8. Elektrodynamik in Materie

8.1 Dielektrika im elektrostatischen Feld

Unter *Isolatoren oder Dielektrika* verstehen wir Materialien, bei denen im Gegensatz zu Leitern nicht alle Ladungen frei beweglich sind, weil die Elektronen an die Atome und Moleküle gebunden sind. Unter dem Einfluß eines äußeren elektrischen Felds werden sie um kurze Strecke gegeneinander verschoben, was zur *Polarisation* der Atome und Moleküle im Feld führt.

8.1.1 Polarisation

Wenn das $\vec{E}$-Feld nicht so stark ist, daß es zu einer Ionisation des Atoms kommt, wird der positive Kern des **neutralen Atoms** in Feldrichtung verschoben und die Elektronen in die entgegengesetzte Richtung. Aufgrund dieser Ladungsseparation ziehen sich der positive Kern und die Elektronen wieder an. Es bildet sich ein Gleichgewicht mit einem polarisierten Atom, das ein kleines durch $\vec{E}$ induziertes Dipolmoment $\vec{p} \parallel \vec{E}$ hat, das in Richtung von $\vec{E}$ zeigt:

$$\vec{p} = \alpha\vec{E} \tag{8.1.1}$$

Die Proportionalitätskonstante α wird *atomare dielektrische Suszeptibilität* genannt und ist materialabhängig. Benutzt man die Berechnung des Dipolmoment einer leitenden Kugel im elektrischen Feld (Kap. 3.9.4), so gilt $p \simeq R^3 E$. Mit einem typischen Atomradius von $R \simeq 10^{-8}$ cm ergibt sich größenordnungsmäßig $\alpha \simeq 10^{-24}$ cm^{-3}.

Bei **Molekülen** ist die Sachlage komplizierter als Gleichung (8.1.1), da diese unterschiedlich in verschiedene Richtungen polarisieren. Man erhält hier einen Polarisationtensor α_{ij} mit

$$p_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \quad ,$$

$$p_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \quad ,$$

$$p_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z$$

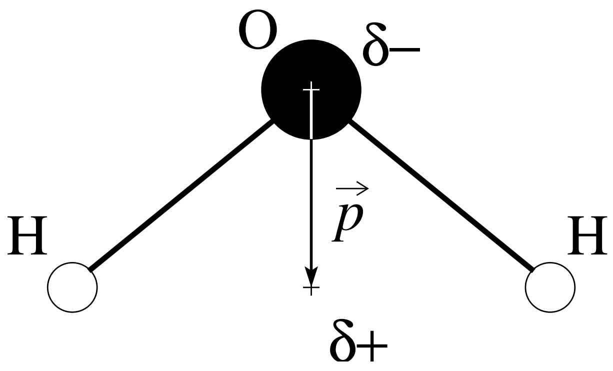

Abb. 8.1: Das polare Wasser-Molekül mit den Dipolladungen $\delta-$ und $\delta+$.

Polare Moleküle wie zum Beispiel Wasser (siehe Abbildung 8.1) besitzen bereits ein intrinsisches Dipolmoment. Deshalb löst Wasser andere Substanzen. Setzt man ein polares Molekül in ein homogenes elektrisches Feld (Abbildung 8.2), so ist die an einem Ende wirkende Kraft $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ entgegengesetzt gleich der am anderen Ende wirkenden Kraft $\vec{F}_- = -q\vec{E}$, sodaß das Drehmoment

$$\vec{N} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-) = (\frac{\vec{s}}{2} \times q\vec{E}) + [\frac{-\vec{s}}{2} \times (-q\vec{E})] = q\vec{s} \times \vec{E}$$

entsteht. Der Dipol $\vec{p}$ erfährt im homogenen elektrischen Feld das Drehmoment

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Dieses richtet bei freier Rotation das polare Molekül in Richtung $\vec{p} \parallel \vec{E}$ aus, weil dann $\vec{N} = 0$ verschwindet.

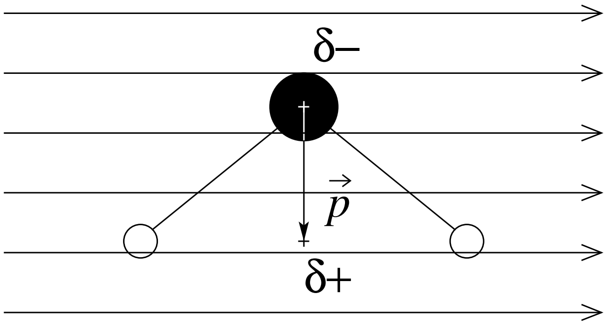

Abb. 8.2: Der Dipol im homogenen elektrischen Feld.

Überträgt man diese Überlegungen für individuelle Atome und Moleküle auf ein ganzes Stück von dielektrischem Material im elektrischen Feld, so gilt:
– besteht dieses aus neutralen Atomen, so wird in jedem Atom ein kleines Dipolmoment induziert, das in Richung des angelegten $\vec{E}$-Felds zeigt,
– besteht dieses aus polaren Molekülen, erfährt jeder intrinsischer Dipol ein Drehmoment, der das Diplomoment parallel zu $\vec{E}$ ausrichtet.

Beide Mechanismen führen zum gleichen Ergebnis: *viele kleine Dipole, die entlang der Feldrichtung zeigen.* Das Dieelektrikum wird polarisiert. Als Maß für diesen Effekt gilt der Polarisationsvektor $\vec{P} = \vec{p}/dV$, der als Dipolmoment pro Einheitsvolumen definiert wird.

8.1.2 Feld eines polarisierten Objekts

Was ist nun das elektrische Feld eines polarisierten Materials mit der Polarisation $\vec{P}$? Wir wollen also das elektrische Feld berechnen, das durch den gegebenen Polarisationsvektor $\vec{P}$ erzeugt wird, also nicht das äußere Feld, das zur Polarisation des Mediums geführt hat.

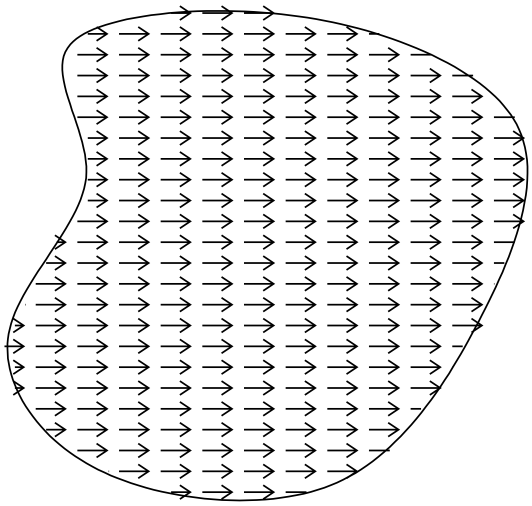

Abb. 8.3: Überlagerung der infinitesimalen Dipole.

Aus Kap. (3.9.4) kennen wir das elektrische Felds eines einzelnen Dipols. Weil das dielektrische Material durch die Überlagerung von vielen infinitesimalen Dipolen entsteht, integrieren wir über das Volumen des dielektrischen Materials (siehe Abbildung 8.3). Man rechnet leichter mit dem elektrostatischen Potential (3.9.35) eines einzelnen Dipols

$$\vec{A}_{dipol} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Mit $\vec{p} = \vec{P} dV = \vec{P} d^3x'$ folgt

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_V d^3x' \, \frac{\vec{P}(x') \cdot \vec{r}}{r^3} = \int_V d^3x' \, \frac{\vec{P}(x') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Wir benutzen

$$\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \; ,$$

sodaß

$$\vec{A} = -\int_V d^3x' \, \vec{P}(x') \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int_V d^3x' \, \vec{P}(x') \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Es gilt

$$\text{div}\ [a\vec{P}] = a\ \text{div}\ \vec{P} + \ \vec{P}\cdot\vec{\nabla}a,$$

d.h. hier

$$\vec{P}(x^{'})\cdot\vec{\nabla}_{x'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|} = \vec{\nabla}_{x'}\cdot[\frac{\vec{P}(x^{'})}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}] - [\frac{\vec{\nabla}_{x'}\cdot\vec{P}(x^{'})}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}]$$

Es folgt

$$\vec{A} = \int_V d^3x^{'}\vec{\nabla}_{x'}\cdot[\frac{\vec{P}(x^{'})}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|} - \int_V d^3x^{'}\ \frac{\vec{\nabla}_{x'}\cdot\vec{P}(x^{'})}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}$$

Mit Hilfe des Gauß-Theorems wandeln wir das erste Volumenintegral in ein Oberflächenintegral um und erhalten

$$\vec{A}(\vec{x}) = \oint_{O(V)} d\vec{a}\cdot\frac{\vec{P}}{r} - \int_V d^3x^{'}\ \frac{1}{r}(\vec{\nabla}_{x'}\cdot\vec{P}) \tag{8.1.2}$$

Führen wir das Potential der Volumenladung

$$\rho_b \equiv -\vec{\nabla}\vec{P} \tag{8.1.3}$$

und das Potential der Oberflächenladung als

$$\sigma_b \equiv \vec{P}\cdot\vec{n} \tag{8.1.4}$$

ein, wobei $\vec{n}$ den Oberflächennormalenvektor kennzeichnet, so folgt für das Potential (8.1.2)

$$\vec{A} = \oint_{O(V)} da\ \frac{\sigma_b}{r} + \int_V d^3x^{'}\ \frac{\rho_b}{r} \tag{8.1.5}$$

Das Potential eines polarisierten Materials ist dasselbe wie das durch eine Volumenladungsdichte $\rho_b = -\ \text{div}\ \vec{P}$ plus dem durch die Oberflächenladungsdichte $\sigma_b = \vec{P}\cdot\vec{n}$ erzeugte Potential.
Anstatt also über die Beiträge der infinitesimalen Dipole zu integrieren, brauchen wir nur ρ_b und σ_b zu berechnen, und können damit die Felder so wie bisher aus Oberflächenladungen und Volumenladungsdichten berechnen.
Das Zustandekommen von Volumenladungen und Oberflächenladungen durch die Polarisation läßt sich einfach physikalisch verstehen:
Bei **homogener** Polarisation ist div $\vec{P} = 0$, und wir können uns das dielektrische Material als parallele Aufeinanderreihung von langen Ketten von einzelnen Dipolen vorstellen (siehe Abbildung 8.4). Die Wirkung der positiven und negativen Ladungen heben sich im Innern gerade auf und es bleiben nur die Ladungen am Rand übrig, sodaß insgesamt nur die Oberflächenladung σ_b nicht verschwindet.

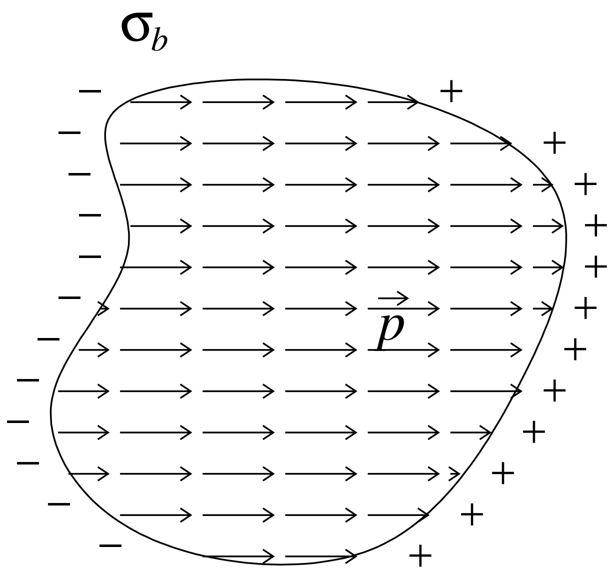

Abb. 8.4: Als resultierende Ladung einer homogenen Polariation $\vec{P}$ ergibt sich die Oberflächenladung σ_b.

Bei **inhomogener** Polarisation ist örtlich div $\vec{P} \neq 0$, sodaß in jedem Volumenelement eine Nettoladung übrig bleibt, die sich als Volumenladungsdichte $\rho_b = -$ div $\vec{P}$ beschreiben läßt. Diese tritt dann zusätzlich zu der Oberflächenladung auf.

8.1.3 Beispiel: Elektrisches Feld einer gleichförmig polarisierten Kugel vom Radius R

Wir legen die z-Achse unseres Koordinatensystems parallel zur Polarisationsrichtung der Kugel (siehe Abbildung 8.5). Die Volumenladung ist $\rho_b = 0$, weil bei gleichförmiger Polarisation $|\vec{P}| = const.$, sodaß div $\vec{P} = 0$.

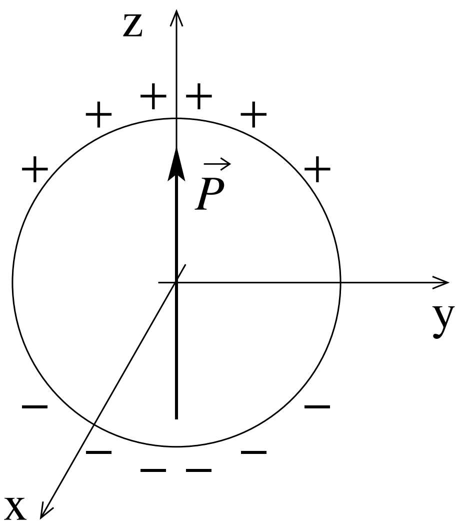

Abb. 8.5: Die homogen polarisierte Kugel.

Für die Oberflächenladung ergibt sich $\sigma_b = \vec{p} \cdot \vec{n} = P \cos\theta$. Wir müssen also wie in Kap. 3.12.4 das elektrische Feld einer Kugel mit der Oberflächenladung $\sigma_b = P\cos\theta$ bestimmen. Gemäß Gleichung (3.12.15) gilt für die Lösung der allgemeinen zylindersymmetrischen Laplace-Gleichung

$$A_0(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + b_l n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos\theta) \tag{8.1.6}$$

Für das Potential innerhalb der Kugel ($r \leq R$) folgt mit $\mu = \cos\theta$

$$V_i(r,\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\mu) \ , \quad r \leq R$$

und im Außenraum ($r > R$)

$$V_a(r,\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\mu) \ , \quad r > R$$

Für die Randbedingungen an der Oberfläche gilt:
1) Das Potential ist stetig: $V_i(R,\mu) = V_a(R,\mu)$, d.h.

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\mu)$$

Mit den Orthonormalitätsrelationen der Legendre-Polynome folgt dann

$$A_m R^m = B_m R^{-m-1} \quad ,$$

oder

$$B_l = A_l R^{2l+1} \tag{8.1.7}$$

2) Die radiale Ableitung des Potentials ist unstetig an der Oberfläche gemäß Gleichung (3.8.4):

$$\frac{\partial V}{\partial n}|_R = -4\pi\sigma \quad ,$$

sodaß hier gilt

$$\left(\frac{\partial V_a}{\partial r} - \frac{\partial V_i}{\partial r}\right)|_{r=R} = -4\pi\sigma_b(\mu)$$

Wir erhalten mit Gleichung (8.1.7)

$$-\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l(l+1)}{R^{l+2}} P_l(\mu) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\mu)$$
$$= -\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) A_l R^{l-1} P_l(\mu) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\mu) = -4\pi\sigma_b(\mu) \quad ,$$

also

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l R^{l-1} P_l(\mu) = 4\pi\sigma_b(\mu)$$

Mit den Orthonormalitätsrelationen der Legendre-Polynome folgt

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l R^{l-1}\int_{-1}^{1} d\mu P_l(\mu)P_m(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l R^{l-1}\frac{2}{2l+1}\delta_{l,m}$$

$$= 2A_m R^{m-1} = 4\pi\int_{-1}^{1} d\mu\ \sigma_b(\mu)P_m(\mu)\quad ,$$

also

$$A_l = \frac{2\pi}{R^{l-1}}\int_{-1}^{1} d\mu\ \sigma_b(\mu)P_l(\mu) \tag{8.1.8}$$

Speziell für $\sigma_b(\mu) = P\cos\theta = P\mu = P\,P_1(\mu)$ erhalten wir $A_l = 0\ \forall l \neq 1$,

$$A_1 = 2\pi P\int_{-1}^{1} d\mu P_1^2(\mu) = 2\pi P\int_{-1}^{1} d\mu\mu^2 = \frac{4\pi}{3}P\quad ,$$

und damit nach Gleichung (8.1.7) $B_l = 0\ \forall l \neq 1$ und

$$B_1 = A_1 R^3 = \frac{4\pi}{3}PR^3$$

Für das Potential folgt damit

$$V_i(r,\mu) = \frac{4\pi P}{3}r\cos\theta,\quad r \leq R \tag{8.1.9}$$

und

$$V_a(r,\mu) = \frac{4\pi PR^3}{3r^2}\cos\theta,\quad r > R \tag{8.1.10}$$

Weil $r\cos\theta = z$ ist das elektrische Feld innerhalb der Kugel gleichförmig,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{4\pi P}{3}\vec{e}_z = -\frac{4\pi}{3}\vec{P},\quad r \leq R \tag{8.1.11}$$

Außerhalb der Kugel ist das Potential identisch zu dem eines Dipols im Ursprung,

$$V_a = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

mit dem Dipolmoment $\vec{p} = 4\pi R^3\vec{P}/3$. Der Verlauf der Feldlinien des elektrischen Felds ist in Abbildung 8.6 skizziert.

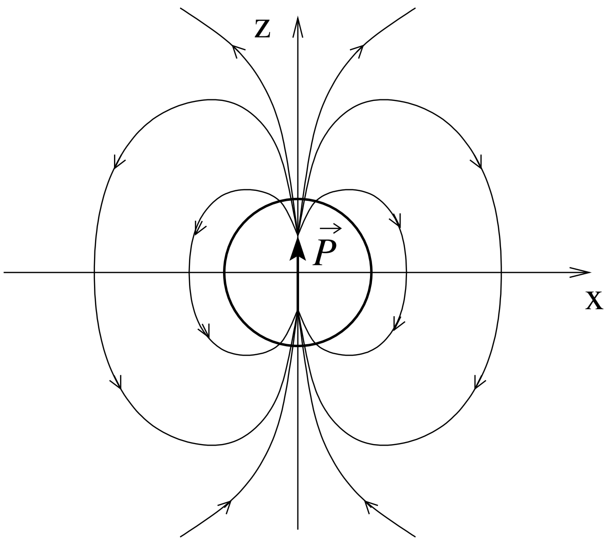

Abb. 8.6: Das Dipolfeld der homogen polarisierten Kugel.

8.1.4 Elektrische Verschiebung

Die Polarisation sorgt für Polarisationsladungen $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ innerhalb des Dielektrikums und Oberflächenladungen $\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$ auf der Oberfläche. Daneben gibt es auch weiterhin freie Ladungen ρ_f, die nicht durch Polarisation zustande kommen.
Innerhalb des Dielektrikums ist die Gesamtladungsdichte dann

$$\rho = \rho_f + \rho_b,$$

und es gilt für das gesamte elektrische Feld

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho = 4\pi(\rho_f + \rho_b) = 4\pi\rho_f - \; 4\pi \text{ div } \vec{P} \;\; ,$$

sodaß

$$\text{div } (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho_f \tag{8.1.12}$$

Wir definieren den *elektrischen Verschiebungsvektor*

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{8.1.13}$$

Dann folgt für Gleichung (8.1.12)

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho_f \;\; , \tag{8.1.14}$$

d.h. die Divergenz des elektrischen Verschiebungsvektors ist proportional zur freien Ladungsdichte ρ_f.

Aus Beziehung (8.1.14) folgt, daß die Normalkomponente D_n kontinuierlich an jeder Oberfläche ist, die keine *freien* Oberflächenladungen enthält. Im Gegensatz dazu wird die Normalkomponente E_n dort unstetig sein.
Im Rahmen der Elektrostatik (rot $\vec{E} = 0$) gilt weiterhin

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{P} = 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad , \tag{8.1.15}$$

d.h. die Tangentialkomponente $\vec{D}_t$ von $\vec{D}$ ist unstetig an dieser Oberfläche, während die Tangentialkomponente $\vec{E}_t$ von $\vec{E}$ dort stetig ist.
Die Integralform von Gleichung (8.1.14) lautet nach Anwendung des Gauß-Theorems

$$\int_V dV \; \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \oint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{a} = 4\pi \int_V dV \; \rho_f = 4\pi Q_f \quad , \tag{8.1.16}$$

wobei Q_f die im Volumen eingeschlossene freie Ladung bezeichnet.

8.1.5 Lineare Dielektrika

Für einfache Materialien gilt die lineare Materialgleichung

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad , \tag{8.1.17}$$

wobei die *elektrische Suszeptibilität* $\chi_e = const.$ ist. Gemäß Beziehung (8.1.13) folgt dann die Materialgleichung

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \chi_e \vec{E} = \epsilon \vec{E} \tag{8.1.18}$$

mit der *Dielektrizitätskonstanten*

$$\epsilon \equiv 1 + 4\pi \chi_e \tag{8.1.19}$$

Wir erhalten damit für die Polarisationsladungsdichte

$$\begin{aligned} \rho_b &= - \text{ div } \vec{P} = - \text{ div } (\chi_e \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{D} \right) \\ &= -\frac{\chi_e}{1 + 4\pi \chi_e} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\frac{4\pi \chi_e \rho_f}{1 + 4\pi \chi_e} \quad , \end{aligned}$$

daß diese proportional zur freien Ladungsdichte im Dielektrikum ist.
Als *Grundgleichungen der Elektrostatik im Dielektrikum* erhalten wir also

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{8.1.20}$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_f \tag{8.1.21}$$

Mit Gleichung (8.1.18) schreibt sich Gleichung (8.1.21) im linearen Dielektrikum auch als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon}\rho_f \tag{8.1.21}$$

Gleichung (8.1.20) liefert die Darstellung $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ durch das elektrostatische Potential Φ. Eingesetzt in Gleichung (8.1.22) ergibt sich die Poisson-Gleichung im linearen Dielektrikum zu

$$\Delta\Phi = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho_f \tag{8.1.23}$$

Im Vergleich zum Vakuum ist die rechte Seite dieser Gleichung um den Faktor ϵ schwächer. Die *Grenzbedingungen* haben wir bereits in Kap. 8.1.4 erörtert. An den Grenzflächen ist im allgemeinen $\vec{\nabla}\epsilon \neq 0$; allerdings folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ die Stetigkeit der Tangentialkomponente $\vec{E}_t$ an den Grenzflächen. Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_f$ ist die Normalkomponente D_n stetig, wenn auf der Grenzfläche nur Polarisationsladungen (also $\rho_f = 0$) vorhanden sind.

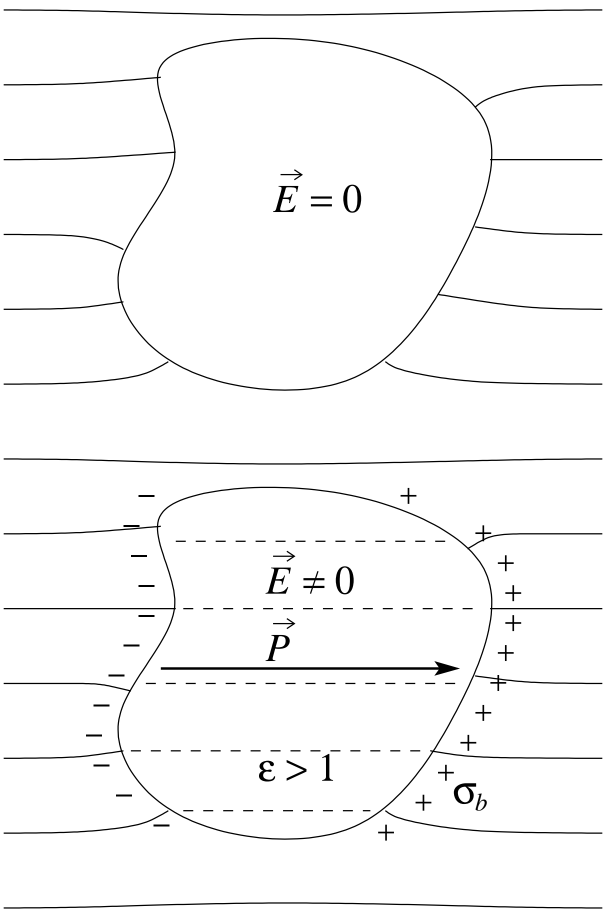

Abb. 8.7: Vergleich zwischen Leiter und Isolator im homogenen $\vec{E}$-Feld.

In Abbildung 8.7 vergleichen wir das Randwertproblem der Elektrostatik für einen Leiter im Feld und einen linearen Isolator im Feld. Der Fall des Leiters läßt sich als Grenzfall des

Dielektrikums für $\epsilon \to \infty$ auffassen.

8.1.6 Beispiel: Kugel aus linearem dielektrischen Material im gleichförmigen elektrischen Feld

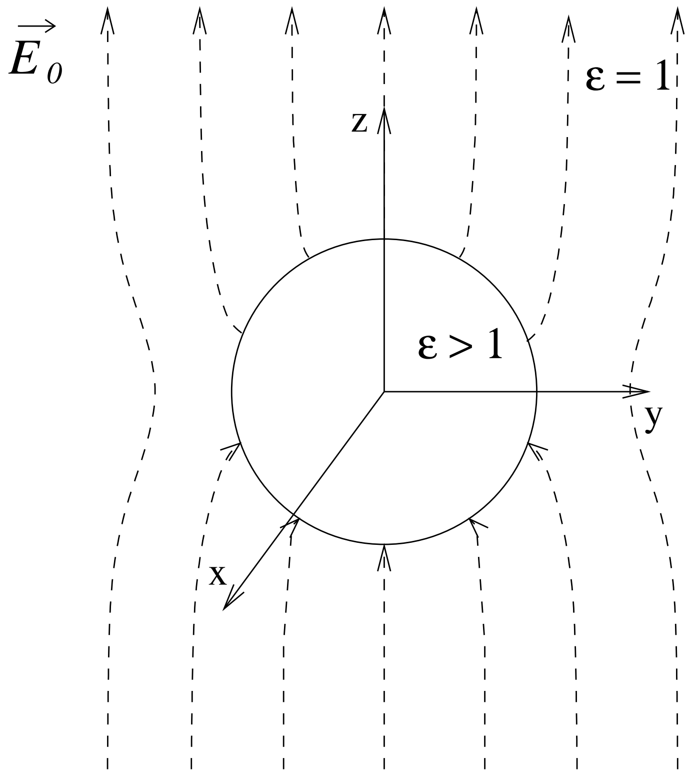

Abb. 8.8: Ansatz für den Feldverlauf der linear-dielektrischen Kugel.

Als Beispiel betrachten wir, wie in Abbildung 8.8 skizziert, eine Kugel aus linearem dielektrischen Material vom Radius R in einem vorher homogenen Feld $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$ mit $E_0 =$ *const.*, d.h.

$$\Phi(r \to \infty) = -E_0 z = -E_0 r\mu \tag{8.1.24}$$

Innerhalb und außerhalb der Kugel existieren keine freien Ladungen, sodaß sich die Poisson-Gleichung (8.1.23) auf die zylindersymmetrische Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ reduziert. Deren allgemeine Lösung ist durch Gleichung (8.1.6) gegeben,

$$\Phi(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n r^n + b_l n r^{-(n+1)}\Big) P_n(\mu)$$

Als Randbedingungen fordern wir:
R1) Für $r \to \infty$ ist das Potential durch Gleichung (8.1.24) gegeben.
R2) ϕ ist endlich für $r \to 0$.
R3) Die Tangentialkomponente $\vec{E}_t$ ist stetig bei $r = R$.

R4) Die Normalkomponente D_n ist stetig bei $r = R$.
Die Randbedingung R2) liefert für das Potential innerhalb der Kugel $r \leq R$

$$\Phi_i(r \leq R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\mu) \tag{8.1.25}$$

Außerhalb der Kugel $r \geq a$ gilt

$$\phi_o(r \geq R) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n r^n + c_n r^{-(n+1)}] P_n(\mu)$$

Aufgrund der Randbedingung R1) $\phi_o(r \to \infty) = -E_0 r \mu$ folgt $b_n = 0 \; \forall n \neq 1$ und $b_1 = -E_0$, sodaß

$$\phi_o(r \geq R) = -E_0 r \mu + \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) \tag{8.1.26}$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

Die Randbedingung R3) erfordert für $r = R$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}|_{r=R} = \frac{\partial \Phi_o}{\partial \theta}|_{r=R}$$

oder

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu}|_{r=R} = \frac{\partial \Phi_o}{\partial \mu}|_{r=R}$$

Gemäß Gleichungen (8.1.25) und (8.1.26) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \frac{dP_n}{d\mu} = -E_0 R + \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^{-(n+1)} \frac{dP_n}{d\mu}$$

Für $n = 1$ erhalten wir mit $P_1 = \mu$

$$a_1 R = -E_0 R + c_1 R^{-2}$$

oder

$$a_1 = -E_0 + \frac{c_1}{R^3} \tag{8.1.27}$$

Für $n \neq 1$ bleibt dann

$$a_n R^n = c_n R^{-(n+1)}$$

oder

$$a_n = c_n R^{-(2n+1)} \tag{8.1.28}$$

Die Randbedingung R4) ergibt mit $D_n = \epsilon E_n$ innerhalb $r \leq R$ und $E_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$

$$-\epsilon \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}|_{r=R} = -\frac{\partial \Phi_o}{\partial r}|_{r=R} \quad ,$$

sodaß

$$\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n n R^{n-1} P_n = -E_0 \mu - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) R^{-(n+2)} P_n$$

Für $n = 1$ erhalten wir

$$\epsilon a_1 = -E_0 - 2c_1 R^{-3}$$

oder

$$a_1 = -\frac{1}{\epsilon}[E_0 + \frac{2c_1}{R^3}] \tag{8.1.29}$$

Für $n \neq 1$ folgt

$$\epsilon n a_n R^{n-1} = -(n+1) c_n R^{-(n+2)}$$

oder

$$a_n = -\frac{c_n(n+1)}{\epsilon n} R^{-(2n+1)} \tag{8.1.30}$$

Die Gleichungen (8.1.28) und (8.1.30) lassen sich nur erfüllen für

$$a_n = c_n = 0 \quad \forall n \neq 1 \tag{8.1.31}$$

Aus Gleichungen (8.1.27) und (8.1.29) ergeben sich

$$c_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_0, \quad a_1 = -\frac{3E_0}{\epsilon + 2}$$

Damit folgt für die Potentiale

$$\Phi_i(r \leq R) = -\frac{3}{\epsilon + 2} E_0 r \mu = -\frac{3}{\epsilon + 2} E_0 z \tag{8.1.32}$$

und

$$\Phi_o(r \geq R) = -E_0 r \mu + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \frac{R^3}{r^2} \mu = -E_0 z + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \frac{R^3 \mu}{r^2} \tag{8.1.33}$$

Innerhalb der Kugel beschreibt das Potential (8.1.31) ein konstantes elektrisches Feld parallel zu $\vec{E}_0$ mit der Stärke

$$E_i = E_{i,z} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \frac{3E_0}{\epsilon + 2} < E_0 \tag{8.1.34}$$

für $\epsilon > 1$.
Im Außenraum ist das Feld gleich dem angelegten Feld $\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_z$ plus dem Feld eines Dipols im Ursprung mit Stärke

$$|\vec{E}| = \frac{p\mu r}{r^3} \quad ,$$

d.h. dem Dipolmoment

$$p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_0 \tag{8.1.35}$$

Der Dipol ist in $\vec{E}_0$-Richtung orientiert.
Aus Gleichungen (8.1.17) und (8.1.34) folgt für die Polarisation der Kugel

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}_i = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 \quad , \tag{8.1.36}$$

in Übereinstimmung mit dem Dipolmoment (8.1.35), denn

$$p = \int_{Kugel} dV |\vec{P}| = 4\pi R^3 P = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_0$$

Das Potential der Oberflächenladung ist dann

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{r} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \mu \tag{8.1.37}$$

Dieses sorgt für das innere Feld, das dem äußeren Feld entgegenwirkt, sodaß sich gerade $E_{i,z} = \frac{3E_0}{\epsilon+2}$ innerhalb der Kugel einstellt (zur Illustration siehe Abbildung 8.9). Im Gegensatz zum Leiter (Kap. 3.12.4) bewirken die Oberflächenladungen hier nur eine teilweise Aufhebung des inneren Feldes! Im Leitergrenzfall $\epsilon \to \infty$ erhalten wir wieder $E_{i,z} \to 0$.

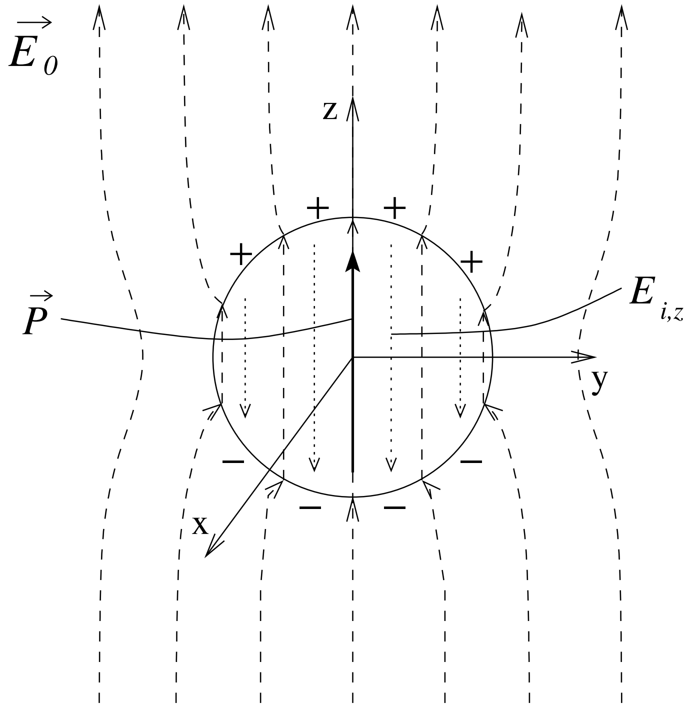

Abb. 8.9: Das sich ausbildende innere $E_{i,z}$-Feld resultierend aus dem äußeren Feld und dem entgegengesetzten Feld der Oberflächenladung σ_b.

8.2 Magnetisierte Medien

Mittels des Biot-Savart-Gesetzes haben wir im Vakuumfall Magnetfelder aus vorgegebenen Stromdichten berechnet. In Medien bilden die Elektronen komplexe, rasch fluktuierende, mikroskopische Ströme, mit denen magnetische Momente verknüpft sind, die dann zu Magnetfeldern führen. Auf makroskopischer Skala sind die Stromfäden so klein, daß wir sie als magnetische Dipole beschreiben können (siehe Kap. 4.7 zur Multipolentwicklung für große Entfernungen).

Im Rahmen der makroskopischen Beschreibung mitteln wir die mikroskopischen Feldgleichungen über makroskopische Volumina. Weil $\operatorname{div} \vec{B}_{mikro} = 0$ gilt auch

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{8.2.1}$$

für das makroskopisch gemittelte Feld. Deshalb dürfen wir auch weiterhin die Vektorpotentialdarstellung $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ benutzen.

Die große Zahl von Molekülen und Atomen pro Volumenelement, jedes mit dem magnetischen Moment $\vec{m}_i$ führt auf die *gemittelte, makroskopische Magnetisierung* der Dichte des magnetischen Moments

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_i N_i(\vec{r}) < \vec{m}_i > \quad , \tag{8.2.2}$$

wobei N_i die mittlere Zahl der Moleküle vom Typ i pro Volumenelement am Ort $\vec{r}$ ist. Existiert neben dieser materiellen Magnetisierung noch eine makroskopische Stromdichte $\vec{j}$ durch die Bewegung freier Ladungen im Medium, so ist das Vektorpotential am Punkt $\vec{r}$ aus einem Volumenelement V am Ort $\vec{r}'$ gegeben durch (vgl. Gleichungen (4.4.3) und (4.7.8))

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c}\int_V d^3r' \; \frac{\vec{j}_{Gesamt}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{c}\int_V d^3r' \; \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{c\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

Wir formen den Magnetisierungsterm um mit

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

zu

$$\int_V d^3r' \; \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \int_V d^3r' \; \vec{M}(\vec{r}')\times\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Nach partieller Integration unter Ausnutzung von Gleichung (2.4.2.5),

$$\vec{a}\times(\vec{\nabla}f) = -\vec{\nabla}\times(f\vec{a}) + f(\vec{\nabla}\times\vec{a}),$$

folgt

$$\int_V d^3r' \; \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\int_V d^3r' \; \vec{\nabla}_{r'}\times\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_V d^3r' \; \frac{\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{8.2.4}$$

Mathematische Zwischenbetrachtung: Das erste Integral in Beziehung (8.2.4) kann in ein Oberflächenintegral transformiert werden, das zu Null wird unter der Annahme, daß die Magnetisierung $\vec{M}$ räumlich beschränkt ist:

$$\int_V d^3r' \; \vec{\nabla}_{r'}\times\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\oint_{O(V)} \frac{\vec{M}\times d\vec{F}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0 \tag{8.2.5}$$

Zum Beweis: Sei $\vec{b}$ ein beliebiges Vektorfeld. Die zu beweisende Behauptung ist

$$\int_V d^3r \; \vec{\nabla}\times\vec{b} = \oint_{O(V)} \vec{n}\times\vec{b}\, dF$$

Mit einem beliebigen anderen **konstanten** Vektor $\vec{C}$ bilden wir das Vektorfeld $\vec{a} = \vec{b}\times\vec{C}$ und wenden das Gauß-Theorem auf div $\vec{a}$ an:

$$\int_V d^3r \; \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \int_V d^3r \; \vec{\nabla}\cdot(\vec{b}\times\vec{C}) = \oint_{O(V)} (\vec{b}\times\vec{C})\cdot\vec{n}dF \tag{8.2.6}$$

Es ist

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{b} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \ ,$$

weil $\vec{C}$ konstant ist, und das Spatprodukt

$$(\vec{b} \times \vec{C}) \cdot \vec{n} = (\vec{C} \times \vec{n}) \cdot \vec{b} = (\vec{n} \times \vec{b}) \cdot \vec{C}$$

Für Beziehung (8.2.6) folgt dann

$$\int_V d^3r \ \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = \oint_{O(V)} \vec{C} \cdot (\vec{n} \times \vec{b}) \ dF \ ,$$

oder wegen der Konstanz von $\vec{C}$

$$\vec{C} \cdot \int_V d^3r \ \vec{\nabla} \times \vec{b} = \vec{C} \cdot \oint_{O(V)} (\vec{n} \times \vec{b}) \ dF$$

Weil $\vec{C}$ beliebig ist, erhalten wir

$$\int_V d^3r \ \vec{\nabla} \times \vec{b} = \oint_{O(V)} (\vec{n} \times \vec{b}) \ dF = \oint_{O(V)} d\vec{F} \times \vec{b}$$

Q.E.D.
Gemäß Gleichungen (8.2.3) und (8.2.4) folgt dann

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \ \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \ \frac{c\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] \\ &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \ \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') + \ c\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

Der makroskopischen Magnetisierung entspricht offensichtlich ein Strom, der sogenannte *Magnetisierungsstrom*

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = c \ \mathrm{rot} \ \vec{M}(\vec{r}) \tag{8.2.8}$$

Die Summe $\vec{j} + \vec{j}_M$ muß dann in die makroskopische magnetostatische Ampere-Gleichung (vgl. Gleichung (4.4.10)) eingehen, d. h.

$$\mathrm{rot} \ \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + \vec{j}_M \right) = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + c \ \mathrm{rot} \ \vec{M} \right) \tag{8.2.9}$$

Diese Beziehung kann umgeformt werden in

$$\mathrm{rot} \ (\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{8.2.10}$$

Zusätzlich zur magnetischen Induktion $\vec{B}$ definieren wir die *magnetische Feldstärke*

$$\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi\vec{M} \tag{8.2.11}$$

In magnetisierten Medien lauten die magnetostatischen Feldgleichungen dann

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{8.2.12}$$

und

$$\text{div } \vec{B} = 0 \tag{8.2.13}$$

Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ ersetzt bei Anwesenheit von Materie die magnetische Induktion $\vec{B}$. Im Vakuum sind beide gleich $\vec{H} = \vec{B}$.
Die Einführung von $\vec{H}$ als makroskopisches magnetisches Feld ist völlig analog zur Einführung der elektrischen Verschiebung $\vec{D}$ für das elektrostatische Feld im Dielektrikum mit $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho_f$ und $\text{rot } \vec{E} = 0$.
Die fundamentalen Felder sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$. $\vec{D}$ und $\vec{H}$ wurden eingeführt, um die Beiträge von atomaren Ladungen und Strömen in Materie zu berücksichtigen.

8.2.1 Suszeptibilität und Permeabilität

Die experimentelle Erfahrung zeigt, daß es eine Proportionalität

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H} \tag{8.2.14}$$

zwischen der Magnetisierung $\vec{M}$ von Materialien und der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ gibt. Der Proportionalitätsfaktor χ_m wird *Suszeptibilität* genannt. Bei vielen Materialien ist diese konstant, manchmal ist $\chi_m = \chi_m(\vec{H})$, oder $\vec{M}$ ist nicht parallel zu $\vec{H}$, sodaß χ_m ein Tensor ist.
Mit Gleichung (8.2.14) folgt für Gleichung (8.2.11)

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\chi_m\vec{H} \quad ,$$

oder

$$(1 + 4\pi\chi_m)\vec{H} = \vec{B} \quad ,$$

sodaß

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{8.2.15}$$

mit der *Permeabilität*

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m \tag{8.2.16}$$

Nach dem Wert von μ bzw. χ_m klassifiziert man magnetisierte Medien als:
Diamagnetika : $\mu < 1$, $\chi_m < 0$
Paramagnetika : $\mu > 1$, $\chi_m > 0$
Ferromagnetika : $\mu >> 1$, $\mu = \mu(H)$

8.3 Maxwell-Gleichungen in Materie

Die Maxwell-Gleichungen in Materie beruhen auf folgenden Erfahrungstatsachen:
a) Elektrische Ladungen sind Quellen und Senken des Vektorfeldes der dielektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D}$. Für den dielektrischen Verschiebungsfluß durch eine die Ladungen umhüllende Fläche gilt dann

$$\frac{1}{4\pi}\oint \vec{D}\cdot\vec{n}dF = Q = \int_V dV\rho \ ,$$

was aus dem Coulomb-Gesetz abgeleitet werden kann.
b) Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$V = \oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$

mit dem magnetischen Fluß $\Phi_m = \int_F \vec{B}\cdot\vec{n}dF$.
c) Es existieren keine isolierten magnetischen Monopole, d.h. die magnetische Induktion ist quellfrei.
d) Ampere-Gesetz:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}I = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}\cdot\vec{n}dF$$

8.3.1 Maxwell-Gleichungen in integraler Form

Aus diesen Erfahrungstatsachen folgen die integralen Maxwell-Gleichungen zu

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{n}dF = 4\pi\int_V dV\rho \ , \tag{8.3.1}$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_F \vec{B}\cdot\vec{n}dF \ , \tag{8.3.2}$$

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{n}dF = 0 \tag{8.3.3}$$

und

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \left(\int \vec{j} \cdot \vec{n} dF + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} \cdot \vec{n} dF \right) \tag{8.3.4}$$

Dabei ist der eingeführte Maxwellsche Verschiebungsstrom (2. Term auf der rechten Seite von Gleichung (8.3.4)) nötig zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \rho + \int \vec{j} \cdot \vec{n} dF = 0 \tag{8.3.5}$$

8.3.2 Maxwell-Gleichungen in differentieller Form

Mithilfe des Gauß-Theorems und des Stokes-Theorems wandeln man die integralen Gleichungen (8.3.1) – (8.3.4) in die differentiellen makroskopischen Maxwell-Gleichungen um:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad , \tag{8.3.6}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{8.3.7}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \tag{8.3.8}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{8.3.9}$$

mit der differentiellen Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{8.3.10}$$

Das Kraftgesetz

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \tag{8.3.11}$$

vermittelt die Verbindung zur Mechanik.
Vervollständigt werden die Maxwell-Gleichungen durch die *Verknüpfungsgleichungen*

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \tag{8.3.12}$$

und

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \quad , \tag{8.3.13}$$

wobei $\vec{P}$ der Vektor der elektrischen Polarisation und $\vec{M}$ der Magnetisierungsvektor sind. Damit können wir Gleichung (8.3.9) umschreiben zu einer Gleichung für $\vec{E}$ und $\vec{B}$:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{ rot } (\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) \ \ ,$$

sodaß

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \dot{\vec{P}} + c \text{ rot } \vec{M}\right) + \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} \tag{8.3.14}$$

Für isotrope, normal polarisierbare Substanzen in statischen Feldern gelten die *Materialgleichungen*

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi_e)\vec{E} \tag{8.3.15}$$

und

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\chi_m)\vec{H} \tag{8.3.16}$$

Die differentiellen Maxwell-Gleichungen (8.3.6) – (8.3.9) sind partielle, *lineare* gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung. Wegen der Linearität gilt insbesondere das Superpositionsprinzip für die Lösungen dieser Gleichungen.