# 6. Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Zu den bedeutendsten Erfolgen der Maxwell-Theorie gehört die Erkenntnis, daß sich elektromagnetische Felder unabhängig von irgendwelchen Ladungen oder Strömen selbst im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Das bedeutet, daß die Felder nicht nur mathematische Hilfsgrößen zur Beschreibung von Wechselwirkungsprozessen zwischen Ladungen bzw. Strömen von elektrischen Ladungen darstellen – so hatten wir sie zunächst eingeführt – , sondern eine eigenständige physikalische Realität besitzen.

## 6.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

In *freien* Raumbereichen, d.h. Raumbereichen ohne Ladungen ($\rho = 0$) und Ströme ($\vec{j} = 0$), gelten für die elektromagnetischen Potentiale in Lorentz-Eichung nach Gleichungen (5.5.11) – (5.5.12) die homogenen Wellengleichungen

$$\Box\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \Delta\Phi(\vec{r},t) = 0$$

und

$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \Delta\vec{A}(\vec{r},t) = 0$$

und für die Felder $\vec{B} = \text{ rot } \vec{A}$, $\vec{E} = -\text{ grad } \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ebenfalls

$$\Box\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{6.1.1}$$

und

$$\Box\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \tag{6.1.2}$$

Die Gleichungen (6.1.1) und (6.1.2) lassen sich auch direkt aus den quellfreien Maxwell-Gleichungen im Vakuum (5.3.5) – (5.3.8) ableiten:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \ , \tag{6.1.3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \ , \tag{6.1.4}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \ , \tag{6.1.5}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{6.1.6}$$

Bilden wir die Rotation von Gleichung (6.1.3), so folgt mit Gleichungen (6.1.4) und (6.1.5) und rot rot = grad div $-\Delta$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{ grad div } \vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} = - \text{ rot } \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

oder

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = \Box\vec{E} = 0$$

Bilden wir ebenso die Rotation von Gleichung (6.1.5), so folgt mit Gleichungen (6.1.6) und (6.1.3)

$$\text{rot rot } \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial(\text{ rot } \vec{E})}{\partial t} = \text{ grad div } \vec{B} - \Delta\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

oder

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \Delta\vec{B} = \Box\vec{B} = 0$$

Q.E.D.
Im Vakuum erfüllt jede Komponente von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ dann die Gleichung

$$\Delta f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{6.1.7}$$

Diese beschreibt, wie wir zeigen werden, Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit $c$ ausbreiten. Diese Erkenntnis, daß Licht eine elektromagnetische Welle darstellt, war ein großer Triumpf für Maxwell. In seine Worten: "We can scarcely avoid the interference that light consists in the transverse modulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena."
Eine wichtige Rolle bei dieser Erkenntnis kommt dem von Maxwell eingeführten Verschiebungsstrom $\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (siehe Kap. 5.3) im Ampere-Gesetz zu: ohne diesen hätten wir keine Wellengleichung für $\vec{E}$ herleiten können, sondern nur für $\vec{B}$.

### 6.1.1 Ebene Wellen

Eine Lösung $f(x,t)$ der Gleichung (6.1.7), die nur von *einer* Raumkoordinate (hier $x$) abhängt, wird als *ebene* Welle bezeichnet. Die Wellengleichung lautet dann

$$(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)f(x,t) = 0 \tag{6.1.8}$$

oder

$$(\partial_x - \frac{1}{c}\partial_t)(\partial_x + \frac{1}{c}\partial_t)f(x,t) = 0 \ , \tag{6.1.9}$$

wobei wir kurz

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

schreiben. Gleichung (6.1.9) vereinfacht sich weiter mit den Substitutionen

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct,$$

oder

$$x = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad ct = \frac{1}{2}(\eta - \xi),$$

zu

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} f(\xi, \eta) = 0, \tag{6.1.10}$$

denn

$$\partial_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}\partial_x + \frac{\partial(ct)}{\partial \xi}\frac{1}{c}\partial_t = \frac{1}{2}(\partial_x - \frac{1}{c}\partial_t)$$

und

$$\partial_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}\partial_x + \frac{\partial(ct)}{\partial \eta}\frac{1}{c}\partial_t = \frac{1}{2}(\partial_x + \frac{1}{c}\partial_t)$$

Die allgemeine Lösung von Gleichung (6.1.10) kann als Summe von beliebigen Funktionen $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ geschrieben werden:

$$f(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

oder

$$f(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{6.1.11}$$

In Abbildung 6.1 skizzieren wir einen möglichen Verlauf der Funktion $f_1(x - ct)$ zu einem festen Zeitpunkt $t = t_1$ (Momentaufnahme). Zu einer späteren Zeit $t = t_2 > t_1$ ist dieser um die Strecke $c(t_2 - t_1)$ in positiver $x$-Richtung verschoben. Die ebene Welle breitet sich also, ohne ihre Form zu ändern, mit der Geschwindigkeit $c$ in positiver $x$-Richtung aus.

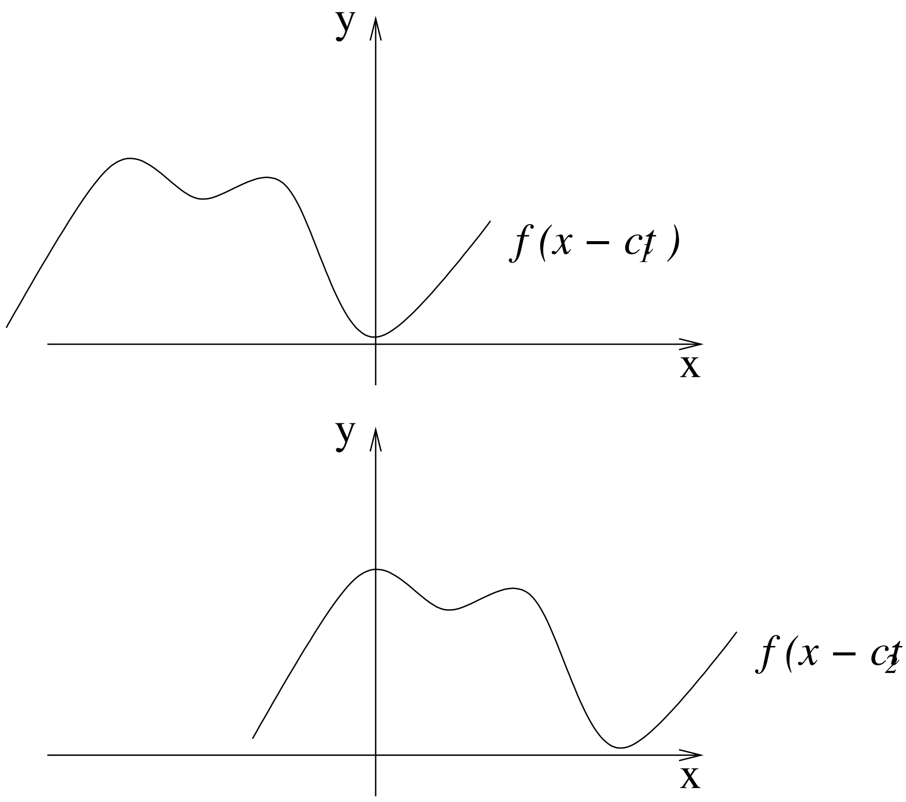


*Abb. 6.1: Verlauf der Funktion* $f_1(x - ct)$.

Analog beschreibt $f_2(x+ct)$ eine ebene Welle, die in negativer $x$-Richtung mit der Geschwindigkeit $c$ fortschreitet.

### 6.1.2 Ebene, monochromatische Welle

Ein Spezialfall liegt vor, wenn $f(x, t)$ durch eine harmonische (d.h. periodische) Funktion gegeben ist, d. h. in komplexer Schreibweise

$$f_1(x - ct) \propto e^{\imath k(x-ct)} \tag{6.1.12}$$

und $f_2(x + ct) = 0$. Eine solche Lösung heißt *ebene, monochromatische Welle*. Die Größe $k$ heißt *Wellenzahl*. Definiert man durch die *Dispersionsrelation* für das Vakuum die Kreisfrequenz $\omega^2 = k^2c^2$ so schreibt sich Gleichung (6.1.12) mit $\omega = kc$ auch als

$$f_1(x - ct) \propto e^{\imath(kx-\omega t)} \tag{6.1.13}$$

$\nu = \omega/2\pi$ ist die Frequenz und $\lambda = 2\pi/k$ die Wellenlänge der ebenen, monochromatische Welle.

Wird die Ausbreitungsrichtung durch den Einheitsvektor $\vec{\kappa}_0$ vorgegeben, so kann mithilfe des *Wellenzahlvektors*

$$\vec{k} = k\vec{\kappa}_0 \tag{6.1.14}$$

die ebene, monochromatische Welle durch

$$f_1(\vec{\kappa}_0 \cdot \vec{r} - ct) \propto e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{6.1.15}$$

dargestellt werden.

### 6.1.3 Linearkombination von ebenen, monochromatischen Wellen

Obwohl (6.1.15) nur eine spezielle Wellenform darstellt, so ist sie wichtig, da man jede Welle als Überlagerung von monochromatischen Wellen beschreiben kann, d.h. wir setzen die allgemeine Lösung von Gleichung (6.1.8) an als

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ A(k) \exp[\imath(kx - \omega t)]\ , \tag{6.1.16}$$

wobei $A(k)$ eine zunächst beliebige Funktion der Wellenzahl $k$ ist. Die Lösung (6.1.16) heißt *Wellenpaket*.

Mit dem Ansatz (6.1.16) folgen sofort

$$\partial_x f = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \imath k A(k) \exp[\imath(kx - \omega t)]\ ,$$

$$\partial_x^2 f = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ (-k^2) A(k) \exp[\imath(kx - \omega t)] \tag{6.1.17}$$

und

$$\partial_t f = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ (-\imath\omega) A(k) \exp[\imath(kx - \omega t)]\ ,$$

$$\partial_t^2 f = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ (-\omega^2) A(k) \exp[\imath(kx - \omega t)] \tag{6.1.18}$$

Einsetzen von (6.1.17) und (6.1.18) in Gleichung (6.1.8) liefert

$$(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2) f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ [-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}] A(k) \exp[\imath(kx - \omega t)] = 0,$$

sodaß für Werte von $\omega$ und $k$, die die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = k^2 c^2 \tag{6.1.19}$$

erfüllen, der Ansatz (6.1.16) tatsächlich die Lösung von Gleichung (6.1.8) ist

Die Amplitudenfunktion $A(k)$ kann aus den Anfangsbedingungen $f(x, t = 0)$ und $\dot{f}(x, t = 0)$ erschlossen werden.

### 6.1.4 Potentiale und Felder von ebenen, monochromatischen Wellen

Aus Gleichung (6.1.15) erhält man die Potentiale und Felder in einer ebenen, monochromatischen Welle, die sich in Richtung $\vec{\kappa}_0$ ausbreitet zu

$$\vec{A} = \Re\Big(\vec{A}_0 e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\Big) \ , \tag{6.1.20a}$$

$$\Phi = \Re\Big(\Phi_0 e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\Big) \ , \tag{6.1.20b}$$

$$\vec{E} = \Re\Big(\vec{E}_0 e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\Big) \tag{6.1.20c}$$

und

$$\vec{B} = \Re\Big(\vec{B}_0 e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\Big) \tag{6.1.20d}$$

In formalen Rechnungen werden wir das Realteilzeichen $\Re$ oft weggelassen und der Übergang jeweils dann vollziehen, wenn physikalisch relevante Größen berechnet werden.
Für die Maxwell-Gleichung (6.1.3),

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B} \ , \tag{6.1.21}$$

erhalten wir für die linke Seite aus (6.1.20c) mit $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = k_m x_m$ und Summenkonvention

$$\begin{aligned}
(\text{ rot } \vec{E})_j &= (\text{ rot } \vec{E}_0 e^{\imath(k_m x_m-\omega t)})_j = \epsilon_{jmn}\partial_m E_{0,n} e^{\imath(k_m x_m-\omega t)} \\
&= \epsilon_{jmn}\imath k_m E_{0,n} e^{\imath(k_m x_m-\omega t)} = \imath(\vec{k}\times\vec{E})_j
\end{aligned}$$

also

$$\text{rot } \vec{E} = \imath\vec{k}\times\vec{E}$$

Für die rechte Seite von (6.1.21) folgt aus (6.1.20d)

$$-\frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{B}_0(-\imath\omega)e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \frac{\imath\omega}{c}\vec{B}$$

Gleichung (6.1.21) ergibt dann

$$\imath\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\imath\omega}{c}\vec{B}_0$$

oder

$$\frac{\omega}{c}\vec{B}_0 = \vec{k}\times\vec{E}_0 \tag{6.1.22}$$

Mit der Dispersionsrelation (6.1.19) fogt dann für die Beträge

$$|\vec{B}_0| = |\vec{E}_0| \tag{6.1.23}$$

Für die Maxwell-Gleichung (6.1.4) folgt mit (6.1.20c)

$$\text{div } \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \vec{E}_0 \cdot [\imath\vec{\nabla}(\vec{k}\cdot\vec{r})] e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$= \imath\vec{E}_0 \cdot [\text{ grad } (k_x x + k_y y + k_z z)] e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \imath\vec{E}_0 \cdot \vec{k} e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \;,$$

oder

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \tag{6.1.24}$$

Ebenso folgt aus der Maxwell-Gleichung (6.1.5)

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \tag{6.1.25}$$

Wie in Abbildung 6.2 skizziert, bilden die Vektoren $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{k}$ der ebenen, monochromatischen Welle ein orthogonales Rechtssystems, d. h. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ stehen immer und überall senkrecht auf $\vec{k}$ und aufeinander (*transversale Wellen*). Weiterhin sind in dieser transversalen Welle $|\vec{B}| = |\vec{E}|$ betragsmäßig gleich.

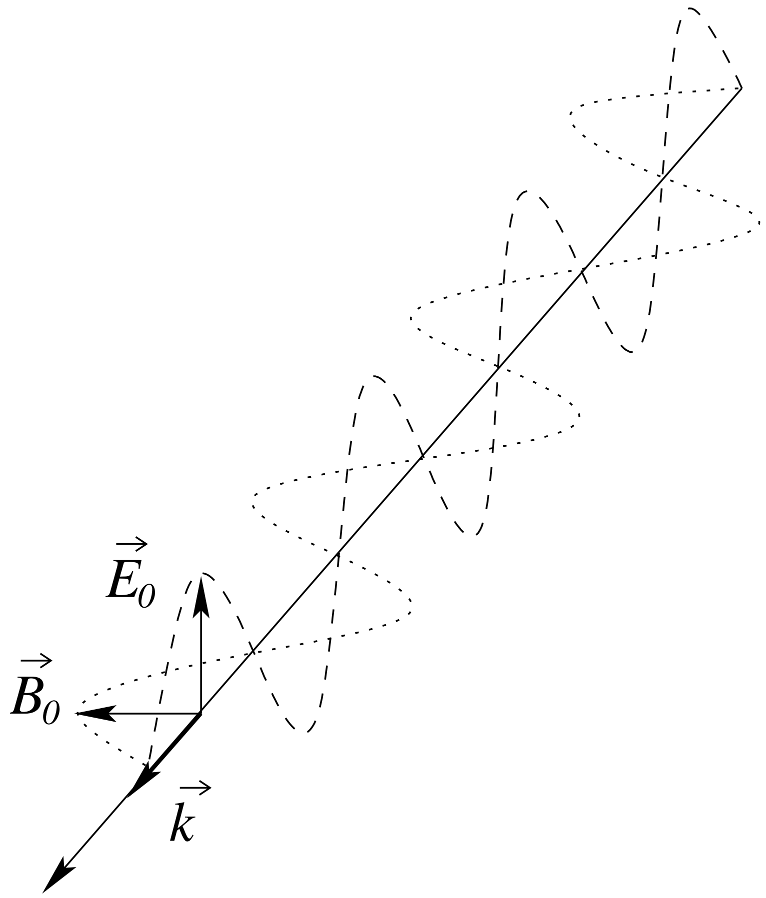


*Abb. 6.2: Orientierung der Vektoren $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$.*

### 6.1.5 Energiedichte und Poynting-Vektor der ebenen, monochromatischen Welle

Die Energiedichte der monochromatischen Welle ergibt sich aus dem zeitlichen Mittel der Summe der Quadrate der Feldstärke $\vec{E}$ und der Induktion $\vec{B}$. Bei der Berechnung der Quadrate müssen wir beachten, daß nur die Realteile von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ quadriert werden dürfen. Das Zeitmittel bezeichnet die Mittelung der Größe $a(t)$

$$\overline{a}(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt' \, a(t')$$

über eine Periode $\tau = 2\pi/\omega$.

Wir betrachten das Skalarprodukt der Realteile zweier komplexer Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$(\Re\vec{a}) \cdot (\Re\vec{b}) = \frac{\vec{a}+\vec{a}^*}{2} \cdot \frac{\vec{b}+\vec{b}^*}{2} = \frac{1}{4}[\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b}^* + \vec{a}^*\cdot\vec{b} + \vec{a}^*\cdot\vec{b}^*] \tag{6.1.26}$$

Mit $\vec{a}(\vec{r},t) = \vec{a}_0(\vec{r})e^{-\imath\omega t}$ und $\vec{b}(\vec{r},t) = \vec{b}_0(\vec{r})e^{-\imath\omega t}$ folgt $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}_0\cdot\vec{b}_0 e^{-2\imath\omega t}$, sodaß

$$\begin{aligned}\overline{\vec{a}\cdot\vec{b}} &= \frac{\vec{a}_0\cdot\vec{b}_0}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt' \exp(-2\imath\omega t') = \frac{\imath}{2\omega\tau}\vec{a}_0\cdot\vec{b}_0[\exp(-2\imath\omega t')]_t^{t+\tau} \\ &= \frac{\imath}{2\omega\tau}\vec{a}_0\cdot\vec{b}_0\exp(-2\imath\omega t)[\exp(-2\imath\omega\tau)-1] = 0\end{aligned}$$

mit $\omega\tau = 2\pi$.

Ebenso folgt aus $\vec{a}^*\cdot\vec{b}^* = \vec{a}_0^*\cdot\vec{b}_0^* e^{2\imath\omega t}$, daß

$$\overline{\vec{a}^*\cdot\vec{b}^*} = 0$$

Dagegen sind $\vec{a}\cdot\vec{b}^* = \vec{a}_0\cdot\vec{b}_0^*$ und $\vec{a}^*\cdot\vec{b} = \vec{a}_0^*\cdot\vec{b}_0$, sodaß

$$\overline{\vec{a}\cdot\vec{b}^*} = \overline{\vec{a}_0\cdot\vec{b}_0^*} = \frac{1}{\tau}\vec{a}_0\cdot\vec{b}_0^*\int_t^{t+\tau} dt' = \vec{a}_0\cdot\vec{b}_0^*$$

und

$$\overline{\vec{a}^*\cdot\vec{b}} = \vec{a}_0^*\cdot\vec{b}_0$$

Damit erhalten wir für das zeitliche Mittel von Gleichung (6.1.26)

$$\overline{\Re\vec{a}\cdot\Re\vec{b}} = \frac{1}{4}(\vec{a}_0\cdot\vec{b}_0^* + \vec{a}_0^*\cdot\vec{b}_0) = \frac{1}{2}\Re(\vec{a}_0\cdot\vec{b}_0^*)$$

Wir erhalten für die Energiedichte der monochromatischen Welle

$$\overline{u}_{em} = \frac{1}{8\pi}[\overline{E^2} + \overline{B^2}] = \frac{1}{16\pi}\Re[\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^* + \vec{B}_0\cdot\vec{B}_0^*] = \frac{1}{16\pi}[E_0^2 + B_0^2]$$

und mit Beziehung (6.1.23)

$$\overline{u}_{em} = \frac{E_0^2}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi} \tag{6.1.27}$$

Ganz analog findet man für das Kreuzprodukt

$$\overline{\Re\vec{a}(t)\times\Re\vec{b}(t)} = \frac{1}{2}\Re(\vec{a}_0\times\vec{b}_0^*) = \frac{1}{2}\Re(\vec{a}_0^*\times\vec{b}_0)\ ,$$

sodaß für den Poynting-Vektor der monochromatischen Welle folgt

$$\overline{\vec{S}(\vec{r},t)} = \frac{c}{4\pi}\overline{\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)} = \frac{c}{8\pi}\Re(\vec{E}_0\times\vec{B}_0^*) \tag{6.1.28}$$

Aus Gleichung (6.1.22) folgt

$$\vec{B}_0^* = \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0^*$$

Eingesetzt in Gleichung (6.1.28) folgt mit (6.1.24)

$$\vec{E}_0\times(\vec{k}\times\vec{E}_0^*) = E_0^2\vec{k} - \vec{E}_0^*(\vec{E}_0\cdot\vec{k}) = E_0^2\vec{k}\ ,$$

sodaß

$$\overline{\vec{S}(\vec{r},t)} = \frac{c^2}{8\pi\omega}\Re[\vec{E}_0\times(\vec{k}\times\vec{E}_0^*)] = \frac{c^2}{8\pi\omega}E_0^2\vec{k} \tag{6.1.29}$$

Zusammen mit Beziehung (6.1.27) erhalten wir

$$\overline{\vec{S}} = \frac{c^2}{\omega}\overline{u}_{em}\vec{k} \tag{6.1.30}$$

und mit der Dispersionsrelation $\omega = kc$

$$\overline{\vec{S}} = c\overline{u}_{em}\frac{\vec{k}}{k} \tag{6.1.31}$$

Der Energietransport in der ebenen, monochromatischen Welle erfolgt in Richtung des Ausbreitungsvektors.

### 6.1.6 Polarisation

Wir führen in Richtung von $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$ die zwei zueinander senkrecht stehenden, konstanten Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ ein (siehe Abbildung 6.2). Diese spannen die Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ auf, die sog. *Polarisationsebene.* Dann erfüllen die beiden Lösungen

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{e}_1 E_1 e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\quad E_1 = |E_1|e^{\imath\alpha_1}$$

und

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{e}_2 E_2 e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\quad E_2 = |E_2|e^{\imath\alpha_2}$$

die Wellengleichung (6.1.2). Die Amplitudenfaktoren $E_1$ und $E_2$ können komplexwertig sein und werden jeweils durch ihren Absolutwert und ihre Phase bestimmt.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (6.1.2) ist durch die Linearkombination

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (\vec{e}_1 E_1 + \vec{e}_2 E_2) e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{6.1.32}$$

gegeben.
*Linear polarisierte Welle*: In diesem Fall haben $E_1$ und $E_2$ dieselbe Phase $\alpha_1 = \alpha_2$, sodaß

$$\vec{E}_{linear}(\vec{r},t) = (\vec{e}_1 |E_1| + \vec{e}_2 |E_2|) e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha_1)} \tag{6.1.33}$$

*Elliptisch polarisierte Welle*: In diesem Fall haben $E_1$ und $E_2$ unterschiedliche Phasen $\alpha_1 \neq \alpha_2$, sodaß mit der Phasenverschiebung $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\vec{E}_{ellipt}(\vec{r},t) = \vec{e}_1 |E_1| e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \vec{e}_2 |E_2| e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi)} \tag{6.1.34}$$

*Zirkular polarisierte Welle*: In diesem Fall sind die Absolutwerte der Amplitudenfaktoren $|E_1| = |E_2| = E_0$ gleichgroß und die Phasendifferenz $\phi = \pm\pi/2$, sodaß

$$\vec{E}_{zirk}(\vec{r},t) = E_0(\vec{e}_1 \pm \imath\vec{e}_2) e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{6.1.35}$$

Betrachten wir den Fall zirkular polarisierter Wellen genauer: o. B. d. A. sei $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$, sodaß $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ und

$$\vec{E}_{zirk} = E_0(\vec{e}_x \pm \imath\vec{e}_y) e^{\imath(kz-\omega t)}$$

Für den Realteil des elektrischen Felds der zirkular polarisierten Welle erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\Re\vec{E}_{zirk} &= \frac{E_0}{2}\Big[(\vec{e}_x \pm \imath\vec{e}_y)e^{\imath(kz-\omega t)} + (\vec{e}_x \mp \imath\vec{e}_y)e^{-\imath(kz-\omega t)}\Big] \\ &= \frac{E_0}{2}\Big[\vec{e}_x(e^{\imath(kz-\omega t)} + e^{-\imath(kz-\omega t)}) \pm \imath\vec{e}_y(e^{\imath(kz-\omega t)} - e^{-\imath(kz-\omega t)})\Big] \\ &= \frac{E_0}{2}\Big[\vec{e}_x 2\cos(kz-\omega t) \pm 2\imath^2\vec{e}_y\sin(kz-\omega t)\Big] = E_0[\vec{e}_x\cos(kz-\omega t) \mp \vec{e}_y\sin(kz-\omega t)]\end{aligned}$$

oder

$$E_{zirk,x} = E_0\cos(kz-\omega t) = E_0\cos(\omega t-kz), \quad E_{zirk,y} = \mp E_0\sin(kz-\omega t) = \pm E_0\sin(\omega t-kz) \tag{6.1.36}$$

Für festes $z$ ist Gleichung (6.1.36) die Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Radius $E_0$ in der Polarisationsebene, denn

$$E_{zirk,x}^2 + E_{zirk,y}^2 = E_0^2$$

Der $\vec{E}$-Vektor einer zirkular polarisierten Welle hat den konstaten Betrag $E_0$ und rotiert in der Polarisationsebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\Theta$ (siehe Abbildung 6.3), die durch

$$\tan\Theta = \frac{E_{zirk,y}}{E_{zirk,x}} = \frac{\pm\sin(\omega t - kz)}{\cos(\omega t - kz)} = \pm\tan(\omega t - kz) = \tan(\pm(\omega t - kz)) \ ,$$

also

$$\Theta = \pm(\omega t - kz) \tag{6.1.36}$$

gegeben ist.
Bei Blickrichtung auf die entgegenkommende Welle, also in negativer $z$-Richtung dreht sich der $\vec{E}$-Vektor in Abbildung 6.3 für $+$-Vorzeichen in Gleichung (6.1.37) mit fortlaufender Zeit $t$ links herum (*linkshändig zirkular polarisierte Welle*) und für $-$-Vorzeichen in Gleichung (6.1.37) rechts herum (*rechtshändig zirkular polarisierte Welle*).

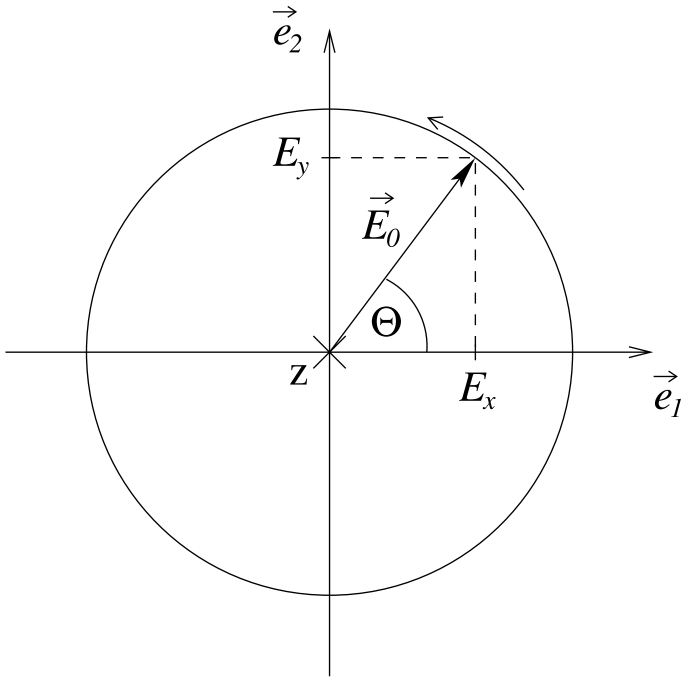


*Abb. 6.3: Linkshändig zirkular polarisierte Welle.*

Für den Fall elliptisch polarisierter Wellen mit der Phasendifferenz $\phi = \pm\pi/2$ gilt

$$\vec{E}_{ellipt} = (E_{01}\vec{e}_x \pm \imath E_{02}\vec{e}_y)e^{\imath(kz-\omega t)}$$

Mit $E_{01} \neq E_{02}$ ist $\Re\vec{E}_{ellipt} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$ mit

$$E_x(z,t) = E_{01}\cos(\omega t - kz), \quad E_y(z,t) = \pm E_{02}\sin(\omega t - kz) \tag{6.1.38}$$

Für festes $z$ ist Gleichung (6.1.38) die Parameterdarstellung eine Ellipse mit den Halbachsen $E_{01}$ und $E_{02}$ in der Polarisationsebene (siehe Abbildung 6.4), denn

$$(\frac{E_x}{E_{01}})^2 + (\frac{E_y}{E_{02}})^2 = 1$$

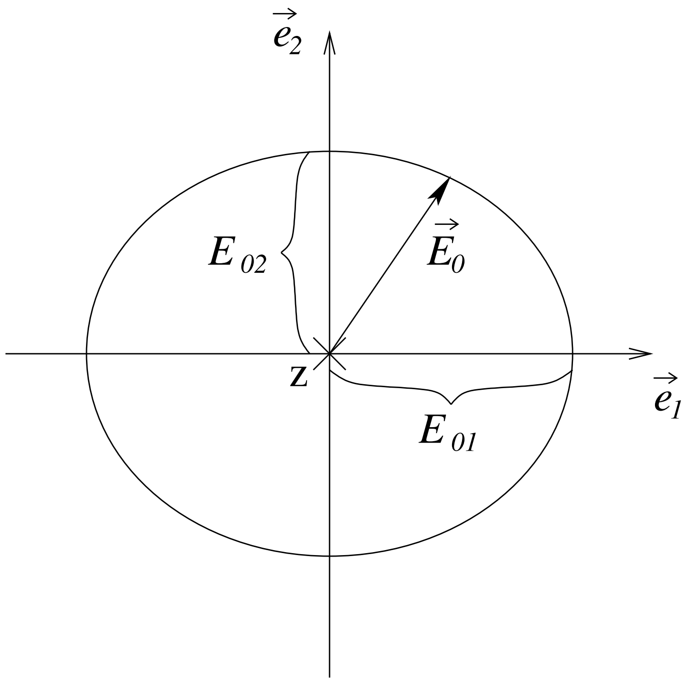


*Abb. 6.4: Elliptisch polarisierte Welle.*

Im allgemeinen elliptischen Fall beliebiger Phase $\phi$ und für $E_{01} \neq E_{02}$ ist die Ellipse noch gegenüber dem $(x, y)$-Koordinatenachsen gedreht. Die elliptisch polarisierte Welle kann durch die Überlagerung zweier zirkular polarisierter Wellen mit unterschiedlichem Amplitudenfaktor dargestellt werden.

## 6.2 Inhomogene Wellengleichung

Die bisherigen Rechnungen für den Vakuumfall haben gezeigt, daß die homogenen Maxwell-Gleichungen mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ freie elektromagnetische Wellen als Lösungen erlauben, die in der ansonst leeren Welt propagieren. Es bleibt allerdings unklar, wie derartige Wellen erzeugt werden können. Zur Klärung dieser Frage müssen wir $\rho \neq 0$ und $\vec{j} \neq 0$ zulassen, und die inhomogenen Wellengleichungen (5.5.11) und (5.5.12) in Lorentz-Eichung (5.5.10) untersuchen:

$$\Box\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta\Phi(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \ , \tag{6.2.1}$$

$$\Box\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, t) \tag{6.2.2}$$

mit

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t}=0 \tag{6.2.3}$$

**6.2.1 Singuläre Funktionen der Elektrodynamik**
Die Gleichungen (6.2.1) – (6.2.2) haben die Struktur

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2}-\Delta\psi(\vec{r},t)=4\pi f(\vec{r},t)\ , \tag{6.2.4}$$

wobei $f(\vec{r},t)$ eine bekannte Quellverteilung ist.
Wie in der Elektrostatik wird die lineare partielle Differentialgleichung (6.2.4) mit Hilfe der Methode der Green-Funktion gelöst, d.h.

$$\psi(\vec{r},t)=\int D(\vec{r},\vec{r}^{'},t,t^{'})f(\vec{r}^{'},t^{'})dr^{'}dt^{'}\ , \tag{6.2.5}$$

wobei die jetzt vierdimensionale Green-Funktion als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D(\vec{r},\vec{r}^{'},t,t^{'})}{\partial t^2}-\ \Delta D(\vec{r},\vec{r}^{'},t,t^{'})=4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}^{'})\delta(t-t^{'}) \tag{6.2.6}$$

definiert ist und vorgegebene Randbedingungen erfüllt.
Es ist sinnvoll, die Definitionen und Eigenschaften dieser $D$-Funktionen (*singuläre Funktionen der Elektrodynamik*) vorab zu behandeln. Wir wählen dazu einen heuristischen, nicht strengen Zugang, d.h. die Existenz der involvierten Integrale und die Frage nach der Vertauschbarkeit von Differentation und Integration wird nicht weiter untersucht (dies geschieht streng in der mathematischen Theorie der Distributionen).
Dazu definieren wir die vierdimensionale Delta-Funktion

$$\delta^4(X^\mu)=\delta^3(\vec{r})\delta(x_0)\ , \tag{6.2.7}$$

wobei $x_0=ct$ die vierte Koordinate im Minkowski-Weltraum ist (vergl. Mechanik-Skript Kap. 7.2). Setzen wir o.B.d.A. $\vec{r}^{'}=0$, $t^{'}=0$, so lautet Gleichung (6.2.6)

$$\Box D(X^\mu)=4\pi c\delta^4(X^\mu) \tag{6.2.8}$$

mit dem kontravarianten Ortsvektor $X^\mu=(x_0,x,y,z)=(ct,x,y,z)$. Mit dem kovarianten Ortsvektor $X_\mu=(x_0,-x,-y,-z)=(ct,-x,-y,-z)$ ist der Quabla-Operator

$$\Box=\frac{\partial}{\partial X_\mu}\frac{\partial}{\partial X^\mu}=\partial_0^2-\partial_1^2-\partial_2^2-\partial_3^2 \tag{6.2.9}$$

ein Lorentz-Skalar. Wir definieren weiterhin den vierdimensionalen kontravarianten Wellenvektor durch

$$k^\mu=(k_0,\vec{k})\ , \tag{6.2.10}$$

wobei $k_0 = \omega/c$. Dann gilt

$$X_\mu X^\mu = x_0^2 - r^2 = c^2t^2 - r^2, \quad k_\mu k^\mu = k_0^2 - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \;\; X_\mu k^\mu = k_0 x_0 - \vec{k}\cdot\vec{r}$$

Wir kennen die Integraldarstellung (2.7.20) der eindimensionalen $\delta$-Funktion; entsprechend gilt

$$\delta(X^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu \;\exp(-\imath k^\mu X_\mu) \tag{6.2.11}$$

Deshalb stellen wir $D(X^\mu)$ ebenfalls dar als

$$D(X^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu \; g(k)\exp(-\imath k^\mu X_\mu) \tag{6.2.12}$$

Setzen wir die Darstellungen (6.2.11) und (6.2.12) in Gleichung (6.2.8) ein, so folgt mit

$$\Box D(X^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu \; g(k)\Box\exp(-\imath k^\mu X_\mu) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu \; g(k)k_\mu k^\mu\exp(-\imath k^\mu X_\mu)$$

daß

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu \; g(k)k_\mu k^\mu\exp(-\imath k^\mu X_\mu) = \frac{4\pi c}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu \;\exp(-\imath k^\mu X_\mu)$$

Für die Fourier-Transformation $g(k)$ von $D$ gilt also

$$g(k) = -\frac{4\pi c}{k_\mu k^\mu} = \frac{4\pi c}{k^2 - k_0^2} \tag{6.2.13}$$

Für Gleichung (6.2.12) folgt dann

$$D(X^\mu) = \frac{4\pi c}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu \;\frac{\exp(-\imath k^\mu X_\mu)}{k^2 - k_0^2}$$

$$= \frac{4\pi c}{(2\pi)^4}\int d^3k\frac{\exp(\imath\vec{k}\cdot\vec{r})}{2|\vec{k}|}\int_C dk^0 e^{-\imath k_0 x_0}[\frac{1}{k_0+|\vec{k}|} - \frac{1}{k_0-|\vec{k}|}], \tag{6.2.14}$$

wobei $C$ den Integrationsweg in der komplexen $k_0$-Ebene bezeichnet.
Die Darstellung (6.2.14) ist formaler Natur, da für $k^2 = k_0^2$ der Integrand eine Singularität hat, d.h. es existieren Pole bei $k_0 = \pm|\vec{k}| = \pm k$. Das Integral (6.2.14) ist an diesen Stellen nicht definiert und solang bedeutungslos, bis Regeln zur Behandlung dieser Singularität gegeben werden. Diese Regeln können jedoch nicht aus der Mathematik kommen, sondern müssen aus physikalischen Betrachtungen abgeleitet werden.

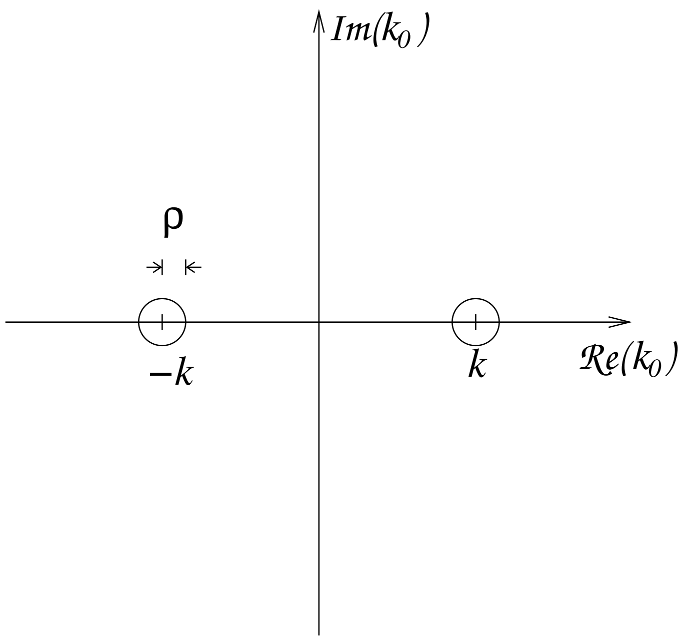


*Abb. 6.5: Die Polstellen in der komplexen $k_0$-Ebene mit den Umgehungskreisen.*

Wir benutzen hier einen phänomenologischen Weg, um das Integral (6.2.14) auszuwerten: Im singulären $k_0$-Integral werden die Integrationswege deformiert, um der Singularität auszuweichen, und danach wird der Grenzübergang vollzogen. Wir betrachten in Abbildung 6.5 die komplexe $k_0$-Ebene und zeichnen dort die möglichen Umgehungswege ein, d.h. um die Pole werden kleine Kreise mit dem Radius $\rho$ ausgeschnitten. Es gibt dann die Abbildung 6.6 gezeigten vier Integrationswege $C_1$, $C_2$, $C_3$ und $C_4$. Nachdem auf diesem Wegen die Integration durchgeführt wurde, kann der Grenzübergang $\rho \to 0$ vollzogen werden. Alle möglichen Wege, d.h. alle Grenzprozesse, besitzen eine mathematisch-physikalische Bedeutung. Entsprechend den vier möglichen Wegen, ergeben sich vier verschiedene $D$-Funktionen.

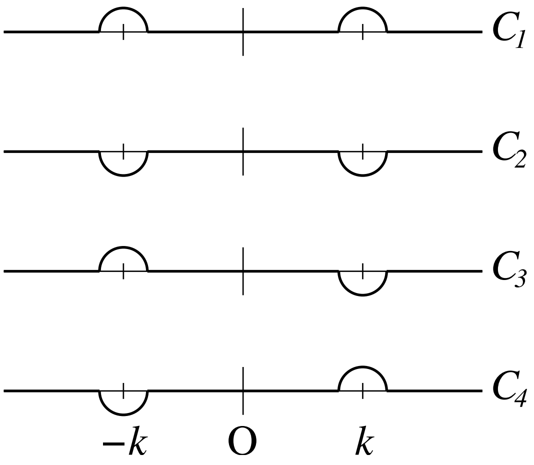


*Abb. 6.6: Die vier Möglichkeiten, die Polstellen $\pm k$ zu umgehen.*

**Weg 1**: ist wichtig und ergibt die sog. *retardierte Green-Funktion*

$$
\begin{aligned}
D_1(X^\mu) &= \frac{4\pi c}{(2\pi)^4} \int d^3k \ \exp(\imath\vec{k}\cdot\vec{r}) \int_{C_1} dk^0 \frac{e^{-\imath k_0 x_0}}{k^2 - k_0^2} \\
&= \frac{c}{4\pi^3} \int d^3k \ \exp(\imath\vec{k}\cdot\vec{r}) \int_{C_1} dk^0 \ F(k, k_0) \qquad (6.2.15)
\end{aligned}
$$

mit $(k = |\vec{k}|)$

$$
F(k, k_0) = \frac{e^{-\imath k_0 x_0}}{k^2 - k_0^2} = \frac{1}{2k}[\frac{1}{k_0 + k} - \frac{1}{k_0 - k}]e^{-\imath k_0 x_0} \qquad (6.2.16)
$$

Wir unterscheiden die zwei Fälle (a) $x_0 < 0$ und (b) $x_0 > 0$:
(a) im ersten Fall $x_0 = -|x_0| < 0$ ist die Funktion $F(k, k_0)$ exponentiell gedämpft für $\Im(k_0) > 0$, denn

$$
F(k, k_0) \propto e^{-\imath k_0 x_0} = e^{\imath |x_0| k_0} = e^{\imath |x_0|(\Re(k_0) + \imath \Im(k_0))} \propto e^{-\Im(k_0)|x_0|} \to 0
$$

für $\Im(k_0) \to \infty$. Deshalb schließen wir den Integrationsweg in der oberen $(\Im k_0 > 0)$-Ebene (siehe Abbildung 6.7).

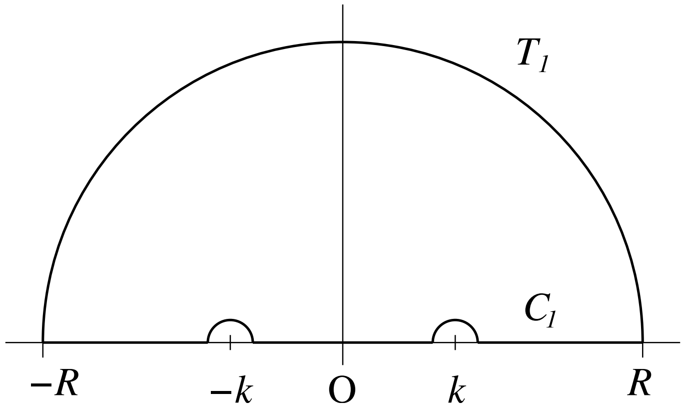


*Abb. 6.7: Fall (a): Integration in der positiven Halbebene.*

Auf dem Halbkreis $T_1$ gilt für $R \to \infty$

$$
\lim_{R\to\infty} \int_{T_1} dk^0 \ F(k, k_0) = 0,
$$

sodaß das Integral über den *geschlossenen* Integrationsweg $C_1 + T_1$ gleich der Summe der Residuen der eingeschlossenen Pole ist:

$$
\int_{C_1} dk^0 \ F(k, k_0) = \int_{C_1 + T_1} dk^0 \ F(k, k_0) = 2\pi\imath \sum \mathrm{Res} \ F(k, k_0),
$$

wobei die Pole im Gegenuhrzeigersinn umfahren werden müssen. Weil $F(k, k_0)$ im Inneren von $C_1 + T_1$ polfrei ist, folgt

$$\int_{C_1} dk^0 \; F(k, k_0) = 0$$

oder

$$D_1(x) = 0 \quad \text{für } x_0 < 0 \tag{6.2.17}$$

(b) im zweiten Fall $x_0 = |x_0| > 0$ schließen wir den Integrationsweg in der unteren ($\Im(k_0) < 0$) Halbebene, weil dort $e^{\Im(k_0)x_0} \to 0$ für $R \to \infty$ (siehe Abbildung 6.8).

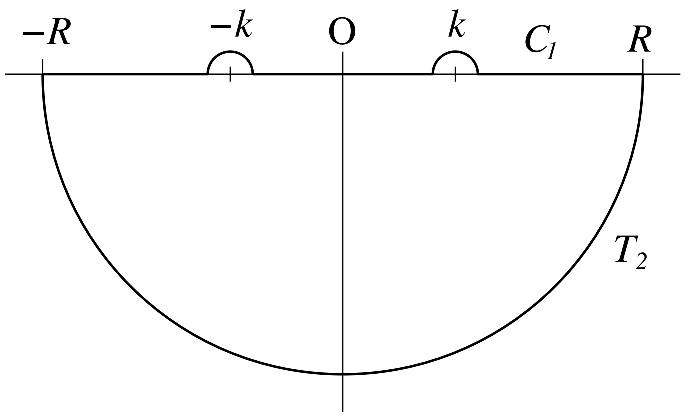


*Abb. 6.8: Fall (b): Integration in der negativen Halbebene.*

Diesmal liegen die Pole innerhalb des Integrationsgebiets $C_1 + T_2$ und werden im Uhrzeigersinn (negativen Sinn) umfahren. Es folgt

$$\int_{C_1} dk^0 \; F(k, k_0) = \int_{C_1+T_2} dk^0 \; F(k, k_0) = -2\pi\imath \sum \text{Res } F(k, k_0)$$

oder mit Gleichung (6.2.16)

$$\int_{C_1} dk^0 \; F(k, k_0) = \frac{1}{2k} \int_{C_1+T_2} dk_0 f(k_0) \tag{6.2.18}$$

mit

$$f(k_0) = [\frac{1}{k_0 + k} - \frac{1}{k_0 - k}] e^{-\imath k_0 x_0} \tag{6.2.19}$$

Hat eine beliebige komplexe Funktion $f(z)$ einen Pol der Ordnung $m$ für $z = a$, so ist das Residuum an der Stelle durch

$$\text{Res }_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a) f(z)] \tag{6.2.20}$$

gegeben (siehe z. B. C. R. Wiley: Advanced Engineering Mathematics, S. 806).
Die Funktion (6.2.19) hat zwei Pole erster ($m = 1$) Ordnung an den Stellen $k_0 = \pm k$, und die Anwendung der Formel (6.2.20) liefert

$$\text{Res}_{\ k_0=-k} f(k_0) = \lim_{k_0 \to -k} [(k_0 - (-k)) f(k_0)] = \lim_{k_0 \to -k} [e^{-\imath k_0 x_0} (1 - \frac{k_0 + k}{k_0 - k})] = e^{\imath k x_0}$$

und

$$\text{Res}_{\ k_0=k} f(k_0) = \lim_{k_0 \to k} [(k_0 - k) f(k_0)] = \lim_{k_0 \to k} [e^{-\imath k_0 x_0} (\frac{k_0 - k}{k_0 + k}) - 1] = -e^{-\imath k x_0}$$

Es folgt für das Integral (6.2.18)

$$\int_{C_1} dk^0 \ F(k, k_0) = -\frac{1}{2k} 2\pi\imath [\text{Res}_{\ k_0=-k} f(k_0) + \text{Res}_{\ k_0=k} f(k_0)] = -\frac{\pi\imath}{k} [e^{\imath k x_0} - e^{-\imath k x_0}]$$

$$= -\frac{\pi\imath}{k} 2\imath sin(k x_0) = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} \sin(|\vec{k}| x_0) \tag{6.2.21}$$

Das Ergebnis (6.2.21) ist unabhängig vom Radius $\rho$, sodaß der Grenzübergang $\rho \to 0$ vollzogen werden kann, und wir erhalten mit Beziehung (6.2.15)

$$D_1(X^\mu) = \begin{cases} \frac{c}{2\pi^2} \int d^3k \ e^{\imath \vec{k} \cdot \vec{r}} \ \frac{\sin(|\vec{k}| x_0)}{|\vec{k}|} & \text{für} \quad x_0 > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x_0 < 0 \end{cases} \tag{6.2.22}$$

Die Integration über $d^3k$ wird durch Einführung von Kugelkoordinaten im $k$-Raum $(k, \theta, \phi)$ durchgeführt, wobei $\theta = \angle(\vec{k}, \vec{r})$ ist. Mit $d^3k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\phi = k^2 dk d\mu d\phi$, wobei $\mu = \cos\theta$, folgt für $x_0 > 0$

$$D_1(X^\mu) = \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu \int_0^\infty dk \ k^2 \ e^{\imath k r \mu} \frac{\sin(k x_0)}{k} = \frac{c}{\pi} \int_0^\infty dk \, k \ \sin(k x_0) \int_{-1}^{1} d\mu \ e^{\imath k r \mu}$$

$$= \frac{c}{\pi} \int_0^\infty dk \, k \ \sin(k x_0) \ \frac{e^{\imath k r} - e^{-\imath k r}}{\imath k r} = \frac{c}{\imath \pi r} \int_0^\infty dk \ \sin(k x_0) (e^{\imath k r} - e^{-\imath k r})$$

$$= \frac{c}{\imath \pi r} \frac{1}{2\imath} \int_0^\infty dk \, (e^{\imath k r} - e^{-\imath k r})(e^{\imath k x_0} - e^{-\imath k x_0})$$

$$= -\frac{c}{2\pi r} (\int_0^\infty dk \, [e^{\imath k (x_0 + r)} - e^{\imath k (x_0 - r)}] - \int_0^\infty dk \, [e^{-\imath k (x_0 - r)} - e^{-\imath k (x_0 + r)}])$$

Substituieren wir im zweiten Integral $k = -k^{'}$ so folgt

$$D_1(X^\mu) = -\frac{c}{2\pi r} (\int_0^\infty dk \, [e^{\imath k (x_0 + r)} - e^{\imath k (x_0 - r)}] + \int_0^{-\infty} dk^{'} [e^{\imath k^{'} (x_0 - r)} - e^{\imath k^{'} (x_0 + r)}])$$

$$= -\frac{c}{2\pi r} \int_{-\infty}^\infty dk \ [e^{\imath k (x_0 + r)} - e^{\imath k (x_0 - r)}] \tag{6.2.23}$$

Mit der Integraldarstellung (2.7.20) der ein-dimensionalen $\delta$-Funktion,

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \ e^{\imath k z},$$

folgt für Gleichung (6.2.23)

$$D_1(X^\mu) = -\frac{c}{r}[\delta(x_0 + r) - \delta(x_0 - r)]$$

Weil $x_0 > 0$, kann $x_0 + r$ nicht verschwinden, sodaß der erste Term keinen Beitrag ergibt. Wir erhalten

$$D_1(X^\mu) = \frac{c\delta(x_0 - r)}{r} = \frac{c\delta(x_0 - |\vec{r}|)}{|\vec{r}|} = \frac{c\delta(ct - |\vec{r}|)}{|\vec{r}|} = \frac{1}{|\vec{r}|}\delta(t - \frac{|\vec{r}|}{c}) \qquad (6.2.24)$$

für $t > 0$.

Bei Aufgabe der Annahmen $\vec{r}^{'} = 0$ und $t^{'} = 0$ verallgemeinern sich Gleichungen (6.2.22) und (6.2.24) zu

$$D_1(\vec{r}, \vec{r}^{'}, t, t^{'}) = \begin{cases} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{'}|}\delta(t - t^{'} - \frac{|\vec{r}-\vec{r}^{'}|}{c}) & \text{für } t > t^{'} \\ 0 & \text{für } t < t^{'} \end{cases} \qquad (6.2.25)$$

Die Lösung (6.2.25) wird wiefolgt physikalisch interpretiert: zur Zeit $t = t^{'}$ wird am Ort $\vec{r}^{'}$ eine Quelle für eine infinitesimal kurze Zeit angeschaltet. Die von dieser Punktquelle ausgehende Störung breitet sich als Kugelwelle von $\vec{r}^{'}$ nach anderen Orten $\vec{r}$ aus, was gleichbedeutend mit einer von $\vec{r}^{'}$ auslaufenden (retardierten) Welle ist. Aus der physikalischen Anschauung ergeben sich dann folgende Forderungen:

(1) Die Welle muß für Zeiten $t < t^{'}$ verschwinden, weil zu diesen Zeiten noch keine Erregung vorhanden war (*Kausalitätsforderung*).

(2) Die Welle muß am Ort $\vec{r}$ zur Zeit $t = t^{'} + \frac{|\vec{r}-\vec{r}^{'}|}{c}$ ankommen, da sich im Vakuum die elektromagnetischen Wellen mit Lichtgeschwindigkeit $c$ ausbreiten.

(3) Da die Energie der Welle auf einer Kugelschale verteilt ist, sollte für $|\vec{r}| \to \infty$ die Amplitude gegen Null gehen, um Energieerhaltung zu gewährleisten.

Die Lösung (6.2.25) erfüllt diese Forderungen. Man nennt sie die *retardierte Green-Funktion.*

**Weg 2**: Mit analogen Überlegungen wie für Weg 1 erhält man für

$$t < t^{'} \; : \quad D_2(\vec{r}, \vec{r}^{'}, t, t^{'}) = \frac{\delta(t - t^{'} + \frac{|\vec{r}-\vec{r}^{'}|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}^{'}|} \qquad (6.2.26)$$

und für

$$t > t^{'} \; : \quad D_2 = 0$$

Dies entspricht gerade der zeitgespiegelten (d.h. Vertauschen von $t$ und $t^{'}$) Lösung (6.2.25). Bei dieser Zeitspiegelung wird die auslaufende Welle in eine einlaufende Welle umgewandelt, die sich von $\infty$ kommend auf den Punkt $(\vec{r}^{'}, t^{'})$ zusammenzieht. $D_2$ heißt *avancierte Green-Funktion.*

Mit völlig analogen Überlegungen behandelt man Weg 3 und Weg 4. Man erhält Green-Funktionen, die in der klassischen Physik nicht benutzt werden können, die jedoch in der Quantenfeldtheorie als kausale und antikausale Feynman-Propagatoren Verwendung finden. Nachdem wir die Green-Funktionen kennen, sind wir in der Lage, die inhomogenen Wellengleichungen (6.2.1) und (6.2.2) zu lösen. Wegen der Kausalitätsbedingung ist $D_1$ die richtige Green-Funktion. Die Lösungen lauten

$$\Phi(\vec{r},t) = \int d^3\vec{r}' \int dt' \; D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t')\rho(\vec{r}',t') = \int d^3\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \int dt' \; \rho(\vec{r}',t')\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}),$$

also

$$\Phi(\vec{r},t) = \int d^3\vec{r}' \; \frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{6.2.27}$$

und

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}' \int dt' \; D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t')\vec{j}(\vec{r}',t') = \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}' \; \frac{\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{6.2.28}$$

Wir prüfen nach, ob die Darstellungen (6.2.27) und (6.2.28) die Lorentz-Eichung (6.2.3) erfüllen:
Es ist

$$\begin{aligned}
\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla}_r \cdot \vec{A} &= \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}' \int dt' \; (\vec{\nabla}_r \cdot D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t'))\vec{j}(\vec{r}',t') \\
&= -\frac{1}{c}\int d^3\vec{r}' \int dt' \; (\vec{\nabla}_{r'} \cdot D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t'))\vec{j}(\vec{r}',t')
\end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung partiell, so ergibt sich mit $D_1 = 0$ für $|\vec{r}-\vec{r}'| \to \infty$, daß

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}' \int dt' \; D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t')(\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}',t')) \tag{6.2.29}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\partial_t\Phi &= \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}' \int dt' \; (\partial_t D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t'))\rho(\vec{r}',t') \\
&= -\frac{1}{c}\int d^3\vec{r}' \int dt' \; (\partial_{t'} D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t'))\rho(\vec{r}',t')
\end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung partiell, so ergibt sich mit $D_1 = 0$ für $|\vec{r}-\vec{r}'| \to \infty$, daß

$$\frac{1}{c}\partial_t\Phi = \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}' \int dt' \; D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t')(\partial_{t'}\rho(\vec{r}',t')) \tag{6.2.30}$$

Die Summe von Gleichungen (6.1.29) und (6.2.30) ergibt dann

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\Phi = \int d^3\vec{r}' \int dt' \; D_1(\vec{r},\vec{r}',t,t')[\vec{\nabla}_{r'}\cdot\vec{j} + \partial_{t'}\rho] = 0$$

aufgrund der Ladungserhaltungsgleichung (5.3.9). Q.E.D.

### 6.2.2 Viererpotential einer bewegten Punktladung

Wir bestimmen die Potentiale des elektromagnetischen Felds, das von einer sich auf der Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0(t) = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$ bewegenden Ladung $Q$ hervorgerufen wird. Die Ladungsdichte und Stromdichte sind dann durch

$$\rho(\vec{r},t) = Q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)) \tag{6.2.31}$$

und

$$\vec{j}(\vec{r},t) = Q\vec{v}_0(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)) \tag{6.2.32}$$

gegeben.
Gemäß Gleichung (6.2.27) erhalten wir für das skalare Potential

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r},t) &= \int d^3\vec{r}' \int dt' \; \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t'))\delta(t'-[t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}]) \\ &= Q\int dt' \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-[t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}])\end{aligned} \tag{6.2.33}$$

Mit der Abkürzung

$$F(t') \equiv t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c} \tag{6.2.34}$$

gilt gemäß Gleichung (2.7.21)

$$\delta[F(t')] = \sum_s \frac{\delta(t'-s)}{|\frac{dF}{dt'}|}$$

mit den $s$ Nullstellen $F(s) = 0$. Offensichtlich ist

$$\frac{dF}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'},$$

mit $R = |\vec{R}(t')|$, $\vec{R}(t') = \vec{r}-\vec{r}_0(t')$, sodaß

$$|\frac{dF}{dt'}| = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'}$$

Damit erhalten wir für Gleichung (6.2.33)

$$\Phi(\vec{r},t) = Q\sum_s \int dt' \; \frac{\delta(t'-s)}{R(t')[1+\frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'}]} \tag{6.2.35}$$

Es ist

$$\frac{dR(t^{'})}{dt'} = \frac{d}{dt'}|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})| = \frac{d}{dt'}\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2}}(\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'}))(-\frac{d\vec{r}_0(t^{'})}{dt'})$$

$$= -\frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|} \cdot \vec{v}_0(t^{'}) = -\vec{n} \cdot \vec{v}_0(t^{'})$$

mit dem Einheitsvektor

$$\vec{n} \equiv \frac{\vec{R}(t^{'})}{R(t^{'})} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|} \tag{6.2.36}$$

Für das skalare Potential (6.2.35) folgt

$$\Phi(\vec{r}, t) = Q \sum_s \int dt^{'} \; \frac{\delta(t^{'} - s)}{R(t^{'})[1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0(t^{'})}{c}]} = Q \sum_s \int dt^{'} \; \frac{\delta(t^{'} - s)}{R(t^{'}) - \frac{\vec{R}(t^{'}) \cdot \vec{v}_0(t^{'})}{c}}$$

$$= \sum_s \frac{Q}{R(t^{'}) - \frac{\vec{R}(t^{'}) \cdot \vec{v}_0(t^{'})}{c}}|_{t^{'}=s, F(s)=0}$$

Nach (6.2.34) ergibt sich die Nullstellen von $F(s) = 0$ zu

$$s = t^{'} = t - \frac{R(t^{'})}{c},$$

sodaß

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{Q}{R(t^{'}) - \frac{\vec{R}(t^{'}) \cdot \vec{v}_0(t^{'})}{c}}|_{t^{'}=t-\frac{R(t^{'})}{c}} \tag{6.2.37}$$

Die Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung müssen zur retardierten Zeit $t^{'} = t - \frac{R(t^{'})}{c}$ genommen werden.
Analog finden man für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{c} \frac{\vec{v}_0(t^{'})}{R(t^{'}) - \frac{\vec{R}(t^{'}) \cdot \vec{v}_0(t^{'})}{c}}|_{t^{'}=t-\frac{R(t^{'})}{c}} \tag{6.2.38}$$

Die Gleichungen (6.2.37) und (6.2.38) bezeichnet man als *Lienard-Wiechert-Potentiale*.

### 6.2.3 Elektrische Feldstärke einer bewegten Punktladung

Die elektrische und magnetische Feldstärke einer bewegten Punktladung ergibt sich aus den Lienard-Wiechert-Potentialen gemäß

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{ grad } \Phi, \quad \vec{B} = \text{ rot } \vec{A}$$

Wir benutzen nicht die ausintegrierten Potentiale (6.2.37) und (6.2.38), sondern Gleichung (6.2.33):

$$\Phi(\vec{r},t) = Q \int dt^{'} \; \frac{\delta(t^{'} - [t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t^{'})|}{c}])}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|}$$

und analog

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{Q}{c} \int dt^{'} \; \frac{\vec{v}_0(t^{'})\delta(t^{'} - [t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t^{'})|}{c}])}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|}$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}[(\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'}))^2]^{-1/2} = -\frac{1}{2}[(\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'}))^2]^{-3/2} \; 2(\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|^3} = -\frac{\vec{R}(t^{'})}{R^3(t^{'})}$$

erhalten wir

$$\vec{\nabla}_r \Big( \frac{\delta(t^{'} - [t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t^{'})|}{c}])}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|} \Big)$$
$$= -\frac{\vec{R}(t^{'})}{R^3(t^{'})} \delta(t^{'} - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|}{c}]) + \frac{1}{R(t^{'})}\delta^{'}(t^{'} - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|}{c}])\frac{1}{c}\vec{\nabla}_r R(t^{'}),$$

wobei $\delta^{'}$ die Ableitung der $\delta$-Funktion nach ihrem Argument bezeichnet. Mit

$$\vec{\nabla}_r R(t^{'}) = \vec{\nabla}_r[(\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'}))^2]^{1/2} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|} = \frac{\vec{R}(t^{'})}{R(t^{'})}$$

folgt für

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi(\vec{r},t) = Q \int dt^{'} \; \Big( & -\frac{\vec{R}(t^{'})}{R^3(t^{'})} \delta(t^{'} - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|}{c}]) \\ & + \frac{\vec{R}(t^{'})}{cR^2(t^{'})}\delta^{'}(t^{'} - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|}{c}]) \Big) \end{aligned} \qquad (6.2.39)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \delta^{'}(t^{'} - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|}{c}]) &= \frac{\partial}{\partial(t^{'} - t + \frac{R}{c})} \delta(t^{'} - t + \frac{R}{c}) \\ &= \frac{1}{\frac{\partial(t^{'} - t + \frac{R}{c})}{\partial t^{'}}} \frac{\partial}{\partial t^{'}} \delta(t^{'} - t + \frac{R}{c}) \\ &= \frac{1}{\frac{\partial F(t^{'})}{\partial t^{'}}} \frac{\partial}{\partial t^{'}} \delta(t^{'} - t + \frac{R}{c}) = \frac{1}{\kappa(\vec{r}^{'}, t^{'})} \frac{\partial}{\partial t^{'}} \delta(t^{'} - t + \frac{R}{c}), \end{aligned}$$

wobei

$$\kappa(\vec{r}', t') \equiv \frac{\partial F(t')}{\partial t'} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_0(t')$$

Es folgt für Beziehung (6.3.39)

$$\text{grad } \Phi(\vec{r}, t) = -Q \int dt' \; \frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')} \delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}])$$
$$+Q \int dt' \; \frac{\vec{R}(t')}{cR^2(t')\kappa(\vec{r}', t')} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}])$$

Wir integrieren das zweite Integral partiell und erhalten

$$\text{grad } \Phi(\vec{r}, t) = -Q \int dt' \; \delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}]) \Big[ \frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')}$$
$$+ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} ( \frac{\vec{R}(t')}{R^2(t')\kappa(\vec{r}', t')} ) \Big] + [ \frac{Q\vec{R}(t')}{cR^2(t')\kappa(\vec{r}', t')} \delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}])]_{-\infty}^{\infty},$$

sodaß mit dem Einheitsvektor (6.2.36) folgt

$$\text{grad } \Phi(\vec{r}, t) = -Q \int dt' \; \delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}]) \Big[ \frac{\vec{n}}{R^2(t')} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} ( \frac{\vec{n}}{R(t')\kappa(\vec{r}', t')} ) \Big] \quad (6.2.40)$$

Ebenso berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{c} \int dt' \; \frac{\vec{v}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{\partial (t' - t + \frac{R(t')}{c})}{\partial t} \delta'(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}])$$
$$= -\frac{Q}{c} \int dt' \; \frac{\vec{v}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta'(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}])$$
$$= -\frac{Q}{c} \int dt' \; \frac{\vec{v}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{1}{\kappa(\vec{r}, t')} ( \frac{\partial}{\partial t'} \delta(t' - [t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}]))$$

und nach partieller Integration

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{c} \int dt' \; \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) \frac{\partial}{\partial t'} ( \frac{\vec{v}_0(t')}{\kappa(\vec{r}, t')R(t')} ) \quad (6.2.41)$$

Mit Gleichungen (6.2.40) und (6.2.41) folgt

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi = -\frac{Q}{c^2} \int dt' \; \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) \frac{\partial}{\partial t'} ( \frac{\vec{v}_0(t')}{\kappa R} )$$
$$+Q \int dt' \; \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) \Big[ \frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} ( \frac{\vec{n}}{\kappa R} ) \Big]$$
$$= Q \int dt' \; \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) \Big[ \frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} ( \frac{1}{\kappa R} (\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c})) \Big]$$

Mit

$$\delta[F(t')] = \frac{1}{|\kappa|}\delta(t' - s)$$

und der Nullstelle $s = t - (R/c)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= Q\int dt' \ \frac{\delta(t'-s)}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{1}{\kappa R}(\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c}))\Big] \\
&= \frac{Q}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{1}{\kappa R}(\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c}))\Big]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \\
&= \frac{Q}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{1}{\kappa R}(\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c}))\Big]_{ret},
\end{aligned} \tag{6.2.42}$$

wobei der Index $ret$ die Berechnung zur retardierten Zeit $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ kennzeichnet, und zur Erinnerung

$$\kappa(\vec{r}, t') = 1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_0}{c}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$$

Nun ist

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\vec{n} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0(t')}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))^2}}) = \frac{1}{cR^2}[R(0-\dot{\vec{r}}_0) - (\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\frac{1}{2}\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\cdot(-\dot{\vec{r}}_0)}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))^2}}]$$

$$= \frac{1}{cR^2}[-R\vec{v}_0(t') + \frac{\vec{R}}{R}(\vec{R}\cdot\vec{v}_0(t'))] = \frac{\vec{R}(\vec{R}\cdot\vec{v}_0(t'))}{cR^3} - \frac{\vec{v}_0(t')}{cR} = \frac{1}{cR}[\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v}_0(t')) - \vec{v}_0(t')]$$

und Gleichung (6.2.42) wird zu

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{Q}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\vec{n}}{\kappa R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\vec{v}_0}{c\kappa R}\Big]_{ret} \\
&= \frac{Q}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa R}\frac{\partial\vec{n}}{\partial t'} + \frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{1}{\kappa R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\vec{v}_0}{c\kappa R}\Big]_{ret} \\
&= \frac{Q}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa R^2}[\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v}_0) - \vec{v}_0] + \frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{1}{\kappa R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\vec{v}_0}{c\kappa R}\Big]_{ret}
\end{aligned} \tag{6.2.43}$$

Aus $\kappa = 1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_0}{c}$ folgt $c\kappa = c - \vec{n}\cdot\vec{v}_0$, sodaß

$$\frac{\vec{n}}{R^2} = \frac{\vec{n}}{R^2}\frac{c\kappa}{c\kappa} = \frac{\vec{n}}{c\kappa R^2}(c - \vec{n}\cdot\vec{v}_0)$$

Für die ersten beide Terme in der eckigen Klammer von Gleichung (6.2.43) ergibt sich dann

$$\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa R^2}[\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v}_0) - \vec{v}_0] = \frac{1}{c\kappa R^2}[c\vec{n} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v}_0) + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v}_0) - \vec{v}_0] = \frac{1}{\kappa R^2}[\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c}]$$

Für Gleichung (6.2.43) folgt dann

$$\vec{E} = \frac{Q}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}-\frac{\vec{v}_0}{c}}{\kappa R^2} + \frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{1}{\kappa R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\vec{v}_0}{c\kappa R}\Big]_{ret}$$

oder mit

$$\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}_0}{c}, \tag{6.2.44}$$

daß

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{Q}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\kappa R^2} + \frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{1}{\kappa R}) - \frac{1}{c\kappa R}\frac{\partial}{\partial t'}\vec{\beta} - \frac{\vec{\beta}}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{1}{\kappa R})\Big]_{ret} \\ &= \frac{Q}{|\kappa|}\Big[\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\kappa R^2} + \frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{1}{\kappa R}) - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c\kappa R}\Big]_{ret}\end{aligned} \tag{6.2.45}$$

Mit $\kappa = 1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_0}{c}$ erhalten wir für

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\kappa R) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(R - \frac{R}{c}\vec{n}\cdot\vec{v}_0) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))^2} - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_0}{c}) \\ &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}\cdot(-\vec{v}_0)}{R} - \frac{1}{c^2}\vec{v}_0\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial t'} - \frac{\vec{R}\cdot\dot{\vec{v}}_0}{c^2} = -\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_0}{c} + \frac{v_0^2}{c^2} - \frac{\vec{R}\cdot\dot{\vec{v}}_0}{c^2} \\ &= \beta^2 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} - \frac{R}{c}\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\end{aligned}$$

sodaß

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{1}{\kappa R}) = -\frac{1}{c\kappa^2R^2}\frac{\partial}{\partial t'}(\kappa R) = -\frac{1}{\kappa^2R^2}[\beta^2 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} - \frac{R}{c}\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}] \tag{6.2.46}$$

Außerdem ist

$$\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\kappa R^2} = \frac{\kappa(\vec{n}-\vec{\beta})}{\kappa^2R^2} = \frac{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})(\vec{n}-\vec{\beta})}{\kappa^2R^2} \tag{6.2.47}$$

Das Einsetzen von Gleichung (6.2.46) und (6.2.47) ergibt für Gleichung (6.2.45) mit $\kappa > 0$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{Q}{\kappa}\Big[\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\kappa^2R^2} - \frac{\vec{n}\cdot\vec{\beta}(\vec{n}-\vec{\beta})}{\kappa^2R^2} - \frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\kappa^2R^2}(\beta^2 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} - \frac{R}{c}\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c\kappa R}\Big]_{ret} \\ &= \frac{Q}{\kappa}\Big[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^2R^2} + \frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})}{c\kappa^2R} - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c\kappa R}\Big]_{ret} \\ &= Q\Big[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^3R^2}\Big]_{ret} + \frac{Q}{c\kappa^3R}\Big[(\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \kappa\dot{\vec{\beta}}\Big]_{ret}\end{aligned} \tag{6.2.48}$$

Der zweite Term in Gleichung (6.2.48) läßt sich mit $\kappa = 1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}$ umformen unter Ausnutzung von

$$\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}] = (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})-\dot{\vec{\beta}}[\vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta})] = (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})-\dot{\vec{\beta}}[1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}] = (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})-\kappa\dot{\vec{\beta}}$$

und es folgt letztendlich

$$\vec{E} = Q\Big[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^3 R^2}\Big]_{ret} + \frac{Q}{c}\Big[\frac{\vec{n}}{\kappa^3 R}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\Big]_{ret}, \tag{6.2.49}$$

wobei

$$\kappa = 1-\vec{n}\cdot\vec{\beta},\quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R},\quad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_0,\quad \vec{\beta} = \vec{v}_0/c,\quad ret:\ t^{'} = t-(R/c)$$

Das elektrische Feld (6.2.49) setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: der erste *Nahfeld*-Term ist beschleunigungsunabhängig, invers proportional zum Quadrat des Abstands ($\propto R^{-2}$) und kann daher für große Abstände vernachlässigt werden; der zweite *Fernfeld*-Term ist beschleunigungsabhängig, invers proportional zum Abstand ($\propto R^{-1}$) und dominiert das elektrische Feld daher bei großen Abständen. Man erkennt, daß der Fernfeld-Anteil, oder auch *Strahlungsanteil* genannt, senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$ steht.

### 6.2.4 Magnetische Feldstärke einer bewegten Punktladung

Zur Berechnung der magnetischen Induktion $\vec{B} =$ rot $\vec{A}$ benötigen wir zwei Hilfsformeln.
**Hilfsformel 1**:

$$\frac{\partial t^{'}}{\partial t} = \frac{R}{R-\vec{R}\cdot\frac{\vec{v}_0}{c}} = \frac{R}{R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}} \tag{6.2.50}$$

Beweis: mit $R(t) = c(t-t^{'})$ folgt

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \begin{cases} c(1-\frac{\partial t^{'}}{\partial t}) \\ \frac{\partial t^{'}}{\partial t}\frac{\partial R}{\partial t^{'}} \end{cases}$$

Das Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert

$$\frac{\partial t^{'}}{\partial t}\frac{\partial R}{\partial t^{'}} = c - c\frac{\partial t^{'}}{\partial t},$$

sodaß

$$(c+\frac{\partial R}{\partial t^{'}})\frac{\partial t^{'}}{\partial t} = c$$

oder

$$\frac{\partial t^{'}}{\partial t} = \frac{c}{c+\frac{\partial R}{\partial t^{'}}} = \frac{c}{c+\frac{1}{2R}\frac{\partial R^2}{\partial t^{'}}} = \frac{c}{c+\frac{1}{R}\vec{R}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial t^{'}}},$$

weil mit $R^2 = (\vec{R})^2$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t'} = 2\vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'}$$

Mit

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}[\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})] = -\vec{v}_0(t^{'})$$

folgt

$$\frac{\partial t^{'}}{\partial t} = \frac{c}{c - \frac{1}{R}\vec{R} \cdot \vec{v}_0(t^{'})} = \frac{cR}{cR - c\vec{R} \cdot \vec{\beta})} = \frac{R}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

die Behauptung. Q.E.D.

**Hilfsformel 2**:

$$\vec{\nabla}_r t^{'} = -\frac{\vec{R}}{c(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})} \tag{6.2.51}$$

<u>Beweis</u>: mit

$$t^{'} = t - \frac{R(t^{'})}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})|}{c} = t - \frac{1}{c}\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'}))^2}$$

folgt

$$\vec{\nabla}_r t^{'} = 0 - \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r R(t^{'}) = -\frac{1}{c}\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'})) \cdot (1 - \vec{\nabla}_r \vec{r}_0(t^{'}))}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t^{'}))^2}}$$

$$= -\frac{1}{cR}[\vec{R} - \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}_0(t^{'})}{\partial t'}\vec{\nabla}_r t^{'}] = -\frac{1}{cR}[\vec{R} - \vec{R} \cdot \vec{v}_0(t^{'})\vec{\nabla}_r t^{'}] = \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\beta}\vec{\nabla}_r t^{'} - \frac{\vec{R}}{cR},$$

oder nach Umstellen

$$[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R}]\vec{\nabla}_r t^{'} = -\frac{\vec{R}}{cR},$$

sodaß

$$\vec{\nabla}_r t^{'} = -\frac{\vec{R}}{cR[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R}]} = -\frac{\vec{R}}{c[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}$$

Q.E.D.

Wir berechnen das Magnetfeld mit Hilfe von

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (\vec{\nabla}_r t^{'}) \times (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}) \tag{6.2.52}$$

Nun ist

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{ grad } \Phi = -\frac{1}{c}\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} - (\vec{\nabla}_r t')\frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

sodaß unter Verwendung von der Hilfsformeln 1 und 2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} &= -\frac{c\vec{E}}{(\frac{\partial t'}{\partial t})} - \frac{\vec{\nabla}_r t'}{(\frac{\partial t'}{\partial t})}\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\
&= -\frac{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}c\vec{E} - \frac{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}(\vec{\nabla}_r t')\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\
&= -\frac{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}c\vec{E} + \frac{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}\frac{\vec{R}}{c[R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}]}\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\
&= -\frac{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}c\vec{E} + \frac{\vec{R}}{cR}\frac{\partial \Phi}{\partial t'}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setzen wir in Gleichung (6.5.52) ein und erhalten unter nochmaliger Verwendung von Hilfsformel 2

$$\vec{B} = (\vec{\nabla}_r t') \times (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}) = -\frac{1}{c[R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}]}\vec{R} \times [-\frac{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}c\vec{E} + \frac{\vec{R}}{cR}\frac{\partial \Phi}{\partial t'}]$$

Wegen $\vec{R} \times \vec{R} = 0$ ergibt der zweite Term keinen Beitrag und wir erhalten

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}, \tag{6.2.53}$$

d.h. elektrisches und magnetisches Feld stehen senkrecht aufeinander. Zusätzlich steht $\vec{B}$ senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$.

Mit dem Ergebnis (6.2.53) erhalten wir für den Poynting-Vektor (5.6.7) des Energiestroms

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{B}] = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})] = \frac{c}{4\pi}[E^2\vec{n} - \vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{n})] \tag{6.2.54}$$

Speziell für den Fernfeld-Anteil oder Strahlungs-Anteil mit $\vec{E}_{str} \perp \vec{n}$ erfolgt der Energietransport in Ausbreitungsrichtung:

$$\vec{S}_{str} = \frac{cE_{str}^2}{4\pi}\vec{n} \tag{6.2.55}$$

Gleichung (6.2.55) ergibt den Energiestrom pro Zeiteinheit und Flächeneinheit in Richtung $\vec{n}$. Daraus berechnet sich die abgestrahlte Intensität pro Raumwinkelelement ($d\Omega$) einer bewegten Punktladung am Beobachtungsort durch

$$dI = \frac{dt}{dt'}\vec{S}\cdot d\vec{o}, \tag{6.2.56}$$

wobei $d\vec{o} = |d\vec{o}|\vec{n}$ das Kugeloberflächenelement mit der Fläche $|d\vec{o}| = R^2 d\Omega$ kennzeichnet. Mit Hilfsformel 1 in der Form

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R} = 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} = \kappa$$

und Gleichung (6.2.55) folgt

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\kappa R^2 E_{str}^2 \tag{6.2.57}$$

## 6.3 Energieabstrahlung einer bewegten Punktladung

Setzen wir den Strahlungsanteil des elektrischen Felds (6.2.49) Gleichung (6.2.57) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi}\kappa R^2 \frac{Q^2}{c^2}\Big[\frac{\vec{n}}{\kappa^3 R} \times [(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\Big]^2 \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c}\frac{1}{\kappa^5}[\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]]^2, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Mit

$$\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}] = (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(\vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta}))$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5}\Big((\dot{\vec{\beta}})^2(\vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta}))^2 - 2(\vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta}))(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})(\vec{n}-\vec{\beta})\dot{\vec{\beta}} + (\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2(1-2\vec{\beta}\cdot\vec{n}+\beta^2)\Big) \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5}\Big((\dot{\vec{\beta}})^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2 + (\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2(1+\beta^2-2\vec{\beta}\cdot\vec{n}-2\vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta})) + 2\vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\Big) \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5}\Big((\dot{\vec{\beta}})^2\kappa^2 + (\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2(1+\beta^2-2\vec{\beta}\cdot\vec{n}-2+2\vec{n}\cdot\vec{\beta}) + 2\kappa(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\Big) \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5}\Big((\dot{\vec{\beta}})^2\kappa^2 - (\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2(1-\beta^2) + 2\kappa(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\Big), \end{aligned}$$

also

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q^2}{4\pi c}\Big[\frac{(\dot{\vec{\beta}})^2}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3} + \frac{2(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^4} - \frac{(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^5}\Big] \tag{6.3.2}$$

mit dem Lorentzfaktor der Punktladung $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.
Für relativistische Teilchen ist $\beta \simeq 1$ und $\gamma >> 1$. Aufgrund der hohen negativen Potenzen des Faktors $1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n}$ tritt das Maximum der abgestrahlten Intensität in Richtungen auf, bei denen $1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n}$ klein ist.

Mit $\vec{\beta} \cdot \vec{n} = \beta \cos\psi$ folgt für kleine Winkel $\psi << 1$

$$1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n} = 1 - \beta \cos\psi \simeq 1 - \beta(1 - \frac{\psi^2}{2}) = 1 - \beta + \frac{\beta}{2}\psi^2$$

Mit

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

erhalten wir dann

$$1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n} \simeq 1 - (1 - \frac{1}{2\gamma^2}) + \frac{\psi^2}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2)$$

Für die Intensität (6.3.2) ergibt sich

$$\frac{dI}{d\Omega} \simeq \frac{Q^2}{4\pi c}\Big[\frac{2^3(\dot{\vec{\beta}})^2}{(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2)^3} + \frac{2^4(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2)^4} - \frac{2^5(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{\gamma^2(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2)^5}\Big] \tag{6.3.3}$$

Für Winkel $\psi < 1/\gamma$ sind die Nenner klein und konstant, weil $\gamma^{-2} + \psi^2 \simeq \gamma^{-2}$. Für Winkel $\psi > 1/\gamma$ werden die Nenner $\propto \psi^2$ groß. Es ergibt sich, daß der Hauptteil der Strahlung eines relativistischen Teilchens in einen Winkel der Größenordnung $(1/\gamma)$ in Bewegungrichtung abgestrahlt wird (siehe Abbildung 6.9).

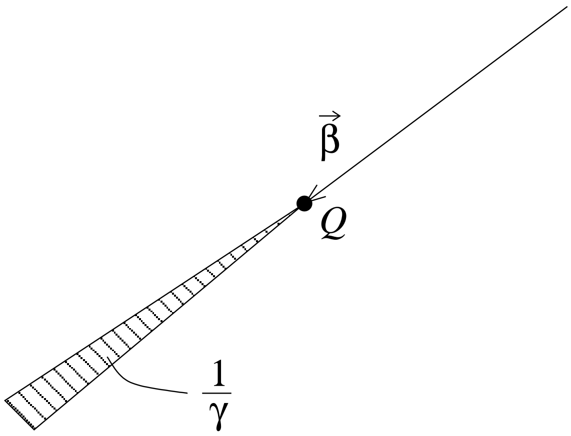


*Abb. 6.9: Abstrahlung eines relativistischen Teilchens.*

### 6.3.1 Larmor-Formel

Wir untersuchen jetzt die Abstrahlung einer nichtrelativistischen beschleunigten Ladung. Mit $|\vec{\beta}| = \frac{v}{c} << 1$ ist in Gleichung (6.3.1) $|\vec{\beta}| << |\vec{n}| = 1$, sodaß

$$\frac{dI}{d\Omega} \simeq \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5}[\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}]]^2$$

Außerdem ist $\kappa = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} \simeq 1$.

Mit $\theta = \angle(\vec{n}, \dot{\vec{\beta}})$ gilt

$$\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}] = \vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(\vec{n} \cdot \vec{n}) = \dot{\beta} \cos\theta \vec{n} - \dot{\vec{\beta}},$$

sodaß

$$[\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})]^2 = [\dot{\beta} \cos\theta \vec{n} - \dot{\vec{\beta}}]^2 = (\dot{\beta})^2 \cos^2\theta - 2\dot{\beta} \cos\theta \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} + (\dot{\beta})^2$$
$$= (\dot{\beta})^2 [\cos^2\theta - 2\cos^2\theta + 1] = (\dot{\beta})^2 \sin^2\theta$$

Wir erhalten dann für Gleichung (6.3.4)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q^2}{4\pi c} (\dot{\beta})^2 \sin^2\theta = \frac{Q^2}{4\pi c^3} (\dot{v})^2 \sin^2\theta \tag{6.3.5}$$

mit der charakteristischen $\sin^2\theta$-Abhängigkeit.
Durch Integration über alle Raumwinkel $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi = d\mu d\phi$ mit $\mu = \cos\theta$ folgt für die totale abgestrahlte Leistung

$$P_{tot} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu \, \frac{dI}{d\Omega} = \frac{2\pi Q^2}{4\pi c^3} (\dot{v})^2 \int_{-1}^{1} d\mu \, (1 - \mu^2),$$

also

$$P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{Q^2 (\dot{v})^2}{c^3} \tag{6.3.6}$$

Gleichung (6.3.6) wird als *Larmor-Formel* bezeichnet.
Die abgeleiteten Gleichungen (6.2.49) und (6.2.53) für das elektrische und magnetische Feld einer bewegten Punktladung bilden auch den Ausgangspunkt für die Berechnung der *Synchrotronstrahlung*, d.i. die Strahlung eines geladenen Teilchens in einem homogenen Magnetfeld: dazu muß die entsprechende Bahngleichung eines geladenen Teilchens im homogenen Feld $\vec{r}_0(t)$ in die Gleichungen (6.2.49) und (6.2.53) eingesetzt werden.

### 6.3.2 Bremsstrahlung

Bei der Bremsstrahlung wird das geladene Teilchen in Bewegungsrichtung abgebremst. Daher ist $\dot{\vec{\beta}}$ parallel zu $\vec{\beta}$ und deshalb $\dot{\vec{\beta}} \times \vec{\beta} = 0$. Gemäß Gleichung (6.3.1) folgt

$$\frac{dI}{d\Omega}_{brems} \simeq \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5} [\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}]]^2 = \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5} [\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(\vec{n} \cdot \vec{n})]^2$$
$$= \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5} [\dot{\beta} \cos\theta \vec{n} - \dot{\vec{\beta}}]^2 = \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5} [(\dot{\vec{\beta}})^2 (1 - \cos^2\theta)] = \frac{Q^2}{4\pi c\kappa^5} (\dot{\vec{\beta}})^2 \sin^2\theta$$

Mit $\kappa = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} = 1 - \beta \cos\theta$ erhalten wir

$$\frac{dI}{d\Omega}_{brems} = \frac{Q^2}{4\pi c} \frac{(\dot{\vec{\beta}})^2 \sin^2\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^5}$$

$$= \frac{Q^2(\dot{\vec{\beta}})^2}{4\pi c} \frac{1-\mu^2}{(1-\beta\mu)^5} = \frac{Q^2(\dot{\vec{\beta}})^2}{4\pi c} i(\mu) \tag{6.3.7}$$

mit der Winkelabhängigkeit

$$i(\mu) = \frac{1-\mu^2}{(1-\beta\mu)^5}$$

Das Extremum (Maximum) der Abstrahlung tritt bei $\mu = \mu_E$ auf, wobei $\mu_E$ durch

$$\frac{di(\mu)}{d\mu}|_{\mu_E} = 0 \tag{6.3.8}$$

bestimmt ist. Für die erste Ableitung gilt

$$\frac{di(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{(1-\beta\mu)^{10}}[(1-\beta\mu)^5(-2\mu) - (1-\mu^2)5(1-\beta\mu)^4(-\beta)]$$
$$= \frac{1}{(1-\beta\mu)^6}[5\beta(1-\mu^2) - 2\mu(1-\beta\mu)] = \frac{5\beta - 2\mu - 3\beta\mu^2}{(1-\beta\mu)^6}$$

Gleichung (6.3.8) führt dann auf die quadratische Bestimmungsgleichung

$$5\beta - 2\mu_E - 3\beta\mu_E^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\mu_{E1,E2} = \pm\frac{1}{3\beta}\sqrt{1+15\beta^2} - \frac{1}{3\beta},$$

von denen allerdings nur eine sinnvoll (weil $\leq 1$) ist:

$$\mu_E = \cos\theta_{max} = \frac{1}{3\beta}[\sqrt{1+15\beta^2} - 1] \tag{6.3.9}$$

Durch Berechnung der zweiten Ableitung $\frac{d^2 i(\mu)}{d\mu^2}|_{\mu_E} < 0$ zeigt man, daß $\mu_E$ tatsächlich einem Maximum entspricht.

Für *nichtrelativistische* Teilchen mit $\beta << 1$ reduziert sich Gleichung (6.3.9) auf

$$\mu_E \simeq \frac{1}{3\beta}\frac{15\beta^2}{2} = \frac{5\beta}{2} << 1,$$

sodaß $\theta_{max} \simeq \pi/2$. Ein nichtrelativistisches Teilchen emittiert seine Bremsstrahlung vorwiegend senkrecht zur Bewegungsrichtung!

Für *relativistische* Teilchen mit $\beta \simeq 1$ approximieren wir Gleichung (6.3.9) durch

$$\mu_E \simeq \frac{1}{3\beta}[\sqrt{1+15} - 1] = 1,$$

sodaß $\theta_{max} \simeq 0$. Die Bremsstrahlung relativistischer Teilchen erfolgt vorwiegend in Bewegungsrichtung! Dieses Ergebnis ist konsistent mit unserer obigen Diskussion nach Gleichung (6.3.3).

### 6.3.3 Kreisbewegung

Dieser Fall ist wichtig für die Abstrahlung von geladenen Teilchen in Beschleunigern mit Speicherring. Hier gilt $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$, d. h. $\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} = 0$. Dann verschwindet der 2. Term in Gleichung (6.3.2), sodaß

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q^2}{4\pi c} \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3} \Big[ (\dot{\vec{\beta}})^2 - \frac{(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2} \Big]$$

Mit $\theta = \angle(\vec{\beta}, \vec{n})$, also $\vec{\beta}\cdot\vec{n} = \beta\cos\theta$, und $\alpha = \angle(\dot{\vec{\beta}}, \vec{n})$, also $\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n} = \dot{\beta}\cos\alpha$, folgt

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q^2(\dot{\beta})^2}{4\pi c(1-\beta\cos\theta)^3} \Big[ 1 - \frac{(1-\beta^2)\cos^2\alpha}{(1-\beta\cos\theta)^2} \Big] \qquad (6.3.10)$$

## 6.4 Der Hertzsche Dipol

Wir betrachten jetzt die Anwendung der Lienard-Wiechert-Potentiale, die zuerst von Heinrich Hertz untersucht wurde: einen schwingenden elektrischen Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{p} = \vec{p}(t)$ (siehe Abbildung 6.10).

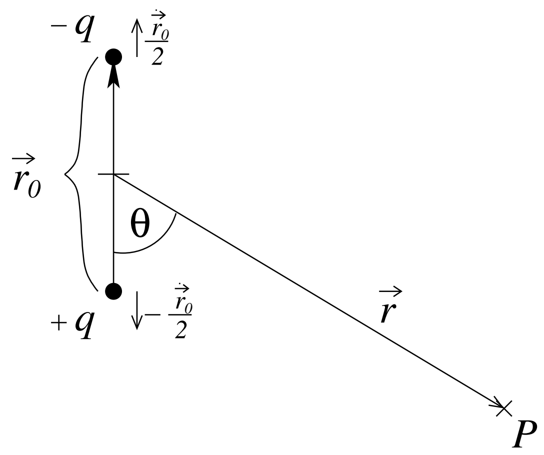


*Abb. 6.10: Zum Hertzschen Dipol.*

$\vec{r}$ bezeichnet den konstanten Ortsvektor vom Dipol zum Beobachter im Punkt $P$, $\theta$ sei der Winkel zwischen der Schwingungsachse und dem Ortsvektor.

Der Dipol wird aus einem Paar von Punktladungen mit den Ladungen $\pm e$ gebildet, die einen momentanen Abstand $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ voneinander haben. Deshalb ist

$$Q\vec{v}_0(t) = -e\frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{2} + e\Big(\frac{-\dot{\vec{r}}_0(t)}{2}\Big) = -e\dot{\vec{r}}_0(t) = \dot{\vec{p}}(t)$$

Der Vektor $\frac{\vec{r}_0(t)}{2}$ zeigt vom Urprung zur negativen Ladung, sodaß das Dipolmoment $\vec{p}(t) = -e\vec{r}_0(t)$ ist.

Wir starten mit den Lienard-Wiechert-Potentialen (6.2.37) und (6.2.38):

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{Q}{R(t') - \frac{\vec{R}(t')\cdot\vec{v}_0(t')}{c}}\Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}},$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{Q}{c}\frac{\vec{v}_0(t')}{R(t') - \frac{\vec{R}(t')\cdot\vec{v}_0(t')}{c}}\Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}$$

Wir definieren die Abstandsvektoren zwischen dem Beobachtungspunkt $P$ und der negativen bzw. der positiven Ladung,

$$\vec{r}_-(t') = \vec{r} - \frac{\vec{r}_0(t')}{2}, \quad \vec{r}_+(t') = \vec{r} + \frac{\vec{r}_0(t')}{2}, \tag{6.4.1}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r},t) = & \frac{-e}{|\vec{r}_-(t')| - \vec{r}_-(t')\cdot\frac{(+\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2c}}\Big|_{t'=t-\frac{|r_-(t')|}{c}} + \\ & \frac{e}{|\vec{r}_+(t')| - \vec{r}_+(t')\cdot\frac{(-\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2c}}\Big|_{t'=t-\frac{|r_+(t')|}{c}},\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) = & \frac{-\frac{e}{c}\frac{(\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2}}{|\vec{r}_-(t')| - \vec{r}_-(t')\cdot\frac{(\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2c}}\Big|_{t'=t-\frac{|r_-(t')|}{c}} + \\ & \frac{\frac{e}{c}\frac{(-\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2}}{|\vec{r}_+(t')| - \vec{r}_+(t')\cdot\frac{(-\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2c}}\Big|_{t'=t-\frac{|r_+(t')|}{c}}\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Für große Abstände $r >> r_0$ sind die Näherungen

$$r_\pm(t') = \vec{r} \pm \frac{\vec{r}_0(t')}{2} \simeq \vec{r}$$

gut erfüllt, sodaß die retardierten Zeiten $t' \simeq t - \frac{r}{c}$ in allen Termen gleich sind.
Bei einer harmonischen Schwingung der Frequenz $\omega$ gilt als Abschätzung

$$\frac{v}{c} \simeq \frac{2r_0^{max}}{Tc} = \frac{r_0^{max}\omega}{\pi c} = \frac{2r_0^{max}}{\lambda} \tag{6.4.4}$$

Machen wir die zusätzliche Annahme langer Wellenlängen der Schwingungsbewegung $\lambda >> r_0^{max}$, so ist nach der Abschätzung (6.4.4) $\frac{v}{c} << 1$ vernachlässigbar klein. Deshalb vernachlässigen wir Terme der Größenordnung $(\frac{v}{c})^2$ bei der Entwicklung der Nenner der Gleichungen (6.4.2) und (6.4.3). Für das Vektorpotential (6.4.3) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) & \simeq -\frac{\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_0(t')}{2|\vec{r}|}\Big|_{t'=t-\frac{r}{c}} - \frac{\frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_0(t')}{2|\vec{r}|}\Big|_{t'=t-\frac{r}{c}} \\ & = -\frac{e\dot{\vec{r}}_0(t')}{cr}\Big|_{t'=t-\frac{r}{c}} = \frac{\dot{\vec{p}}(t')}{cr}\Big|_{t'=t-\frac{r}{c}} = \frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{cr}\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

Nach der Lorentz-Eichung ist

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{ div } \vec{A} = 0,$$

sodaß aus Gleichung (6.4.5) folgt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -c \text{ div } \vec{A} = -\text{ div } (\frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{r})$$

Weil $r$ zeitunabhängig ist, erhalten wir

$$\Phi = -\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{r}\int dt\,\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) = -\vec{\nabla}\cdot\big[\frac{\vec{p}(t-\frac{r}{c})}{r}\big] \tag{6.4.6}$$

Mit div $(f\vec{a}) = ($ grad $f)\cdot\vec{a} + f$ div $\vec{a}$ folgt

$$\vec{\nabla}\cdot\big[\frac{\vec{p}(t-\frac{r}{c})}{r}\big] = (\vec{\nabla}\frac{1}{r})\cdot\vec{p} + \frac{1}{r}[\vec{\nabla}\cdot\vec{p}(t-\frac{r}{c})] = -\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{r}[\vec{\nabla}\cdot\vec{p}(t-\frac{r}{c})] \tag{6.4.7}$$

Im Sinn einer Fourier-Transformation ist

$$\vec{p}(t-\frac{r}{c}) = \int d\omega\,\vec{p}_\omega \exp\left(-\imath\omega(t-\frac{r}{c})\right) = \int d\omega\,\vec{p}_\omega \exp\left(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right) \tag{6.4.8}$$

mit $\omega = kc$ und $kr = \vec{k}\cdot\vec{r}$. Dann gilt

$$\frac{\partial\vec{p}(t-\frac{r}{c})}{\partial t} = \int d\omega\,(-\imath\omega)\vec{p}_\omega \exp\left(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right),$$

$$\text{rot }\vec{p}(t-\frac{r}{c}) = \int d\omega\,\imath(\vec{k}\times\vec{p}_\omega)\exp\left(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right) = \imath\frac{\vec{r}}{r}\times\int d\omega\,k\vec{p}_\omega \exp\left(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right)$$

und

$$\text{div }\vec{p}(t-\frac{r}{c}) = \int d\omega\,\imath(\vec{k}\cdot\vec{p}_\omega)\exp\left(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right) = \imath\frac{\vec{r}}{r}\cdot\int d\omega\,k\vec{p}_\omega \exp\left(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right)$$

Setzen wir in die beiden letzten Gleichungen $k = \omega/c$ ein, erhalten wir für die sogenannten *retardierten Ableitungen*

$$\text{rot }\vec{p}(t-\frac{r}{c}) = \frac{\imath}{c}\frac{\vec{r}}{r}\times\int d\omega\,\omega\vec{p}_\omega \exp\left(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right) = -\frac{1}{c}\frac{\vec{r}}{r}\times\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) \tag{6.4.9}$$

und

$$\text{div }\vec{p}(t-\frac{r}{c}) = \frac{\imath}{c}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\int d\omega\,\omega\vec{p}_\omega \exp\left(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right) = -\frac{1}{c}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) \tag{6.4.10}$$

Die Verwendung der letzten Beziehung (6.4.10) liefert für Gleichung (6.4.7)

$$\vec{\nabla}\cdot\big[\frac{\vec{p}(t-\frac{r}{c})}{r}\big] = -\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} - \frac{1}{cr^2}[\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})]$$

und damit für das Potential (6.4.6)

$$\Phi = \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{cr^2} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \tag{6.4.11}$$

Die direkte Berechnung des Potentials $\phi$ aus Gleichung (6.4.2) wäre schwieriger, weil der erste Entwicklungsterm in $(\frac{v}{c})$ verschwindet.
Gleichung (6.4.10) besteht aus zwei Anteilen: der erste Term ($\propto r^{-1}$) folgt aus der Retardierung und kann in der Nahzone ($r << \lambda$) gegenüber dem zweiten Term ($\propto r^{-2}$) vernachlässigt werden. Dieser zweite Term ergibt dann das bekannte (siehe Kap. 3.9.4) statische Diplomoment ($\vec{p} \cdot \vec{r}/r^3$).
Bei großen Entfernungen ($r >> \lambda$) überwiegt der Retardierungsanteil

$$\Phi(r >> \lambda) \simeq \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{cr^2} \propto r^{-1}$$

Im allgemeinen Fall ergibt das Einsetzen der Potentials (6.4.5) in die Gleichungen (5.4.1) für das Magnetfeld

$$\begin{aligned}\vec{B} = \text{ rot } \vec{A} = \text{ rot } [\frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{cr}] &= \frac{1}{cr} \text{ rot } [\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})] - \frac{1}{c}\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) \times \vec{\nabla}(\frac{1}{r}) \\ &= -\frac{1}{c^2r^2}\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) + \frac{1}{cr^3}\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) \times \vec{r},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung (6.4.9) verwandt haben. Wir erhalten also

$$\vec{B} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{c^2r^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{cr^3} \tag{6.4.12}$$

Gemäß Gleichung (5.4.3) erhalten wir für das elektrische Feld durch Einsetzen der Potentiale (6.4.5) und (6.4.11)

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi = -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2r} - \vec{\nabla}\left(\frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{cr^2} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}\right)$$

Wir benutzen

$$\text{grad } (\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}) = \frac{1}{r^3} \text{ grad } (\vec{p} \cdot \vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \text{ grad } (r^{-3}) = \frac{1}{r^3} \text{ grad } (\vec{p} \cdot \vec{r}) - \frac{3}{r^5}(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}$$

und

$$\text{grad } (\frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^2}) = \frac{1}{r^2} \text{ grad } (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) + (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \text{ grad } (r^{-2}) = \frac{1}{r^2} \text{ grad } (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) - \frac{2}{r^4}(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r},$$

sodaß

$$\vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2r} + \frac{3}{r^5}(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} + \frac{2}{cr^4}(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r} - \frac{1}{cr^2} \text{ grad } (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) - \frac{1}{r^3} \text{ grad } (\vec{p} \cdot \vec{r}) \tag{6.4.13}$$

Die Anwendung von Gleichung (2.4.2.2),

$$\text{grad}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a},$$

ergibt

$$\begin{aligned}\text{grad}\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) &= \vec{p}\times(\vec{\nabla}\times\vec{r}) + \vec{r}\times(\vec{\nabla}\times\vec{p}) + (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{p}\\ &= \vec{p} + \vec{r}\times(\vec{\nabla}\times\vec{p}) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{p} \end{aligned} \tag{6.4.14}$$

weil $\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0$ und

$$(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = (p_x\partial_x + p_y\partial_y + p_z\partial_z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix} = \vec{p}$$

Zur Berechnung des letzen Terms verwenden wir die Fourier-Transformation (6.4.8), sodaß

$$\begin{aligned}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{p} &= (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\int d\omega\ \vec{p}_\omega \exp\Big(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\Big)\\ &= \int d\omega\ \vec{p}_\omega[(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\exp\Big(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\Big)] = \imath\int d\omega\ \vec{p}_\omega(\vec{k}\cdot\vec{r})\exp\Big(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\Big)\\ &= \frac{\imath r}{c}\int d\omega\ \vec{p}_\omega\omega\exp\Big(\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\Big) = -\frac{r}{c}\dot{\vec{p}} = -\frac{1}{rc}(\vec{r}\cdot\vec{r})\dot{\vec{p}}\end{aligned}$$

Wir erhalten für Gleichung (6.4.14)

$$\text{grad}\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \vec{p} + \vec{r}\times(\vec{\nabla}\times\vec{p}) - \frac{1}{rc}(\vec{r}\cdot\vec{r})\dot{\vec{p}}$$

Den zweiten Term dieser Beziehung formen wir mit Gleichung (6.4.9) um zu

$$\vec{r}\times(\vec{\nabla}\times\vec{p}) = -\frac{1}{rc}\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{p}}) = -\frac{1}{rc}[(\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}})\vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{r})\dot{\vec{p}}],$$

sodaß folgt

$$\text{grad}\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \vec{p} - \frac{1}{rc}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}})\vec{r}$$

Mit analoger Rechnung erhalten wir

$$\text{grad}\,(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r}) = \dot{\vec{p}} - \frac{1}{rc}(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{p}})\vec{r}$$

Für das elektrische Feld (6.4.13) gilt dann

$$\vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2r} + \frac{3}{r^5}(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} + \frac{2}{cr^4}(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r})\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{cr^4}(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r})\vec{r} - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + \frac{1}{c^2r^3}(\ddot{\vec{p}}\cdot\vec{r})\vec{r}$$

und nach Ordnen

$$\vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 r} - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + \frac{3}{cr^4}(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r} + \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r}}{c^2 r^3} + \frac{3}{r^5}(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \tag{6.4.15}$$

**Im Nahfeld** $r << \lambda$ sind nach Gleichungen (6.4.12) und (6.4.15) die retardierten Terme für das elektrische Feld vernachlässigbar klein und es gilt

$$\vec{E}_N \simeq \frac{3}{r^5}(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}, \quad \vec{B}_N \simeq \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{cr^3} \tag{6.4.16}$$

Das elektrische Feld entspricht dem statischen Dipolanteil (3.9.40).
**Im Fernfeld** $r >> \lambda$ vernachlässigen wir Terme mit hohen Potenzen von $r$ im Nenner und erhalten

$$\vec{E}_F \simeq -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 r} + \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r}}{c^2 r^3} = \frac{1}{c^2 r^3}(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}, \tag{6.4.17}$$

denn

$$(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r} = -\vec{r} \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) = -[(\vec{r} \cdot \vec{r})\ddot{\vec{p}} - (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}})\vec{r}] = -r^2 \ddot{\vec{p}} + (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r},$$

und

$$\vec{B}_F \simeq \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{c^2 r^2} \tag{6.4.18}$$

An den Beziehungen (6.4.17) und (6.4.18) erkennt man direkt, daß

$$\vec{E}_F = \vec{B}_F \times \frac{\vec{r}}{r}, \tag{6.4.19}$$

woraus folgt

$$\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}_F = \frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{B}_F \times \frac{\vec{r}}{r}) = (\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r})\vec{B}_F - (\vec{B}_F \cdot \frac{\vec{r}}{r})\frac{\vec{r}}{r} = \vec{B}_F,$$

weil $\vec{B}_F \perp \vec{r}$, sodaß

$$\vec{B}_F = -\vec{E}_F \times \frac{\vec{r}}{r} \tag{6.4.20}$$

Es folgt, daß in der Fernzone $\vec{E}_F$ und $\vec{B}_F$ den gleichen Betrag haben und senkrecht aufeinander stehen, d. h. sie laufen als Kugelwelle nach außen.
Für den **Poynting-Vektor in der Fernzone** erhalten wir mit Gleichung (6.4.19)

$$\begin{aligned}\vec{S}_F &= \frac{c}{4\pi}\vec{E}_F \times \vec{B}_F = \frac{c}{4\pi}[(\vec{B}_F \times \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{B}_F] \\ &= \frac{c}{4\pi}[B_F^2 \frac{\vec{r}}{r} - (\vec{B}_F \cdot \frac{\vec{r}}{r})\frac{\vec{r}}{r}] = \frac{c}{4\pi} B_F^2 \frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}$$

weil $\vec{B}_F \perp \vec{r}$. Setzen wir Gleichung (6.4.18) ein, so folgt

$$\vec{S}_F = \frac{c}{4\pi}\frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2}{c^4 r^4}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2 \vec{r}}{4\pi c^3 r^5} \tag{6.4.21}$$

Mit

$$(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2 = |\ddot{\vec{p}}|^2 r^2 \sin^2\theta$$

ergibt sich die in Abbildung 6.11 gezeigte Strahlungscharakteristik im Fernfeld

$$|\vec{S}_F| = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi c^3 r^2}\sin^2\theta \tag{6.4.22}$$

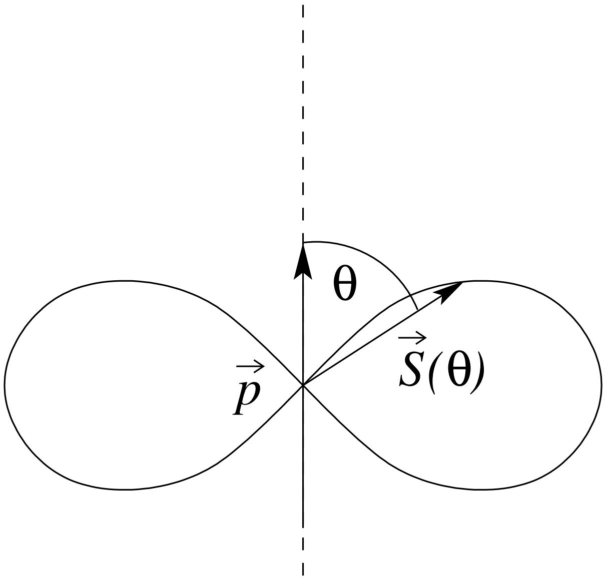


*Abb. 6.11: Abstrahlung des Dipols im Fernfeld.*

In Richtung der Dipolschwingungsachse ($\theta = 0$) erfolgt keine Abstrahlung. Die Abstrahlung ist maximal senkrecht zur Dipolschwingungsachse ($\theta = \pi/2$). Abstrahlung erfolgt nur, wenn eine Beschleunigung $\ddot{\vec{p}} \propto \ddot{\vec{r}}_0$ vorliegt. Der Energiestrom (6.4.21) fließt in radiale Richtung und fällt mit wachsendem Abstand proportional zu $\propto r^{-2}$ ab.
Der Gesamtbetrag der abgestrahlten Energie pro Zeiteinheit berechnet sich aus dem Betrag des Poynting-Vektor (6.4.22) des Fernfelds. Die mittlere Energie der Strahlung, die der Dipol während einer Schwingungsperiode $T$ durch die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $R$ abstrahlt, ist

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{T}\int_0^T dt \int d\Omega |\vec{S}_F| R^2 = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta [\frac{(\ddot{p})^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\theta] R^2 \\ &= \frac{2\pi}{4\pi c^3 T}\int_0^T dt\ (\ddot{p}(t - \frac{R}{c}))^2 \int_{-1}^{1} d\mu\ (1-\mu^2) = \frac{2}{3c^3 T}\int_0^T dt\ (\ddot{p}(t - \frac{R}{c})^2\end{aligned}$$

Für monochromatische Abstrahlung bei der Frequenz $\omega$ ist $p(t) = p_0 \sin\omega(t - \frac{R}{c})$, so daß

$$\ddot{p}(t) = -p_0\omega^2 \sin(\omega(t - \frac{R}{c})),$$

und wir erhalten

$$\mathcal{E} = \frac{2p_0^2\omega^4}{3c^3T}\int_0^T dt\ \sin^2(\omega(t-\frac{R}{c})) = \frac{p_0^2\omega^4}{6c^3},$$

weil mit $\omega = 2\pi/T$

$$\int_0^T dt\ \sin^2(\omega(t-\frac{R}{c})) = \frac{T}{2}$$

Es gilt also

$$\mathcal{E} = \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3} = \frac{16\pi^4}{3}\frac{p_0^2}{c^3T^4} = \frac{16\pi^4}{3}\frac{cp_o^2}{\lambda^4} \propto \lambda^{-4} \tag{6.4.23}$$

Wendet man diese Formel auf atomare Dipole an, so erkennt man, daß Licht bei kurzen Wellenlängen stärker gestreut wird als bei langen Wellenlängen. Dabei nutzt man, daß der Dipol so absorbiert wie er emittiert. Dieser Befund erklärt die blaue Frabe des Himmels, weil die blaue (kurzwellige) Komponente des Sonnenlichts am stärksten durch die Dipole in der Erdatmosphäre gestreut wird.

Der Ausdruck für den **Poynting-Vektor in der Nahzone** ist weit komplizierter. Mit Gleichungen (6.4.16) gilt

$$\vec{S}_N = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_N \times \vec{B}_N = \frac{c}{4\pi}[\frac{(3\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}] \times [\frac{\dot{\vec{p}}\times\vec{r}}{cr^3}]$$
$$= \frac{1}{4\pi r^8}[3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}] \times [\dot{\vec{p}}\times\vec{r}]$$
$$\frac{1}{4\pi r^8}[3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}\times(\dot{\vec{p}}\times\vec{r}) - r^2\vec{p}\times(\dot{\vec{p}}\times\vec{r})]$$
$$= \frac{1}{4\pi r^8}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{r})[r^2\dot{\vec{p}} - (\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}})\vec{r}] - r^2[(\vec{r}\cdot\vec{p})\dot{\vec{p}} - (\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}})\vec{r}]\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi r^8}\left[2(\vec{p}\cdot\vec{r})r^2\dot{\vec{p}} + \vec{r}[r^2(\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}}) - 3(\vec{p}\cdot\vec{r})(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r})]\right]$$

Mit $\vec{p}\cdot\vec{r} = pr\cos\theta$, $\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r} = \dot{p}r\cos\theta$ folgt

$$\vec{S}_N = \frac{1}{4\pi r^8}\left[2pr^3\dot{\vec{p}}\cos\theta + [r^2p\dot{p} - 3p\dot{p}r^2\cos^2\theta]\vec{r}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi r^6}\left[2pr\dot{\vec{p}}\cos\theta + p\dot{p}[1-3\cos^2\theta]\vec{r}\right] \tag{6.4.24}$$