7. Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

Als Grundlage der speziellen Relativitätstheorie (siehe Kap. 7 Mechanik-Skript) stellte Einstein zwei Postulate auf:
I) In allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen gelten die gleichen Naturgesetze.
II) Die Geschwindigkeit des Lichts hat in allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen den gleichen Betrag, unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle relativ zum Beobachter.
Postulat I heißt, daß wir die Naturgesetze *kovariant* formulieren müssen.
Aus Postulat II folgt, daß der Übergang zwischen zwei Systemen durch die Lorentztransformation beschrieben wird.

7.1 Die Lorentz-Transformation

Man denke sich zwei Bezugssysteme K und $K^{'}$, die sich in x-Richtung mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit $\vec{V}$ zueinander bewegen. Aufgrund der Isotropie des Raums ist keine Richtung besonders ausgezeichnet, sodaß wir die x-Achse parallel zu $\vec{V} = \vec{\beta} c$ wählen können. Wie in der Mechanik-Vorlesung gezeigt, gilt für die *Lorentz-Transformation*

$$\begin{pmatrix} x^{'} \\ ct^{'} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{7.1.1}$$

und

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ ct^{'} \end{pmatrix} \tag{7.1.2}$$

Im Grenzfall $\beta << 1$ folgt sofort mit $\gamma \simeq 1 + (\beta^2/2) \simeq 1$ aus Gleichung (7.1.1) die Galilei-Transformation $x^{'} \simeq x - Vt$ und $t^{'} \simeq t$.
Für manche Anwendungen ist es nützlich, die Transformationsformeln auch für den allgemeinen Fall, daß die Relativgeschwindigkeit $\vec{V}$ nicht in Richtung der x-Achse zeigt, zu kennen. Man erhält diese, indem man den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \tag{7.1.3}$$

in einen Anteil $\vec{r}_{\parallel} \parallel \vec{V}$ und $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{V}$ aufspaltet. Aus Gleichungen (7.1.1) folgt dann

$$\vec{r}^{'}_{\perp} = \vec{r}_{\perp}, \quad \vec{r}^{'}_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t), \quad t^{'} = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2}) \tag{7.1.4}$$

Weil aber

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2}, \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$$

folgen mit Gleichungen (7.1.4)

$$\vec{r}' = \vec{r}_\perp' + \vec{r}_\parallel' = \vec{r}_\perp + \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t) =$$

$$\vec{r} - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{V})\vec{V}}{V^2} + \gamma(\frac{(\vec{r}\cdot\vec{V})\vec{V}}{V^2} - \vec{V}t) = \vec{r} + \frac{\gamma-1}{V^2}(\vec{r}\cdot\vec{V})\vec{V} - \gamma\vec{V}t \qquad (7.1.5)$$

und

$$t' = \gamma(t - \frac{\vec{V}\cdot\frac{(\vec{r}\cdot\vec{V})\vec{V}}{V^2}}{c^2}) = \gamma(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{c^2}) \qquad (7.1.6)$$

als allgemeine Transformationgleichungen.
Wir betrachten zunächst die Invarianz der skalaren Wellengleichung (6.1.7)

$$\vec{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = 0 \qquad (7.1.7)$$

bei Lorentz-Transformation. Es gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -V\gamma\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}\,, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

Damit folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = (\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'})(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}) = \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{V^2\gamma^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{V\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (\gamma\frac{\partial}{\partial t'} - V\gamma\frac{\partial}{\partial x'})(\gamma\frac{\partial}{\partial t'} - V\gamma\frac{\partial}{\partial x'}) = \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + V^2\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 V\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}$$

Mit den beiden letzten Ergebnissen folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{V^2\gamma^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{V\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{V^2\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2\gamma^2 V}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}$$

$$= \gamma^2(1 - \frac{V^2}{c^2})\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + (\frac{V^2}{c^2} - 1)\frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

Damit ist die Forminvarianz der skalaren Wellengleichung bei Lorentz-Transformation bewiesen.

7.2 Minkowski-Raum

Die Prüfung physikalischer Gesetze auf Kovarianz, d.h. auf Forminvarianz gegenüber der Lorentz-Transformation, wird sehr erleichtert, wenn man formal eine vierte Koordinate ct einführt. Der *Minkowski-Raum* (auch als *Welt-Raum* bezeichnet) besteht dann aus den drei Dimensionen des gewöhnlichen Ortsraums und einer vierten Dimension, die proportional zur Zeit t ist.
Ein Punkt in diesem vierdimensionalen Raum erhält dann eine Darstellung in

$$\textit{kontravarianten}\text{ Komponenten: } (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \tag{7.2.1}$$

und eine Darstellung in

$$\textit{kovarianten}\text{ Komponenten: } (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z), \tag{7.2.2}$$

die durch Stellung der Indizes unterschieden werden. Ein Vektor im Minkowski-Raum mit griechischen Indizes erhält die Bezeichnung

$$(x_\mu) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Man verwendet die Einsteinsche Summenkonvention, daß in einem Produkt über gleiche griechische Indizes automatisch über diese von 0 bis 3 summiert wird, d.h.

$$x_\mu x^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu$$

Zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten besteht die Beziehung

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv (g^{\mu\nu} x_\nu) \tag{7.2.3}$$

Das Quadrat des Abstands im Minkowski-Raum wird definiert durch

$$\tau^2 \equiv \frac{1}{c^2} x_\mu x^\mu \tag{7.2.4}$$

Gemäß Gleichung (7.2.3) gilt

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2} x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu,$$

d.h $g^{\mu\nu}$ definiert den Abstand und wird daher *metrischer Tensor* oder einfach *Metrik* genannt.
Gehen wir jetzt auf infinitesimale Abstände über, so ist das Quadrat des Abstands von zwei nahe benachbarten Ereignissen durch

$$(d\tau^2) = \frac{1}{c^2}(dx_\mu)(dx^\mu) = \frac{1}{c^2}[c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2] \tag{7.2.5}$$

Für $ds = cd\tau = 0$ ist ebenfalls auch $ds^{'} = cd\tau^{'} = 0$ im relativ bewegten System erfüllt. Es folgt, daß $ds = ads^{'}$, und weil weder das ruhende noch das bewegte System ausgezeichnet sind, auch $ds^{'} = ads$. Daher muß $a^2 = 1$ oder $a = 1$ sein und

$$ds = cd\tau = ds^{'} = cd\tau^{'} \tag{7.2.6}$$

ist invariant unter Lorentz-Transformation.
Zur anschaulichen Bedeutung von Gleichung (7.2.4) bemerken wir, daß im Ursprung des Koordinatensystems

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2}x_\mu x^\mu = \frac{1}{c^2}[c^2t^2 - (x=0)^2 - (y=0)^2 - (z=0)^2] = t^2 \tag{7.2.7}$$

ist, d.h. τ entspricht der systemeigenen Zeit (*Eigenzeit, Weltzeit*).
Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$x_\mu x^\mu = x^{'}_\mu x^{'\mu} \tag{7.2.8}$$

und die Lorentztransformation lautet

$$x^{'}_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu \tag{7.2.9}$$

mit

$$\Lambda^\nu_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2.10}$$

7.2.1 Vierer-Skalare, Vierer-Vektoren und Vierer-Tensoren

In Analogie zur Definition von Skalaren, Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Ortsraum definieren wir einen Vierer-Vektor (oder einen Tensor 1. Ordnung) als eine Menge von vier Komponenten, die sich gemäß Gleichung (7.2.9) transformieren, also das gleiche Transformationsverhalten zeigen wie der Vierer-Ortsvektor (7.2.1).
Ebenso ist ein Vierer-Tensor 2. Ordnung eine Größe mit 16 Komponenten, die sich gemäß

$$T^{'}_{\mu\nu}(x^{'}_\mu) = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\eta_\nu T_{\alpha\eta}(x_\mu) \tag{7.2.11}$$

transformieren.
Ein Vierer-Skalar ist demnach ein Vierer-Tensor 0. Ordnung und ist invariant unter Lorentz-Transformation, d.h.

$$S^{'}(x^{'}_{\mu}) = S(x_{\mu}) \tag{7.2.12}$$

Das Abstandselement $(d\tau)^2$ ist ein Vierer-Skalar.
Gemäß dieser Definitionen bilden

$$(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu} \tag{7.2.13}$$

die kontravarianten Komponenten und

$$(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}) \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \tag{7.2.14}$$

die kovarianten Komponenten eines Vierer-Vektors.
Wenn sich Vierer-Vektoren wie der Vierer-Ortsvektor transformieren, dessen Abstandselement ein Vierer-Skalar ist, dann ist auch das Skalarprodukt eines beliebigen Vierer-Vektors $Q_{\mu} = (Q_0. -Q_x, -Q_y, -Q_z)$ mit sich selbst ebenfalls invariant unter Lorentztransformation, d.h.

$$Q^2 = Q_{\mu}Q^{\mu} = Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 = const. \tag{7.2.15}$$

Ebenfalls folgt für zwei Vierer-Vektoren Q_{μ} und R_{μ} mit Gleichung (7.2.15)

$$(Q_{\mu} + R_{\mu})^2 = Q_{\mu}Q^{\mu} + 2Q_{\mu}R^{\mu} + R_{\mu}R^{\mu} = Q^2 + P^2 + 2Q_{\mu}R^{\mu} = const.,$$

daß das Skalarprodukt

$$Q_{\mu}R^{\mu} = Q^{'}_{\mu}R^{'\mu} \tag{7.2.16}$$

invariant ist.
Gelingt es, die physikalischen Gesetze mithilfe von Vierer-Tensoren gleicher Ordnung zu formulieren, ist die Kovarianz besonders leicht zu erkennen.

7.3 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

7.3.1 Vierer-Potential

Die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

schreiben wir in der Form

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial c\rho}{\partial ct} = 0 \tag{7.3.1}$$

Führen wir die 4-fach induzierte Größe

$$j^\alpha = (c\rho, j_x, j_y, j_z) \tag{7.3.2}$$

ein, schreibt sich Gleichung (7.3.1) mit der kovarianten Ableitung (7.2.14) als

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{7.3.3}$$

Nach dem Postulat I der speziellen Relativitätsthreorie gilt die Beziehung (7.3.3) in allen Inertialsystemen,

$$\partial'_\mu j'^\mu = \partial_\mu j^\mu = 0, \tag{7.3.4}$$

d.h. $\partial_\mu j^\mu$ ist ein Lorentzskalar. Weil gemäß Gleichung (7.2.14) ∂_μ ein kovarianter Vierer-vektor ist, ist dann die *Viererstromdichte* (7.3.2) ein kontravarianter Vierervektor mit dem Transformationsverhalten (7.2.9), also

$$j'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha j^\alpha \tag{7.3.5}$$

Die Potentialgleichungen (5.5.11) – (5.5.12)

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{7.3.6}$$

und

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = 4\pi\rho \tag{7.3.7}$$

mit der Lorentz-Eichung (5.5.10)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{7.3.8}$$

legen es nahe, das *Vierer-Potential*

$$A^\mu \equiv (\Phi, A_x, A_y, A_z) \tag{7.3.9}$$

einzuführen. Damit lassen sich mit Gleichung (7.3.2) die Gleichungen (7.3.6) und (7.3.5) in einer Gleichung zusammenzufassen:

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \tag{7.3.10}$$

wobei der d'Alembert-Operator

$$\Box = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{7.3.11}$$

verwendet wurde. Man bezeichnet Gleichung (7.3.10) als *kovariante Maxwellgleichungen für die Potentiale.*
Der d'Alembert-Operator (oder Quabla-Operator) ist ein Lorentzskalar, weil die Ableitungen ∂_μ und ∂^μ kovariante bzw. kontravariante Vierer-Vektoren sind (vergl. Gleichungen (7.2.12) und (7.2.13)). Weil j^μ ein kontravarianter Vierer-Vektor ist, muß nach Beziehung (7.3.10) auch A^μ ein kontravarianter Vierer-Vektor sein. Damit ist $\partial_\mu A^\mu$ ein Lorentzskalar, sodaß die Lorentz-Eichung (7.3.8) in der Form

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{7.3.12}$$

in jedem Inertialsystem gilt.

7.3.2 Kovariante Maxwellgleichungen und Feldstärketensor

Mit dem d'Alembert-Operator $\Box = \partial_\nu \partial^\nu$ schreiben wir Beziehung (7.3.10)

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{7.3.13}$$

Aus der Lorentz-Eichung (7.3.12) $\partial_\nu A^\nu = 0$ folgt

$$\partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = 0$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von Gleichung (7.3.13), erhalten wir

$$\partial_\nu \left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right) = \frac{4\pi}{c} j^\mu,$$

oder

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{7.3.14}$$

wobei wir den *kontravarianten Feldstärketensor* einführen

$$F^{\nu\mu} \equiv \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{7.3.15}$$

Weil die rechte Seite von Gleichung (7.3.14) und ∂_ν kontravariante bzw. kovariante Vierer-Vektoren sind, muß $F^{\nu\mu}$ ein kontravarianter Lorentztensor 2. Stufe sein.
Der Feldstärketensor (7.3.15) entspricht der Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärken aus den Potentialen durch

$$\vec{E} = -\text{ grad } \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{ rot } \vec{A}$$

Aus der Definition (7.3.15) folgt sofort, daß $F^{\nu\mu}$ invariant unter der Eichtransformation

$$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \lambda \tag{7.3.16}$$

ist, wobei λ eine beliebige skalare Funktion bezeichnet.
Der kovariante Feldstärketensor ergibt sich mit dem metrischen Tensor gemäß Gleichung (7.2.3) zu

$$F_{\alpha\eta} = g_{\alpha\nu} g_{\eta\mu} F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{7.3.17}$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich aus den kovarianten Maxwellgleichungen (7.3.14) ableiten. Für $\mu = 1$ folgt mit $j^1 = c\rho$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} j^1 = 4\pi\rho = \partial_\nu F^{\nu 1} &= \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_4 F^{41} \\ &= 0 + \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \text{ div } \vec{E}, \end{aligned}$$

also

$$\text{div } E = 4\pi\rho$$

Für $\mu = 2$ folgt mit $j^2 = j_x$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} j^2 = \frac{4\pi}{c} j_x = \partial_\nu F^{\nu 2} &= \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} + \partial_4 F^{42} \\ &= -\partial_{ct} E_x + 0 + \partial_y B_z - \partial_z B_y = -\partial_{ct} E_x + [\text{ rot } B]_x, \end{aligned}$$

also

$$[\text{ rot } B]_x - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

Für $\mu = 3$ und $\mu = 4$ erhalten wir entsprechend

$$[\text{ rot } B]_y - \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

und

$$[\text{ rot } B]_z - \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_z,$$

sodaß

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen folgen aus der Eigenschaft der Jacobi-Identität des Feldstärketensors

$$\partial^\lambda F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\lambda} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} = 0 \tag{7.3.18}$$

7.3.3 Lorentz-Transformation der Feldstärken

Wie oben gezeigt, ist der Feldstärketensor (7.3.15) ist ein Lorentztensor zweiter Stufe. Dann gilt gemäß Gleichung (7.2.11) das Transformationsverhalten

$$F^{'\alpha\eta}(x^{'}) = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\eta_\nu F^{\mu\nu}(x) \tag{7.3.19}$$

Unter Verwendung der Transformationmatrix (7.2.10),

$$\Lambda^\nu_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

berechnen wir explizit das Transformationsverhalten einzelner Matrixelemente des Feldstärketensors. So folgt für

$$\begin{aligned} -E^{'}_x = F^{'12} &= \Lambda^1_\mu \Lambda^2_\nu F^{\mu\nu} = \gamma\Lambda^2_\nu F^{1\nu} - \beta\gamma\Lambda^2_\nu F^{2\nu} \\ = -\beta\gamma^2 F^{11} + \gamma^2 F^{12} &+ \beta^2\gamma^2 F^{21} - \beta\gamma^2 F^{22} = 0 + \gamma^2 F^{12} + \beta^2\gamma^2 F^{21} + 0 \\ &= -\gamma^2 E_x + \beta^2\gamma^2 E_x = -\gamma^2(1-\beta^2)E_x = -E_x, \end{aligned} \tag{7.3.20}$$

$$\begin{aligned} -E^{'}_y = F^{'13} &= \Lambda^1_\mu \Lambda^3_\nu F^{\mu\nu} = \gamma\Lambda^3_\nu F^{1\nu} - \beta\gamma\Lambda^3_\nu F^{2\nu} \\ &= \gamma F^{13} - \beta\gamma F^{23} = \gamma(F^{13} - \beta F^{23}) = \gamma(-E_y + \beta B_z), \end{aligned} \tag{7.3.21}$$

$$\begin{aligned} -E^{'}_z = F^{'14} &= \Lambda^1_\mu \Lambda^4_\nu F^{\mu\nu} = \gamma\Lambda^4_\nu F^{1\nu} - \beta\gamma\Lambda^4_\nu F^{2\nu} \\ &\gamma F^{14} - \beta\gamma F^{24} = \gamma(F^{14} - \beta F^{24}) = \gamma(-E_z - \beta B_y), \end{aligned} \tag{7.3.22}$$

$$B^{'}_x = F^{'43} = \Lambda^4_\mu \Lambda^3_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^3_\nu F^{4\nu} = F^{43} = B_x, \tag{7.3.23}$$

$$\begin{aligned} B^{'}_y = F^{'24} = \Lambda^2_\mu \Lambda^4_\nu F^{\mu\nu} &= -\beta\gamma\Lambda^4_\nu F^{1\nu} + \gamma\Lambda^4_\nu F^{2\nu} = -\beta\gamma F^{14} + \gamma F^{24} \\ &= \gamma(F^{24} - \beta F^{14}) = \gamma(B_y + \beta E_z) \end{aligned} \tag{7.3.24}$$

und

$$\begin{aligned} B^{'}_z = F^{'32} &= \Lambda^3_\mu \Lambda^2_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^2_\nu F^{3\nu} \\ &= -\beta\gamma F^{31} + \gamma F^{32} = \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \tag{7.3.25}$$

Insgesamt gilt also

$$E'_x = E_x \ , \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \ , \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \tag{7.3.26}$$

und

$$B'_x = B_x \ , \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \ , \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \tag{7.3.27}$$

In vektorieller Form lauten die Transformationsgleichungen

$$E'_\parallel = E_\parallel \ , \quad B'_\parallel = B_\parallel \ , \quad \vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \ , \quad \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}) \tag{7.3.28}$$

Beim Übergang zwischen zwei Inertialsystemen werden die Komponenten $\vec{E}$ und $\vec{B}$ des Feldstärketensors gemischt transformiert. Ein reines elektrisches Feld im ungestrichenen System wird als Gemisch von elektrischem und magnetischem Feld im gestrichenen System erscheinen.

7.4 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder

In Kap. 5.8 haben wir gezeigt, daß sich die Lorentz-Kraft und damit die Bewegungsgleichung für Ladungen im elektromagnetischen Feld aus der Lagrange-Funktion (5.8.8) oder der Hamilton-Funktion (5.8.12) ableiten läßt. Aus der Mechanik-Vorlesung wissen wir, daß sich die Lagrange-Gleichungen und die kanonischen Bewegungsgleichungen aus dem Hamilton-Prinzip der kleinsten Wirkung,

$$S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t) dt = 0, \tag{7.4.1}$$

ergeben.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie sich die Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld selbst aus einem entsprechend verallgemeinerten Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder ergeben.

7.4.1 Lagrange-Dichte und Hamilton-Dichte

Im Rahmen einer Feldtheorie führen wir die *Lagrange-Dichte* $\mathcal{L}$ durch das Volumenintegral

$$L = \int\int\int \mathcal{L} dxdydz \tag{7.4.2}$$

ein, wobei das Integrationsvolumen beliebig ist. Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ ist dabei eine Funktion von einer oder mehreren Funktionen $u_r(x, y, z, t)$ und deren ersten partiellen Ableitungen $\partial u_r/\partial x$, $\partial u_r/\partial y$, $\partial u_r/\partial z$ und $\partial u_r/\partial t$.

Das Variationsprinzip (7.4.1) lautet dann

$$\delta \int\int\int\int \mathcal{L} dxdydzdt = 0, \tag{7.4.3}$$

wobei die willkürlichen Variationen δu_r an den Randflächen des beliebigen durch x, y, z und t beschriebenen vierdimensionalen Raum-Zeit-Volumens verschwinden sollen. Unter einer Lorentz-Tranformation sorgen die Längenkontraktion (siehe Mechanik-Vorlesung Kap. 7.1.5) und die Zeitdilatation (siehe Mechanik-Vorlesung Kap. 7.1.6) dafür, daß das vierdimensionale Volumenelement $dxdydzdt$ invariant ist. Weil das Integrationsvolumen von Gleichung (7.4.3) beliebig ist, führt eine Lorentz-invariante Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ dann auf Lorentz-invariante Feldgleichungen.
In Analogie zur klassischen Mechanik definieren wir die *Hamilton-Dichte* durch

$$\mathcal{H} \equiv \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_r} \dot{u}_r - \mathcal{L} \tag{7.4.4}$$

und die Hamilton-Funktion ergibt sich durch Integration dieser Dichte über das dreidimensionale Raumelement

$$H = \int \int \int \mathcal{H} dxdydz \tag{7.4.5}$$

Wir führen jetzt die Variation gemäß Gleichung (7.4.3) aus, d.h.

$$\int \int \int \int \delta \mathcal{L} dxdydzdt = 0 \tag{7.4.6}$$

Mit der δ-Notation (siehe Mechanik-Vorlesung Kap. (3.11.1) gilt

$$\delta \mathcal{L} = \sum_r \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \delta u_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial y}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial z}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial t}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial t} \Big) \tag{7.4.7}$$

Weil die beliebigen Variationen unabhängig vom Ableitungsprozess sind, gilt

$$\delta \frac{\partial u_r}{\partial x} = \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial x}, \quad \delta \frac{\partial u_r}{\partial y} = \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial y}, \quad \delta \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial z}, \quad \delta \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial t},$$

sodaß z. B. nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
& \int \int \int \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial x} dxdydzdt \\
&= \int \int \int \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial x} dxdydzdt \\
&= \int dy \int dz \int dt \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial x} \\
&= \int dy \int dz \int dt \Big([\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \delta u_r]_{\text{Rand von x}} - \int dy \int dz \int dt \int dx \delta u_r \frac{\partial}{\partial x} [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}}] \Big) \\
&= - \int \int \int \int \delta u_r \frac{\partial}{\partial x} [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}}] dxdydzdt,
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

weil der Randterm verschwindet aufgrund der Annahme $\delta u_r|_{\text{Rand von x}} = 0$. Verfährt man ebenso mit den anderen Termen von Gleichung (7.4.7), erhält man für Gleichung (7.4.6)

$$\int\int\int\int \sum_r \delta u_r \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial z}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial t}}\Big) = 0$$

Weil die Variationen δu_r beliebig sind, gilt für jede Feldfunktion u_r

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial z}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial t}} = 0 \tag{7.4.9}$$

zu jedem Zeitpunkt und an jedem Punkt des betrachteten Raum-Zeit-Gebiets. Die Gleichungen (7.4.9) werden als *Euler-Lagrange-Gleichungen* bezeichnet. Mit der kovarianten Ableitung (7.2.14) und der Einsteinschen Summenkonvention schreiben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen (7.4.9) kurz als

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_r)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r}, \ \ r = 1, 2, 3, ... \tag{7.4.10}$$

7.4.2 Klein-Gordon-Lagrange-Dichte für ein skalares (Spin 0) Feld

Als erste Anwendung diskutieren wir den Fall einer einzelnen skalaren Feldfunktion $u_1 = \Phi$ mit der invarianten Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2}(\frac{mc}{\hbar})^2\Phi^2 \qquad (7.4.11),$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention verwandt wird. Ausgeschrieben lautet die Dichte (7.4.10) also

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_0\Phi\partial_0\Phi - \partial_1\Phi\partial_1\Phi - \partial_2\Phi\partial_2\Phi - \partial_3\Phi\partial_3\Phi] - \frac{1}{2}(\frac{mc}{\hbar})^2\Phi^2,$$

wobei der Summationsindex hier von 0 bis 3 läuft.
Gemäß der Euler-Lagrange-Gleichung (7.4.10) berechnen wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \partial_0\Phi = \partial^0\Phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1\Phi)} = -\partial_1\Phi = \partial^1\Phi,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_2\Phi)} = -\partial_2\Phi = \partial^2\Phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3\Phi)} = -\partial_3\Phi = \partial^3\Phi$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -(\frac{mc}{\hbar})^2\Phi$$

Damit erhalten wir in diesem Fall als Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi + (\frac{mc}{\hbar})^2\Phi \tag{7.4.12}$$

die *Klein-Gordon-Gleichung*, die in der Quantentheorie Teilchen mit Spin 0 und Masse m beschreibt.

7.4.3 Proca-Lagrange-Dichte für ein Vektor-Feld (Spin 1)

Als nächstes untersuchen wir den Fall einer Vierer-Vektor-Feldfunktion $u_1 = A^\mu$ mit der invarianten Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi}(\frac{mc}{\hbar})^2 A^\nu A_\nu \qquad (7.4.13)$$

Mit dem Feldstärketensor (7.3.15) schreibt sich diese Lagrange-Dichte als

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}(\frac{mc}{\hbar})^2 A^\nu A_\nu \qquad (7.4.14)$$

Gemäß der Euler-Lagrange-Gleichung (7.4.10) berechnen wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu}[\frac{1}{8\pi}(\frac{mc}{\hbar})^2 A^\nu A_\nu] = \frac{1}{8\pi}(\frac{mc}{\hbar})^2 \frac{\partial}{\partial A_\nu}[(A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2] = \frac{1}{4\pi}(\frac{mc}{\hbar})^2 A^\nu$$

und (Übungsaufgabe)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu} \qquad (7.4.15)$$

Damit erhalten wir in diesem Fall als Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + (\frac{mc}{\hbar})^2 A^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} + (\frac{mc}{\hbar})^2 A^\nu = 0 \qquad (7.4.16)$$

die *Proca-Gleichung*, die in der Quantentheorie Teilchen mit Spin 1 und Masse m beschreibt. Im Fall $m = 0$ ergibt die Proca-Gleichung (7.4.16) gerade die quellfreien Maxwell-Gleichungen (7.3.14) mit $j^\mu = 0$.

7.4.4 Maxwell-Lagrange-Dichte für ein masseloses Vektor-Feld mit Quelle j^μ

Wir betrachten die invariante Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu A_\mu \qquad (7.4.17)$$

mit dem Feldstärketensor (7.3.15) und der vorgegebenen Viererstrom-Funktion j^μ. Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c}j^\nu$$

und der Beziehung (7.4.15) erhalten wir als Feldgleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu \qquad (7.4.18)$$

gerade die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.3.14), die das elektromagnetische Feld beschreiben, das durch die Viererstromdichte j^μ erzeugt wird.
Aus der Feldgleichung (7.4.18) folgt

$$\frac{4\pi}{c}\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

oder

$$\partial_\nu j^\mu = 0 \tag{7.4.19}$$

Aus Konsistenzgründen muß deshalb die Viererstromfunktion j^μ in der Lagrange-Dichte (7.4.17) so gewählt werden, daß sie die Kontinuitätsgleichung (7.4.19) erfüllt. Damit ist die Ladungserhaltung innerhalb der klassischen Elektrodynamik immer erfüllt.

7.4.5 Bemerkung

Die korrekte Herleitung der Maxwell-Gleichungen aus der Lagrange-Dichte (7.4.17) durch das Eulersche Variationsverfahren (7.4.3) hatte weitreichende Konsequenzen für das Vorgehen der Theoretischen Physik. Während in der klassischen Mechanik der Dynamik von Massenpunkten die Lagrange-Funktion $L = T - V$ noch aus der Differenz von kinetischer und potentieller Energie berechnet wurde, wird die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ in der relativistischen Feldtheorie axiomatisch angesetzt und, bis auf die Forderung der Invarianz unter Lorentz-Transformation, frei gewählt. Wann immer das Problem auftritt, Gleichungen zu formulieren, die ein physikalisches Problem relativistisch beschreiben, konstruiert man eine invariante Lagrange-Dichte und leitet die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ab. Der Vergleich mit den empirischen Befunden entscheidet dann über die Güte der Konstruktion. Diese Vorgehensweise hat sich als äußerst fruchtbar erwiesen. So gelang es, die quell- und wechselwirkungsfreie Dirac-Gleichung der relativistischen Quantenelektrodynamik für Spin 1/2, die als nichtrelativistischen Grenzfall die Schrödinger-Gleichung enthält, aus einer entsprechend konstruierten freien Dirac-Lagrange-Dichte für ein Spinor-Feld abzuleiten. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz dieser freien Dirac-Lagrange-Dichte erfordert dann die zusätzliche Einführung eines masselosen Eichfeldes A_μ, das dann in der Tat die Viererstromfunktion j^μ in der Maxwell-Lagrange-Dichte (7.4.17) inklusive der Ladungserhaltung liefert. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz generiert damit die gesamte Elektrodynamik und spezifiziert die Ströme und Ladungen durch Spin 1/2 Teilchen. Details dieser Herleitung sprengen den Rahmen dieser Vorlesung.