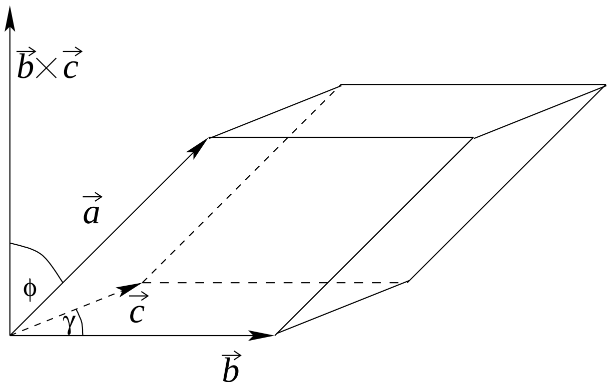


Abb. 1.7: Darstellung des Parallelepipeds.

Es ergibt sich ein verschwindendes Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, wenn alle drei Vektoren in einer Ebene liegen oder zwei der drei Vektoren auf einer Geraden liegen.

Übungsaufgabe:
A1.4.1: Beweisen Sie die Identität von Lagrange:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

1.5 Transformation von Vektoren

Gemäß bisheriger Definition (siehe Kap. 1.1) ist ein Vektor "eine Größe mit Absolutwert und Richtung". Aber was heißt "Richtung" genau ? Man kann nicht einfach sagen, daß ein Vektor eine Menge mit drei Komponenten ist. Die Eigenschaft "Richtung" läßt sich aber genau festlegen durch das Transformationsverhalten von Vektoren bei "Anderung" des Koordinatensystems. Dazu führen wir zunächst den Begriff des **Ortsvektors** ein.

Definition : Ortsvektor: Jeder Punkt $P(x, y, z)$ in einem dreidimensionalen Koordiantensystem (x, y, z) kann durch seinen Ortsvektor $\vec{r}$ eindeutig festgelegt werden, der als Abstandsvektor vom Ursprung $O(0, 0, 0)$ des Koordinatensystems definiert ist:

$$\vec{r} = \overline{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = z\vec{e}_z = (x, y, z) \tag{1.5.1}$$

Nun nehmen wir an, daß es ein zweites Koordiantensystem $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ gibt, das um einen Winkel ϕ relativ zum System (x, y, z) um die gemeinsame x-Achse gedreht ist (siehe Abbildung 1.8)

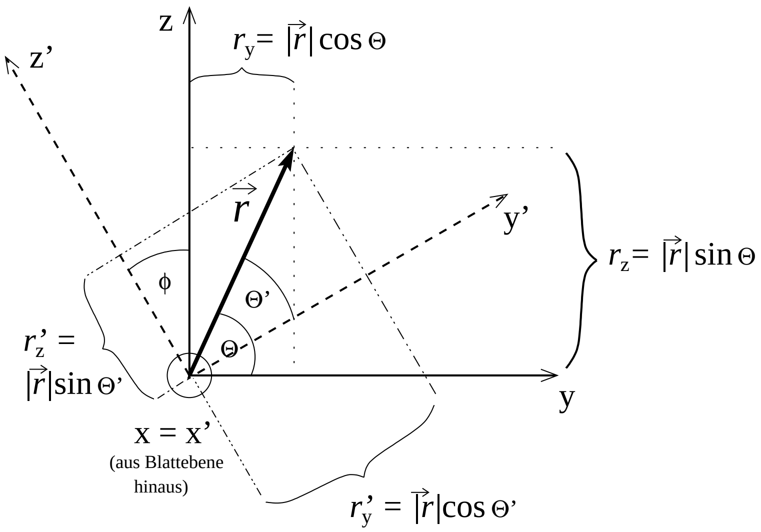


Abb. 1.8: Der Ortsvektor in zwei zueinander gedrehten Koordinatensystemen.

Bezüglich der Komponenten des Ortsvektors $\vec{r}$ gilt im ungestrichen Koordinatensystem

$$r_y = r \cos \Theta, \quad r_z = r \sin \Theta, \tag{1.5.2}$$

wobei $r = |\vec{r}|$ der Betrag des Ortsvektors ist.
Ebenso gilt im gestrichenen Koordinatensystem

$$r_y^{'} = r \cos \Theta^{'}, \quad r_z{'} = r \sin \Theta^{'} \tag{1.5.3}$$

Weil gemäß der Abbildung $\Theta^{'} = \Theta - \phi$ ist folgt

$$r_y^{'} = r \cos(\Theta - \phi) = r[\cos \Theta \cos \phi + \sin \Theta \sin \phi] = r_y \cos \phi + r_z \sin \phi, \tag{1.5.4a}$$

$$r_z^{'} = r \sin(\Theta - \phi) = r[\sin \Theta \cos \phi - \cos \Theta \sin \phi] = -r_y \sin \phi + r_z \cos \phi, \tag{1.5.4b}$$

wobei wir die Gleichungen (1.5.2) benutzt haben. Darüber hinaus gilt natürlich

$$r_x^{'} = r_x \tag{1.5.5}$$

Die Zusammenhänge (1.5.4)–(1.5.5) können wir als Matrizengleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} r_x^{'} \\ r_y^{'} \\ r_z^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \tag{1.5.6}$$

Verallgemeinert man diese Beziehungen auf eine Drehung um eine beliebige Achse im dreidimensionalen Raum, so erhält man

$$\begin{pmatrix} r_x^{'} \\ r_y^{'} \\ r_z^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, \tag{1.5.7}$$

oder kompakter geschrieben als

$$r_i^{'} = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} r_j, \tag{1.5.8}$$

wobei der Index 1 dem Index x, der Index 2 dem Index y und der Index 3 dem Index y entspricht.
Mit Gleichung (1.5.8) können wir jetzt formal definieren:
Definition: Ein Vektor (oder ein Tensor 1.Ordnung) ist eine Menge von drei Komponenten, die sich gemäß Gleichung (1.5.8) transformieren, also das gleiche Transformationsverhalten zeigen wie der Ortsvektor bei einer Koordinatendrehung.
Als Nebenbemerkungen vermerken wir:
1) Ein Tensor 2. Ordnung ist eine Größe mit neun Komponenten T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yx}, ... T_{zz}, die sich gemäß

$$T_{ij}^{'} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} R_{ik} R_{jl} T_{kl} \tag{1.5.9}$$

transformieren.
2) Ein Skalar ist ein Tensor 0. Ordnung.

1.6 Anwendungen der Vektorrechnung

1.6.1 Abstand zweier Punkte

Der Anstandsvektor zwischen zwei Punkten P_1 mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und P_2 mit dem Ortsvektor $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ist gegeben durch

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{1.6.1.1}$$

Der Betrag des Abstandsvektors ist dann

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.6.1.2}$$

1.6.2 Geradengleichung und Ebenengleichung

Die Punkte A und B seien durch ihre Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (siehe Abbildung 1.9) gegeben. Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B?

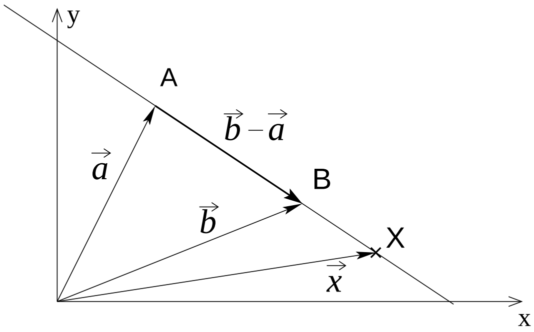


Abb. 1.9: Geradengleichung.

Die Gerade durch die Punkte A und B ist parallel zum Abstandsvektor $\vec{b}-\vec{a}$, und sie geht durch den Punkt A. Für jeden Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes X auf der gesuchten Geraden gilt dann

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \tag{1.6.2.1}$$

wobei λ eine beliebige reelle Zahl ist.
Sind nur ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ und ein Richtungsvektor $\vec{u}$ gegeben, so lautet die **Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung**

$$\vec{x}_G = \vec{a} + \lambda\vec{u}, \tag{1.6.2.2}$$

wobei wieder λ eine beliebige reelle Zahl ist.
Gibt man außer dem Orstvektor $\vec{a}$ und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ noch einen zweiten Richtungsvektor $\vec{v}$ vor, so kann man dadurch eine Ebene im Raum genau festlegen. Für alle Punkte in dieser Ebene gilt die **Punkt-Richtungs-Form der Ebenengleichung**

$$\vec{x}_G = \vec{a} + k\vec{u} + t\vec{v}, \text{ mit } \vec{u} \neq \vec{v}, \tag{1.6.2.3}$$

wobei k und t beliebige reelle Zahlen sind.

1.6.3 Kosinussatz

Für das durch die drei Vektoren (siehe Abbildung 1.10) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildete Dreieck gilt $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, sodaß

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{1.6.3.1}$$

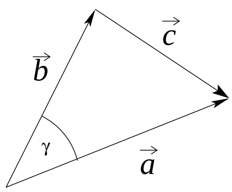


Abb. 1.10: Zum Kosinussatz.

1.6.4 Überlagerung von Kräften

Vier in einer Ebene liegenden Kräfte, jeweils in der Einheit N (1N= 1kg m s^{-2}) gemesssen, $\vec{F}_1 = (-95.3, 53)$, $\vec{F}_2 = (-150.4, -54.7)$, $\vec{F}_3 = (71, 71)$, $\vec{F}_4 = (80, 0)$ wirken auf den Punkt O.

Für die Gesamtkraft ergibt sich

$$\vec{F}_G = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = (-94.7, 71.3)$$

Der Betrag der Gesamtkraft ist $F_G = \sqrt{94.7^2 + 69.3^2} = 118$ N und die Kraft wirkt in Richtung des Winkels $\beta = -36$ Grad zur $x-$Achse, wobei β aus

$$\tan\beta = F_{G,y}/F_{G,x} = -\frac{69.3}{94.7} = -0.732$$

berechnet wird.

1.7 Differentiation und Integration von Vektoren

1.7.1 Differentiation von Vektoren

Der Vektor $\vec{A}$ kann eine Funktion des skalaren Parameters u sein, d.h. $\vec{A} = A(\vec{u})$. In Komponentenschreibweise gilt dann

$$A(\vec{u}) = A_x(u)\vec{e}_1 + A_y(u)\vec{e}_2 + A_z(u)\vec{e}_3 \tag{1.7.1.1}$$

Da die kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ nicht variabel sind, definiert man das **Differential** des Vektors als

$$\frac{dA(\vec{u})}{du} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{A(u \vec{+} \Delta u) - A(\vec{u})}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \Big[\frac{A_x(u+\Delta u) - A_x(u)}{\Delta u}\vec{e}_1 + \frac{A_y(u+\Delta u) - A_y(u)}{\Delta u}\vec{e}_2 + \frac{A_z(u+\Delta u) - A_z(u)}{\Delta u}\vec{e}_3 \Big] \tag{1.7.1.2}$$

sodaß

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_x(u)}{du}\vec{e}_1 + \frac{dA_y(u)}{du}\vec{e}_2 + \frac{dA_z(u)}{du}\vec{e}_3 \tag{1.7.1.3}$$

Analog ergeben sich höhere Ableitungen zu

$$\frac{d^n\vec{A}(u)}{du^n} = \frac{d^nA_x(u)}{du^n}\vec{e}_1 + \frac{d^nA_y(u)}{du^n}\vec{e}_2 + \frac{d^nA_z(u)}{du^n}\vec{e}_3 \tag{1.7.1.4}$$

Es gelten folgende Regeln, die man leicht über die Komponentendarstellung (1.7.1.1) beweist:

(a)

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \tag{1.7.1.5}$$

(b)

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B} \tag{1.7.1.6}$$

(c)

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} \tag{1.7.1.7}$$

(d) Falls $\Phi(u)$ eine skalare Funktion bezeichnet gilt

$$\frac{d}{du}(\Phi\vec{A}) = \Phi\frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\Phi}{du}\vec{A} \tag{1.7.1.8}$$

Wichtige physikalische Vektoren, die als Ableitungen von Vektoren definiert sind, sind die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \tag{1.7.1.9}$$

als Zeitableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ eines Punktteilchens und die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) \tag{1.7.1.10}$$

als Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{r}(t)$ und somit als zweite zeitliche Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

Betrachten wir als **Beispiel** die Bewegung eines Teilches auf einer Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), 0) \tag{1.7.1.11}$$

mit dem Radius R und der Winkelgeschwindigkeit ω (siehe Abbildung 1.11). In einer Umlaufzeit $T = 2\pi/\omega$ hat das Teilchen einen kompletten Umlauf absolviert.

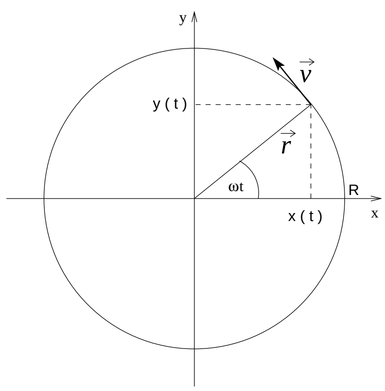


Abb. 1.11: Kreisbewegung.

Durch Ableitung des Ortsvektors (1.7.1.9) nach der Zeit t erhalten wir für die Teilchengeschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0) \tag{1.7.1.12}$$

und durch nochmaliges Ableiten für die Teilchenbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0) = -\omega^2\vec{r}(t). \tag{1.7.1.13}$$

Man erkennt sofort, daß die Beschleunigung in Gegenrichtung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ wirkt, was man als "Zentripetalbeschleunigung" bezeichnet. Darüber hinaus folgt für alle Zeiten t, daß

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) = R^2\omega(-\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)) = 0, \tag{1.7.1.14}$$

d.h. daß der Geschwindigkeitsvektor senkrecht zum Ortsvektor ($\vec{v} \perp \vec{r}$) steht.
Für den Betrag der Geschwindigkeit erhält man

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\omega^2 R^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = \omega R = \frac{2\pi R}{T} \tag{1.7.1.15}$$

Dies entspricht gerade dem Verhältnis aus Kreisumfang ($2\pi R$) zur Umlaufzeit T.
Für den Betrag der Beschleunigung ergibt sich

$$a = |\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \tag{1.7.1.16}$$

1.7.2 Integration von Vektoren

Analog zur Definition der Ableitung (1.7.1.2) eines Vektors definiert man das Integral eines Vektors $\vec{A}(u)$ über die Integrale seiner Komponenten

$$\begin{aligned}\int du\, \vec{A}(u) \equiv \int du\, \left[A_x(u)\vec{e}_1 + A_y(u)\vec{e}_2 + A_z(u)\vec{e}_3\right] = \\ \int du\, A_x(u)\, \vec{e}_1 + \int du\, A_y(u)\, \vec{e}_2 + \int du\, A_z(u)\, \vec{e}_3\end{aligned} \tag{1.7.2.1}$$

Als **Beispiel** betrachten wir den Vektor $\vec{A}(u) = (3u^2 - 1, 2u - 3, 6u^2 - 4u)$ und berechnen das Integral $\int_0^2 du\, \vec{A}(u)$. Entsprechend der Definition (1.7.2.1) ergibt sich

$$\int_0^2 du\, \vec{A}(u) = \int_0^2 du\, (3u^2 - 1, 2u - 3, 6u^2 - 4u) = [u^3 - u, u^2 - 3u, 2u^3 - 2u^2]_0^2 = (6, -2, 8) \tag{1.7.2.2}$$

1.8 Koordinatensysteme

Bisher haben wir nur mit **kartesischen Koordinaten** x, y, z gearbeitet. x, y, z eines Punktes P sind definiert als die Projektionen des Ortsvektors $\vec{r} = \overline{OP}$ auf die Achsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, d.h.

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad \text{mit } |\vec{e}_i| = 1, \;\; i = 1, 2, 3 \tag{1.8.1}$$

Wir betrachten jetzt zusätzlich **neue Koordinatensysteme** q_1, q_2, q_3 mit den Transformationsgleichungen

$$q_1 = q_1(x, y, z),\;\; q_2 = q_2(x, y, z),\;\; q_3 = q_3(x, y, z) \tag{1.8.2}$$

und der Umkehrtransformation

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \tag{1.8.3}$$

Der Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes P kann dann mittels Gleichung (1.8.3) als Funktion der krummlinigen Koordinaten q_i aufgefaßt werden:

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3) = (x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)) \tag{1.8.4}$$

1.8.1 Koordinatenlinien und Koordinatenflächen

Hält man zwei dieser drei neuen Koordinaten konstant und variiert man nur die dritte neue Koordiante, so erhält man drei **Koordinatenlinien**:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2 = c_2, q_3 = c_3) \\ L_2: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1 = c_1, q_2, q_3 = c_3) \\ L_3: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1 = c_1, q_2 = c_2, q_3) \end{aligned}$$

Ist eine dieser Koordinatenlinien keine Gerade, so spricht man von **krummlinigen Koordinaten**.
Hält man nur eine neue Koordinate fest und variiert jeweils die beiden anderen, so erhält man **Koordinatenflächen**:

$$\begin{aligned} F_1: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1 = c_1, q_2, q_3) \\ F_2: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2 = c_2, q_3) \\ F_3: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3 = c_3) \end{aligned}$$

Die Koordinatenlinien L_i entstehen jeweils durch Schnitt jeweils zwei dieser Koordinatenflächen.

1.8.2 Festlegung von Einheitsvektoren

Als normierten Basisvektor oder Einheitsvektor $\vec{e}_{q_1}$ im Punkt P wählen wir einen Vektor vom Betrag 1 tangential zur Koordinatenlinie L_1 ($q_2 = c_2$, $q_3 = c_3$) im Punkt P. Seine Richtung soll dem Durchlaufsinn der Koordinatenlinie bei wachsendem q_1 entsprechen:

$$\vec{e}_{q_1} \equiv \frac{\partial\vec{r}/\partial q_1}{|\partial\vec{r}/\partial q_1|} \tag{1.8.2.1}$$

oder für $i = 1, 2, 3$

$$\partial\vec{r}/\partial q_i = h_i \vec{e}_{q_i} \tag{1.8.2.2}$$

mit dem Skalenfaktor

$$h_i = |\partial\vec{r}/\partial q_i| \tag{1.8.2.3}$$

Dies führen wir am Beispiel der Zylinderkoordinaten vor.

1.8.3 Beispiel: Zylinderkoordinaten

Gemäß Abbildung 1.11 werden als neue Koordianten gewählt:
ϕ: der Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors auf die $x-y$-Ebene und der x-Achse,
ρ: der Abstand des Punktes P von der $z-$Achse,
z : die Länge der Projektion des Ortsvektors auf die z-Achse.

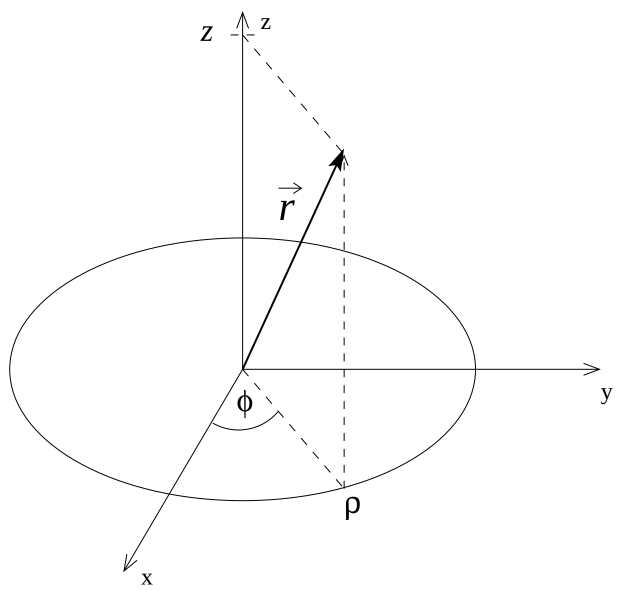


Abb. 1.12: Zur Einführung der Zylinderkoordinaten.

Aus Abbildung 1.11 erhalten wir als Transformationsgleichungen

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan(y/x), \quad z = z \tag{1.8.3.1}$$

und als Umkehrtransformation

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \tag{1.8.3.2}$$

mit den Einschränkungen $\rho \geq 0$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Man erkennt, daß jedem Tripel (ρ, ϕ, z) exakt nur ein Raumpunkt zugeordnet ist.

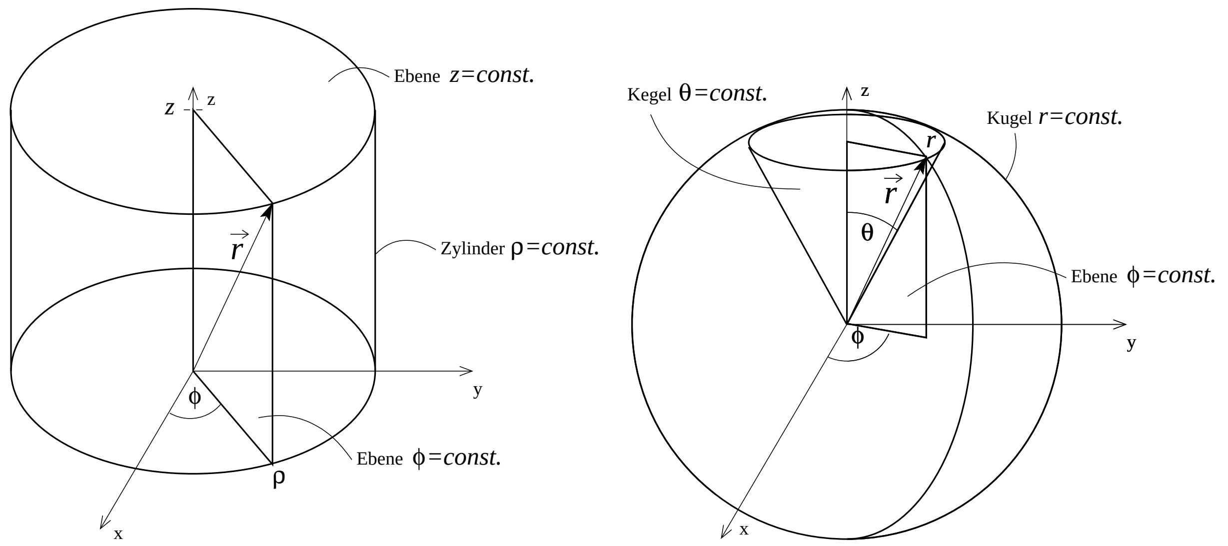


Abb. 1.13: Koordinatenflächen und Koordinatenlinien für Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten.

Abbildung 1.13 zeigt, daß die Koordinatenfläche für $\rho = const.$ einem Kreiszylinder um die z-Achse entspricht. Die Koordinatenfläche für $\phi = const.$ ergibt eine Halbebene, die die z-Achse enthält, während die Koordinatenfläche für $z = const.$ eine Ebene parallel zur $x-y$-Ebene ergibt.
Gemäß der Definition (1.8.2.2) erhalten wir mit $\vec{r} = (x, y, z) = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi, z)$ für die drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}/\partial\rho}{|\partial\vec{r}/\partial\rho|} = (\cos\phi, \sin\phi, 0) \tag{1.8.3.3}$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial\vec{r}/\partial\phi}{|\partial\vec{r}/\partial\phi|} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \tag{1.8.3.4}$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial\vec{r}/\partial z}{|\partial\vec{r}/\partial z|} = (0, 0, 1) \tag{1.8.3.5}$$

Offensichtlich ist $\vec{e}_\rho$ parallel zur $x-y$-Ebene und zeigt weg von der z-Achse; $\vec{e}_\phi$ ist ebenfalls parallel zur $x-y$-Ebene und ist die Tangente an den Kreis $z = const.$ und $\rho = const.$; $\vec{e}_z$ entspricht dem kartesischen Einheitsvektor $\vec{e}_3$.
Aus den Beziehungen (1.8.3.3)-(1.8.3.4) erhält man

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho \cos\phi - \vec{e}_\phi \sin\phi, \;\; \vec{e}_2 = \vec{e}_\rho \sin\phi + \vec{e}_\phi \cos\phi \tag{1.8.3.6}$$

Durch Berechnung des Spatprodukts mit Gleichung (1.4.1)

$$\vec{e}_\rho \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z) = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

läßt sich sofort überprüfen, daß die Zylinderkoordinaten ein orthogonales Koordinatensystem mit variablen Einheitsvektoren bilden.
Aufgrund der Variabilität der Einheitsvektoren folgt für die totalen zeitlichen Ableitungen

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 + (-\sin\phi, \cos\phi)\dot{\phi} + 0 = \dot{\phi}\vec{e}_\phi, \tag{1.8.3.7}$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = 0 + (-\cos\phi, -\sin\phi)\dot{\phi} + 0 = -\dot{\phi}\vec{e}_\rho \tag{1.8.3.8}$$

$$\frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0 \tag{1.8.3.9}$$

Gleichungen (1.8.3.7)-(1.8.3.9) stimmen mit dem allgemeinen Ergebnis

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} \perp \vec{e}_j \tag{1.8.3.10}$$

überein, das sofort aus $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j = const.$ durch Differentiation nach t folgt:

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} \cdot \vec{e}_j = 0 \tag{1.8.3.11}$$

Abschließend berechnen wir den Geschwindigkeitsvektor und den Beschleunigungsvektor in Zylinderkoordinaten. Gegeben sei der Ortsvektor eines Punkts auf der Bahnkurve $\vec{r}(t) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$. Mit Gleichung (1.8.3.4) folgt

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{e}_\phi = -\rho\cos\phi\sin\phi + \rho\sin\phi\cos\phi = 0,$$

sodaß der Ortsvektor keine Komponente parallel zu $\vec{e}_\phi$ hat. Deshalb gilt die Darstellung

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(t) + \ z(t)\vec{e}_z(t) \tag{1.8.3.12}$$

Wegen der Zeitvariabilität der Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho(t)$ und $\vec{e}_z(t)$ folgt mit Gleichung (1.8.3.7) und (1.8.3.9)

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z + z\dot{\vec{e}}_z\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z \tag{1.8.3.13}$$

Daraus erhält man drei Anteile für den Beschleunigungsvektor

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\vec{e}_\phi + \rho\dot{\phi}\dot{\vec{e}}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\dot{\vec{e}}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \dot{\rho}\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z \end{aligned} \tag{1.8.3.14}$$

Übungsaufgabe:

A1.8.1) Berechnen Sie die Einheitsvektoren sowie den Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor in Kugelkoordinaten $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Drücken Sie $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ als Funktion der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ aus.

Verifizieren Sie dabei folgende Ergebnisse:

$$\vec{e}_r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{1.8.3.15}$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \tag{1.8.3.16}$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \tag{1.8.3.17}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi \tag{1.8.3.18}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + [\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2]\vec{e}_\theta +$$

$$[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi})]\vec{e}_\phi \tag{1.8.3.19}$$

1.9 Vektorielle Differentialoperatoren

1.9.1 Gradient

Wir definieren zunächst skalare Felder und vektorielle Felder.

Definition: Skalare Felder : Unter einem skalaren Feld versteht man eine skalare Funktion $\psi(x, y, z)$, die jedem Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ den skalaren Wert $\psi(x_0, y_0, z_0)$ zuordnet, wie z. B. Temperaturfelder, Massendichte und Ladungsdichte.

Definition: Vektorielle Felder : Unter einem vektoriellen Feld versteht man eine Vektorfunktion $\vec{A}(x, y, z)$, die jedem Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ den Vektor $\vec{A}(x_0, y_0, z_0)$ zuordnet, wie z.B. Geschwindigkeitsfelder in Flüssigkeiten und Feldstärkevektoren $\vec{E}$, $\vec{H}$ in der Elektrodynamik.

Gegeben sein nun ein Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ und ein Skalarfeld $\psi(x, y, z)$.

Definition: Gradient: grad $\psi(x_0, y_0, z_0) = \vec{\nabla}\psi(x_0, y_0, z_0)$ ist der Vektor, der in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion ψ zeigt und dessen Betrag die Änderung von ψ pro Wegstrecke in Richtung des stärksten Anstiegs im Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ ist. (Beispiel: Höhenlinien auf Wanderkarten)

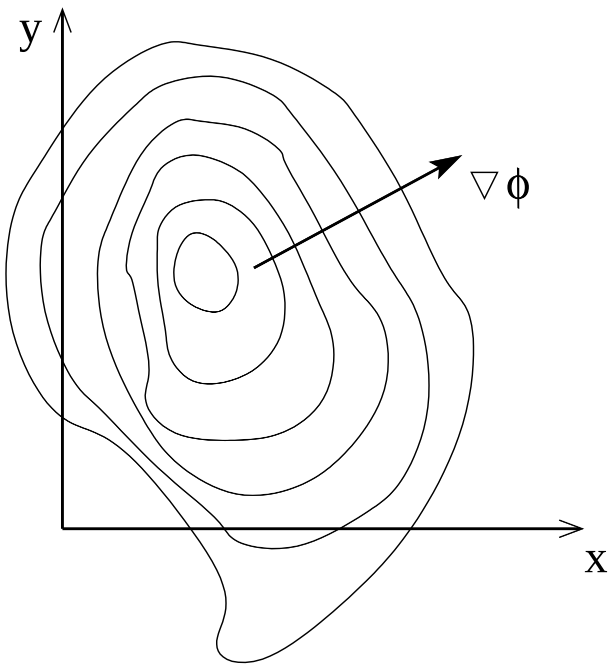


Abb. 1.14: Gradient in einer Höhenlinienkarte.

Jedem Punkt eines Skalarfeldes ordnet man so einen Gradientenvektor zu. Die Gesamtheit aller Gradientenvektoren bildet ein dem Skalarfeld zugeordnetes Vektorfeld, daß sich mathematisch durch

$$\vec{A}(x,y,z) = \text{grad}\ \psi(x,y,z) = \vec{\nabla}\psi(x,y,z) = \vec{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \vec{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \vec{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (1.9.1.1)$$

darstellen läßt. Wir können also den Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ schreiben als

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.9.1.2)$$

Beweis : Zum Beweis der Beziehungen (1.9.1.1) und (1.9.1.2) berechnen wir das totale Differential der Funktion ψ, daß sich durch Taylor-Entwicklung der Funktion $\psi(x+dx, y+dy, z+dz)$ bis zur ersten Ordnung ergibt:

$$d\psi = \psi(x+dx, y+dy, z+dz) - \psi(x,y,z) \simeq \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz$$

Mit $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ läßt sich $d\psi$ auch als Skalarprodukt schreiben

$$d\psi = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r} = (\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}) \cdot (dx, dy, dz) = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz \qquad (1.9.1.3)$$

womit die Behauptungen bewiesen sind. Q.E.D.
Definition: Äquipotentialfläche : Flächen, auf denen $\psi(x,y,z) = const.$ ist, werden als Äquipotentialflächen bezeichnet.

$\psi(x,y,z) = const.$ ist äquivalent zu einem verschwindendem totalen Differential ($d\psi = 0$), sodaß mit Gleichung (1.9.1.3) für Äquipotentialflächen folgt

$$d\psi = 0 = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}_{AF} \tag{1.9.1.4}$$

Es folgt der für die klassische Mechanik wichtige Satz: **Der Gradient von ψ steht stets senkrecht auf den Äquipotentialflächen von ψ :**

$$\vec{\nabla}\psi \perp d\vec{r}_{AF} \tag{1.9.1.5}$$

Der Gradientenvektor $\vec{\nabla}\psi$ zeigt immer in Richtung des stärksten Zuwachses von ψ, weil dann der Zuwachs $d\psi$ parallel zu $d\vec{r}$ ist, sodaß das Skalarprodukt $\vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}$ maximal ist.
Bildet man das Skalarprodukt des Gradientenvektor mit einem beliebigen zweiten Vektor $\vec{B}$, so erhält man den neuen Operator

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.9.1.6}$$

Angewandt auf ein Skalarfeld Φ erhält man das skalare Feld $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)$:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\Phi = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\Phi) \tag{1.9.1.7}$$

Angewandt auf den Vektor $\vec{C}$ erhält man

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{C} = (\sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial C_1}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial C_2}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial C_3}{\partial x_i}) \tag{1.9.1.8}$$

einen neuen Vektor.
Bei der Rechnung (1.9.1.8) ist die Reihenfolge wichtig:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} \neq \vec{C}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})$$

Der Ausdruck $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\vec{C})$ ist nicht definiert.
Neben der skalaren Verknüpfung (1.9.1.6) können wir auch das Kreuzprodukt bilden:

$$(\vec{B} \times \vec{\nabla})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.9.1.9}$$

Die Anwendung dieses Operators auf ein Skalarfeld Φ ergibt

$$[(\vec{B} \times \vec{\nabla})\Phi]_i = [(\vec{B} \times (\vec{\nabla}\Phi)]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \tag{1.9.1.10}$$

Die Zweifachanwendung des Gradienten-Operators

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \equiv \nabla^2 \equiv \Delta \tag{1.9.1.11}$$

ergibt den skalaren sogenannten **Laplace-Operator** Δ, der sowohl auf Skalare als auch auf Vektoren angewandt werden kann:

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}, \tag{1.9.1.12}$$

$$\Delta\vec{B} = \nabla^2\vec{B} = (\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 B_2}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 B_3}{\partial x_i^2}) \tag{1.9.1.13}$$

1.9.2 Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$

Der Vektor-Operator (1.9.1.2)

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

erhält Bedeutung, wenn er auf irgendetwas wirken kann. $\vec{\nabla}T$ ist kein Produkt, sondern eine Vorschrift zur Ableitung des Skalars $T(\vec{r})$, d.h. $\vec{\nabla}$ **ist ein Vektor-Operator, der auf** T **wirkt.** $\vec{\nabla}$ verhält sich dann wie ein normaler Vektor, wenn wir "Produkt" mit "wirkt auf" ersetzen.

Nach Kap. 1.2 existieren drei Möglichkeiten der Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$:
1) Produkt mit einem Skalar p: $p\vec{a}$,
2) Skalarprodukt mit einem anderen Vektor $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b}$,
3) Kreuzprodukt mit einem anderen Vektor $\vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b}$.
Entsprechend kann der Nabla-Operator auf drei Weisen wirken:
1) auf eine skalare Funktion $T(\vec{r})$: $\vec{\nabla}T(\vec{r})$ ("Gradient"),
2) auf eine Vektorfunktion $\vec{A}$ über das Skalarprodukt: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ("Divergenz"),
3) auf eine Vektorfunktion $\vec{A}$ über das Kreuzprodukt: $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ("Rotation").
Der Gradient wurde bereits ausführlich diskutiert, sodaß wir nun die Divergenz und die Rotation näher untersuchen.

1.9.3 Divergenz

Sei das Vektorfeld $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$ gegeben.

Definition: Divergenz : Als div $\vec{A}$ bezeichnet man das Skalarprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektor $\vec{A}$:

$$\text{div } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \tag{1.9.3.1}$$

Es folgt sofort mit Gleichung (1.9.1.11), daß man den Laplace-Operator als

$$\Delta = \text{div grad } = \text{div } \vec{\nabla} \tag{1.9.3.2}$$

darstellen kann.

Physikalisch interpretieren kann man die Divergenz eines Vektorfeldes als den Fluß eines Vektorfeldes durch ein Volumenelement dV. $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ repräsentiere die Flußrate (pro Einheitsfläche) einer Strömung durch eine Seitenfläche (siehe Abbildung 1.15).

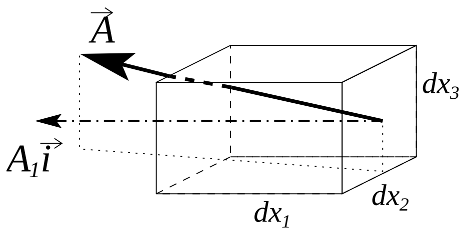


Abb. 1.15: Zur physikalischen Deutung der Divergenz.

Wir betrachten die Flußrate in x-Richtung durch den infinitesimal kleinen Quader mit den Seitenlängen dx_1,dx_2 und dx_3, die gegeben ist aus dem Produkt aus A_1 und der Seitenfläche $dx_2 dx_3$. Am Ort x_1 ist die Flußrate gleich $A_1 dx_2 dx_3$ und am Ort $x_1 + dx_1$ gleich

$$(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 \ .$$

Der Nettofluß ergibt sich als Differenz der beiden Flußraten zu

$$(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 - A_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dV$$

Analog berechnet man den Nettofluß in y- und z-Richtung und nach Addition findet man für den Gesamtfluß durch den Quader

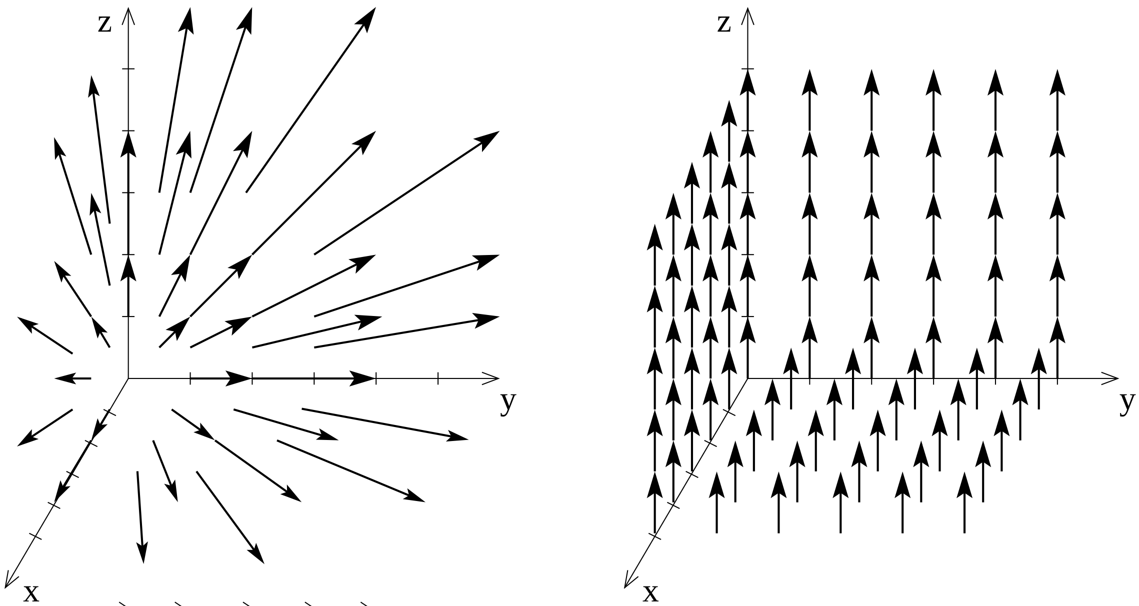
$$dV(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV = (\text{div } \vec{A}) dV$$

Das Volumenelement dV stellt eine "Quelle" des Vektorfeldes dar falls div $\vec{A} > 0$; es stellt eine "Senke" des Vektorfeldes dar falls div $\vec{A} < 0$.
Geometrisch kann man die Divergenz als Maß für das Ausseinanderlaufen eines Vektors an einem Punkt P interpretieren. Betrachten wir als erstes Beispiel die Vektorfunktion

$$\vec{A}_1 = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \tag{1.9.3.3}$$

die in Abbildung 1.16a schematisch dargestellt ist. Wir erhalten sofort einen relativ hohen Wert für die Divergenz,

$$\text{div } \vec{A}_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$



a) $\vec{A}_1 = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$
(in x−y−, x−z−, y−z−Ebene)

b) $\vec{A}_2 = 1\vec{e}_3$
(in x−y−, x−z−, y−z−Ebene)

Abb. 1.16: Divergenz zweier spezieller Vektorfunktionen.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Einheitsvektor in z-Richtung:

$$\vec{A}_2 = 1\vec{e}_3, \tag{1.9.3.4}$$

die in Abbildung 1.16b schematisch dargestellt ist. Hier verschwindet die Divergenz

$$\text{div } \vec{A}_2 = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0$$

1.9.4 Rotation

Sei wieder das Vektorfeld $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$ gegeben.
Definition: Rotation : Als rot $\vec{A}$ (in englischer Literatur auch oft curl $\vec{A}$) bezeichnet man das Kreuzprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektor $\vec{A}$:

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.9.4.1}$$

sodaß für die $i-$Komponente des resultierenden Vektors gilt

$$[\text{rot } \vec{A}]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \tag{1.9.4.2}$$

wobei beim letzten Schritt die Summenkonvention benutzt wurde.
Mit Gleichung (1.9.4.2) schreibt sich Gleichung (1.9.4.1) als

$$\text{rot } \vec{A} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{1.9.4.3}$$

Die Rotation läßt sich geometrisch als ein Maß für die Wirbelstärke (Rotation) eines Vektorfeldes $\vec{A}$ im Punkt P interpretieren. Betrachten wir als Beispiel die Vektorfunktion

$$\vec{A}_3 = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2,$$

die in Abbildung 1.17 schematisch skizziert ist.

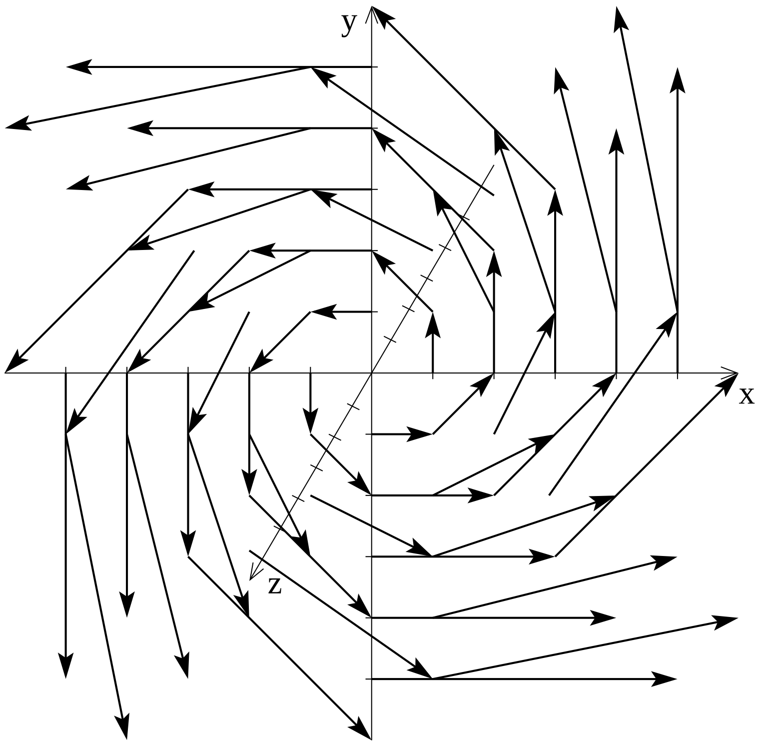


Abb. 1.17: Rotation einer speziellen Vektorfunktion.

Nach Gleichung (1.9.4.3) erhalten wir für die Rotation dieses Vektorfeldes

$$\text{rot } \vec{A}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_3$$

Ebenso weist man leicht nach, daß für die Beispiele (1.9.3.2) und (1.9.3.3) die Rotation jeweils verschwindet.

Übungsaufgabe:

A1.9.1) Zeigen Sie, daß die Definition (1.9.4.1) äquivalent ist zur Darstellung

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta F}, \qquad (1.9.4.4)$$

wobei $\vec{n}$ den Einheits-Normalenvektor bezeichnet, der senkrecht auf der von der Kurve s umrandeten Fläche ΔF steht.

A1.9.2) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{g} = 3x^2y\vec{e}_1 + yz^2\vec{e}_2 - xz\vec{e}_3$$

1.10 Rechenregeln für vektorielle Differentialoperatoren

1.10.1 Summenregeln

Aus den Definitionen der vektoriellen Differentialoperatoren folgen die Summenregeln

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \vec{\nabla}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\nabla}\times\vec{a} + \vec{\nabla}\times\vec{b}$$

1.10.2 Produktregeln

Hier ist zu bedenken, daß es zwei Arten von Skalaren aus dem Produkt fg zweier Skalare und aus dem Produkt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ zweier Vektoren geben kann. Ebenso kann es zwei Arten von Vektoren aus den Produkten $f\vec{a}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ geben. Daher existieren sechs verschiedene Produktregeln: jeweils zwei für Gradienten, Divergenzen und Rotationen:

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \tag{1.10.2.1}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} \tag{1.10.2.2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{a}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}f) \tag{1.10.2.3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b}) \tag{1.10.2.4}$$

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{a}) = f(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\vec{\nabla}f) \tag{1.10.2.5}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) \tag{1.10.2.6}$$

Diese Regeln lassen sich leicht mit der Komponentendarstellung der Vektoren beweisen.

1.10.3 Quotientenregeln

Mit Hilfe der Produktregeln erhalten wir

$$\vec{\nabla}(\frac{f}{g}) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2} \quad (1.10.3.1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{\vec{a}}{g}) = \frac{g(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}g)}{g^2} \quad (1.10.3.2)$$

$$\vec{\nabla}\times(\frac{\vec{a}}{g}) = \frac{g(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\vec{\nabla}g)}{g^2} \quad (1.10.3.3)$$

1.10.4 Kombination verschiedener vektorieller Differentialoperatoren

$\vec{\nabla}\Phi$ ist ein Vektor. Von diesem Vektor können wir die Divergenz div $\vec{\nabla}\Phi$ und die Rotation rot $\vec{\nabla}\Phi$ berechnen.
$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ist ein Skalar, dessen Gradient wir bilden können.
$\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ist ein Vektor, dessen Divergenz div $(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ und Rotation rot $(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ wir berechnen können.
Mehr Kombinationsmöglichkeiten gibt es nicht! Aber nicht alle ergeben etwas Neues, wie wir jetzt zeigen werden.
Für die Kombination verschiedener vektorieller Differentialoperatoren beweisen wir die folgenden wichtigen Rechenregeln:
(a) Wir wiederholen Gleichung (1.9.3.2):

$$\text{div grad } \Phi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Phi) = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi \quad (1.10.4.1)$$

(b) Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei:

$$\text{rot grad } \Phi = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.10.4.2)$$

(c) Ein Rotationsfeld besitzt keine Quellen und Senken, denn unter Ausnutzung von Gleichung (1.4.1) gilt

$$\text{div rot } \vec{g} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{g}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z}] - \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial z}[\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}] = 0 \quad (1.10.4.3)$$

(d) Unter Ausnutzung des dreifachen Kreuzprodukts (1.3.12) gilt

$$\text{rot (rot } \vec{g}) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{g}) = \text{grad (div } \vec{g}) - \Delta\vec{g} \quad (1.10.4.4)$$

(e)

$$\text{div } (\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\text{rot } \vec{B}) - \vec{B}\cdot(\text{rot } \vec{C}) \quad (1.10.4.5)$$

Beweis : Es ist

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\frac{\partial}{\partial x}(B_yC_z-B_zC_y)+\frac{\partial}{\partial y}(B_zC_x-B_xC_z)+\frac{\partial}{\partial z}(B_xC_y-B_yC_x)=$$

$$C_x(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z})+C_y(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x})+C_z(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y})-B_x(\frac{\partial C_z}{\partial y}-\frac{\partial C_y}{\partial z})$$

$$-B_y(\frac{\partial C_x}{\partial z}-\frac{\partial C_z}{\partial x})-B_z(\frac{\partial C_y}{\partial x}-\frac{\partial C_x}{\partial y})=\vec{C}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})-\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{C})$$

Q.E.D.

1.11 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

1.11.1 Grundgleichungen

Neben den kartesischen Koordinaten $x_i=(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$ betrachten wir die allgemeinen krummlinigen Koordianten $q_i=(q_1,q_2,q_3)$. Nach Kap. (1.8.2) bilden wir die neuen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_{q_i}=\frac{1}{h_i}\partial\vec{r}/\partial q_i \tag{1.11.1.1}$$

mit dem Skalenfaktor

$$h_i=|\partial\vec{r}/\partial q_i| \tag{1.11.1.2}$$

Wir nehmen an, daß die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}_{q_1}$, $\vec{e}_{q_2}$ und $\vec{e}_{q_3}$ ein rechtshändiges orthogonales Koordinatensystem bilden, d.h.

$$\vec{e}_{q_\nu}\cdot\vec{e}_{q_\mu}=\delta_{\nu\mu},\quad \mu,\nu=1,2,3 \tag{1.11.1.3}$$

Aus $\vec{r}=\vec{r}(q_i)$ folgt mit Gleichung (1.11.1.1)

$$d\vec{r}=(\partial\vec{r}/\partial q_1)dq_1+\ (\partial\vec{r}/\partial q_2)dq_2+\ (\partial\vec{r}/\partial q_3)dq_3=$$

$$h_1dq_1\vec{e}_{q_1}+h_2dq_2\vec{e}_{q_2}+h_3dq_3\vec{e}_{q_3}=\sum_{i=1}^{3}h_idq_i\vec{e}_{q_i} \tag{1.11.1.4}$$

Für das Quadrat der Bogenlänge erhalten wir dann unter Ausnutzung von Gleichung (1.11.1.3)

$$(ds)^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}h_\nu h_\mu dq_\nu dq_\mu\vec{e}_{q_\nu}\cdot\vec{e}_{q_\mu}=\sum_{\mu=1}^{3}h_\mu^2dq_\mu^2=h_1^2dq_1^2+h_2^2dq_2^2+h_3^2dq_3^2, \tag{1.11.1.5}$$

während für das Volumenelement gilt

$$dV=d^3r=|h_1dq_1\vec{e}_{q_1}\cdot[h_2dq_2\vec{e}_{q_2}\times h_3dq_3\vec{e}_{q_3}]|=h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3|\vec{e}_{q_1}\cdot(\vec{e}_{q_2}\times\vec{e}_{q_3})|=$$

$$h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3 \tag{1.11.1.6}$$

1.11.2 Gradient

Gemäß Gleichung (1.9.1.3) gilt

$$d\psi = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial\psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}dq_3 \tag{1.11.2.1}$$

Nach Gleichung (1.11.1.4) gilt

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_{q_1} + h_2 dq_2 \vec{e}_{q_2} + h_3 dq_3 \vec{e}_{q_3} \tag{1.11.2.2}$$

Wir setzen als Ansatz an

$$\vec{\nabla}\psi = \lambda_1 \vec{e}_{q_1} + \lambda_2 \vec{e}_{q_2} + \lambda_3 \vec{e}_{q_3} \tag{1.11.2.3}$$

und bestimmen die Werte der λ_i durch Einsetzen von (1.11.2.2) und (1.11.2.3) in die Beziehung (1.11.2.1):

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}dq_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 dq_1 \\ h_2 dq_2 \\ h_3 dq_3 \end{pmatrix} = h_1\lambda_1 dq_1 + h_2\lambda_2 dq_2 + h_3\lambda_3 dq_3$$

Der Koeffizientenvergleich in dieser Gleichung ergibt

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3 \tag{1.11.2.4}$$

und somit für die Ansatzgleichung (1.11.2.3):

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{e}_{q_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}$$

Wir finden also für den Gradienten in den krummlinigen Koordinaten die Darstellung

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_{q_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \tag{1.11.2.5}$$

Angewandt auf die speziellen Skalare q_1,q_2 und q_3 folgt

$$\vec{\nabla}q_1 = \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1}, \quad \vec{\nabla}q_2 = \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2}, \quad \vec{\nabla}q_n = \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3}, \tag{1.11.2.6}$$

wobei für den Betrag gilt

$$|\vec{\nabla}q_\nu| = \frac{1}{h_\nu}, \quad \nu = 1,2,3 \tag{1.11.2.7}$$

Weiterhin gilt

$$\vec{e}_{q_1} = h_2 h_3 \vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3, \quad \vec{e}_{q_2} = h_3 h_1 \vec{\nabla}q_3 \times \vec{\nabla}q_1, \quad \vec{e}_{q_3} = h_1 h_2 \vec{\nabla}q_1 \times \vec{\nabla}q_2 \tag{1.11.2.8}$$

Beweis : Zum Beweis von (1.11.2.8) nutzen wir Gleichungen (1.11.2.6) aus:

$$h_2 h_3 \vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3 = h_2 h_3 (\frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \times \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3}) = \vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_3} = \vec{e}_{q_1}$$

Q.E.D.

1.11.3 Divergenz

Zur Berechnung von

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1} + A_2 \vec{e}_{q_2} + A_3 \vec{e}_{q_3}) = \vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) + \vec{\nabla} \cdot (A_2 \vec{e}_{q_2}) + \vec{\nabla} \cdot (A_3 \vec{e}_{q_3})$$

benutzen wir die Darstellungen (1.11.2.8). Wir erhalten für

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \cdot (A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3)$$

Mit der Produktregel (1.10.2.3) folgt

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) = [\vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)] \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) + A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3)$$

Der zweite Term in dieser Gleichung verschwindet, denn nach Anwendung der Produktregel (1.10.2.4) gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) = \vec{\nabla} q_3 \cdot \text{rot grad } q_2 - \vec{\nabla} q_2 \cdot \text{rot grad } q_3 = 0$$

gemäß Gleichung (1.10.4.2). Es verbleibt unter Ausnutzung von (1.11.2.6)

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) = [\vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)] \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) = [\vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)] \cdot (\frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \times \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3}) = [\vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)] \cdot \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3}$$

Jetzt benutzen wir die Darstellung (1.11.2.5) für grad $(A_1 h_2 h_3)$ und erhalten aufgrund der Orthogonalitätsrelation (1.11.1.3)

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) = [\vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_2} +$$

$$\vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_3}] \cdot \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) \qquad (1.11.3.1)$$

Ebenso berechnen wir

$$\vec{\nabla} \cdot (A_2 \vec{e}_{q_2}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3)$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot (A_3 \vec{e}_{q_3}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2),$$

sodaß

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2)] \qquad (1.11.3.2)$$

1.11.4 Rotation

Zur Berechnung von

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1} + A_2\vec{e}_{q_2} + A_3\vec{e}_{q_3}) = \vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1}) + \vec{\nabla} \times (A_2\vec{e}_{q_2}) + \vec{\nabla} \times (A_3\vec{e}_{q_3})$$

benutzen wir die Darstellungen (1.11.2.6). Wir erhalten für

$$\vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \times (A_1 h_1 \vec{\nabla} q_1) = \vec{\nabla}(A_1 h_1) \times \vec{\nabla} q_1 + \ a_1 h_1 (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} q_1)$$

wobei wir die Produktregel (1.10.2.5) nutzen. Der zweite Term in dieser Gleichung verschwindet gemäß Gleichung (1.10.4.2) und mit Gleichung (1.11.2.6a) folgt

$$\vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla}(A_1 h_1) \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1}$$

Jetzt benutzen wir die Darstellung (1.11.2.5) für grad $(A_1 h_1)$ und erhalten

$$\vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1}) = [\vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_2} +$$

$$\vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_3}] \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} = \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_1 h_3} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_3} - \ \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1 h_2} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_2} \qquad (1.11.4.1)$$

Ebenso verfahren wir mit $\vec{\nabla} \times (A_2\vec{e}_{q_2})$ und $\vec{\nabla} \times (A_3\vec{e}_{q_3})$ und erhalten

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} \Big[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 h_2)\Big] + \ \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_1 h_3} \Big[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3 h_3)\Big] +$$

$$\frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1 h_2} \Big[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1 h_1)\Big] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\vec{e}_{q_1} & h_2\vec{e}_{q_2} & h_3\vec{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} \qquad (1.11.4.2)$$

1.11.5 Laplace-Operator

Mit Gleichung (1.10.4.1) und der Gradientendarstellung (1.11.2.5) gilt für den Laplace-Opeartor

$$\Delta\psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla} \cdot (\frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial q_3}) \qquad (1.11.5.1)$$

Die Anwendung der Divergenzdarstellung (1.11.3.2) für

$$A_\nu = \frac{1}{h_\nu} \frac{\partial\psi}{\partial q_\nu}$$

ergibt dann

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\frac{\partial}{\partial q_1} (\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1}) + \ \frac{\partial}{\partial q_2} (\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2}) + \ \frac{\partial}{\partial q_3} (\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial q_3})] \qquad (1.11.5.2)$$

Nach diesen allgemeinen Herleitungen betrachten wir nun als Beispiel Kugelkoordinaten.

1.11.6 Beispiel: Kugelkoordinaten

Mit Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) gilt für den Ortsvektor

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = r\sin\theta\cos\phi\vec{e}_1 + r\sin\theta\sin\phi\vec{e}_2 + r\cos\theta\vec{e}_3 = \vec{r}(r, \theta, \phi) \qquad (1.11.6.1)$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Als neue Koordinaten wählen wir also $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ und $q_3 = \phi$.

Zur Berechnung der neuen Einheitsvektoren (1.11.1.1) und Skalenfaktoren (1.11.1.2) benötigen wir

$$\partial\vec{r}/\partial r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

$$\partial\vec{r}/\partial\theta = r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$

und

$$\partial\vec{r}/\partial\phi = r(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0),$$

sodaß

$$h_1 = h_r = |\partial\vec{r}/\partial r| = 1, \quad h_2 = h_\theta = |\partial\vec{r}/\partial\theta| = r, \quad h_3 = h_\phi = |\partial\vec{r}/\partial\phi| = r\sin\theta \quad (1.11.6.2)$$

und

$$\vec{e}_{q_1} = \vec{e}_r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \quad \vec{e}_{q_2} = \vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta),$$

$$\vec{e}_{q_3} = \vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \qquad (1.11.6.3)$$

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in den allgemeinen Ausdruck (1.11.2.5) erhalten wir für den Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi \qquad (1.11.6.4)$$

Gemäß Gleichung (1.11.3.2) ergibt sich für die Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi r)] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi), \qquad (1.11.6.5) \end{aligned}$$

während Gleichung (1.11.4.2) für die Rotation in Kugelkoordinaten auf

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & A_\theta r & A_\phi r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\Big[\big(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi r \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta r)\big)\vec{e}_r + \big(\frac{\partial}{\partial\phi}(A_r) - \frac{\partial}{\partial r}(A_\phi r \sin\theta)\big) r\vec{e}_\theta$$

$$+\big(\frac{\partial}{\partial r}(A_\theta r) - \frac{\partial}{\partial\theta}(A_r)\big) r \sin\theta \vec{e}_\phi\Big] \qquad (1.11.6.6)$$

führt.

Gemäß Gleichung (1.11.5.2) erhalten wir für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi})\Big]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \qquad (1.11.6.7)$$

Übungsaufgaben:

A1.11.1) Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten.

A1.11.2) Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in parabolischen Zylinderkoordinaten.