5. Maxwell-Gleichungen

5.1 Induktionsgesetz

Bisher haben wir in der Elektrostatik ruhende Punktladungen und in der Magnetostatik stationäre Ströme von elektrischen Ladungen untersucht. In der Elektrostatik gilt: befindet sich eine Ladungsanordnung unter dem Einfluß eines elektrischen Felds, so verursacht jede Veränderung des elektrischen Feldes wegen der veränderten Kräfte eine Ladungsbewegung. Deshalb fragen wir uns jetzt: befindet sich ein stationärer Strom unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfelds, wie wirkt sich die Veränderung des magnetischen Feldes auf das Stromsystem aus?
Wir starten vom magnetischen Fluß (4.5.1) eines geschlossenen Stromkreises L

$$\phi_m(F) = \int_{F(L)} d\vec{f} \cdot \vec{B}, \tag{5.1.1}$$

wobei L die Fläche F berandet. Der magnetische Fluß ϕ_m ist durch L eindeutig bestimmt, d.h. er hängt nicht von der speziell gewählten Fläche F ab, denn mit $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ und dem Stokes-Theorem folgt, daß

$$\phi_m = \int_{F(L)} d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

nur von L abhängt.
Wir nehmen jetzt an, daß das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$ auch zeitlich veränderlich ist: Gemäß Gleichung (5.1.1) ist dann auch ϕ_m zeitlich veränderlich. Es gilt dann das
3. Experimentelle Fundamentalgesetz (Induktionsgesetz, Faraday-Gesetz): Die totale zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ϕ_m erzeugt eine induzierte elektrische Randspannung U^J in L, die der zeitlichen Änderung von ϕ_m proportional ist:

$$-K_3 \frac{d}{dt}\phi_m(t) = \int_L \vec{E}(\vec{r},t) \cdot d\vec{s} = U^J \tag{5.1.2}$$

Aufgrund dieser Randspannung entsteht im Leiter ein sog. Induktionsstrom. Dieser erzeugt seinerseits ein Magnetfeld.
Zunächst formulieren wir Gleichung (5.1.2) mit Hilfe von Gleichung (5.1.1) und dem Stokes-Theorem in ein differentielles Gesetz um:

$$-K_3 \frac{d}{dt} \int_{F(L)} d\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = \int_L \vec{E}(\vec{r},t) \cdot d\vec{s} = \int_{F(L)} d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t))$$

Diese Beziehung gilt für beliebig geformte Leiterkreise L. Läßt man L unbewegt ($\partial L/\partial t = 0$), so folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t) = -K_3 \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{5.1.3}$$

Im CGS-System haben $\vec{B}$ und $\vec{E}$ dieselbe Dimension. Also hat die Proportionalitätskonstante K_3 die Einheit Geschwindigkeit^{-1}. Es folgt experimentell $K_3 = 1/c$, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. Wir erhalten dann als differentielles Induktionsgesetz oder *differentielles Faradaysches-Induktionsgesetz*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \tag{5.1.4}$$

5.2 Feldgleichungen vor Maxwell für zeitabhängige Felder

Für eine Gesamtbeschreibung von zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Feldern bietet es sich an, die bisher angegebenen elektrischen und magnetischen Gesetze mit stationären ρ und $\vec{j}$ auf zeitabhängige Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r}, t)$ und zeitabhängige Stromverteilungen $\vec{j}(\vec{r}, t)$ zu verallgemeinern. Zusätzlich verwenden wir das Faraday-Gesetz (5.1.4) und die Ladungserhaltung (4.1.10). Dann erhalten wir

$$\text{aus der Elektrostatik: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \quad \text{Coulomb-Gesetz,} \tag{5.2.1}$$

$$\text{aus der Magnetostatik: } \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, t) \quad \text{Ampere-Gesetz,} \tag{5.2.2}$$

$$\text{aus der Magnetostatik: } \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{keine Monopole,} \tag{5.2.3}$$

$$\text{Induktionsgesetz: } \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \tag{5.2.4}$$

und

$$\text{Ladungserhaltung : } \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \tag{5.2.5}$$

Wir haben natürlich keine Gewähr, daß diese Verallgemeinerung richtig ist.
Und in der Tat: Maxwell erkannte, daß das zeitabhängige Ampere-Gesetz in der Form (5.2.2) nicht mit der Ladungserhaltung (5.2.5) verträglich ist! Wenden wir die Divergenz-Operation auf (5.2.2) an, so folgt

$$\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t)] = 0,$$

sodaß nach (5.2.5) folgen würde

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0,$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen, da stationäre Ladungsbewegungen ($\dot{\rho} = 0$) hier ausgeschlossen sind.

5.3 Verschiebungsstrom (oder: wie Maxwell das Ampere-Gesetz reparierte)

Maxwells Ausweg aus der Inkonsistenz war eine Modifikation des zeitabhängigen Ampere-Gesetzes (5.2.2) durch den Ansatz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\chi}(\vec{r}, t), \tag{5.3.1}$$

sodaß

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}(\vec{r}, t) = 0 \tag{5.3.2}$$

gelten muß. Man muß also eine divergenzfreie (wegen (5.3.2)) Vektorfunktion $\vec{\chi}$ finden, die für *stationäre* Ströme in das Ampere-Gesetz rot $\vec{B} = 4\pi\vec{j}/c$ der Magnetostatik übergeht. Ein sinnvoller Ansatz für $\vec{\chi}$ ist

$$\vec{\chi}(\vec{r}, t) \equiv \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \tag{5.3.3}$$

denn zum einen ist dann bei Verwendung des Coulomb-Gesetzes (5.2.1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c}(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)) + \frac{1}{c}\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t))}{\partial t}$$
$$= \frac{4\pi}{c}(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)) + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial(\rho(\vec{r}, t))}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}[\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial(\rho(\vec{r}, t))}{\partial t}] = 0,$$

wobei im letzten Schritt die Ladungserhaltung (5.2.5) verwandt wurde. Zum anderen führen im stationären Grenzfall ($\frac{\partial}{\partial t} \to 0$) Gleichungen (5.3.1) und (5.3.3) direkt auf das Ampere-Gesetz der Magnetostatik:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$$

Setzen wir im allgemeinen Fall (5.3.3) in Beziehung (5.3.1) ein, so erhalten wir als *richtige Verallgemeinerung des Ampere-Gesetzes*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \tag{5.3.4}$$

Der Term $\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ wird *Verschiebungstrom* genannt. Mit seiner Einführung gelangen wir zur endgültigen Form der elektromagnetischen Feldgleichungen im Vakuum, den sogenannten *Maxwell-Gleichungen*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0, \tag{5.3.5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t), \tag{5.3.6}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t), \tag{5.3.7}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{5.3.8}$$

Dabei handelt es sich um ein vollständig gekoppeltes System linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Beschreibung der zeitabhängigen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ bei vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\vec{r},t)$ bzw. $\vec{j}(\vec{r},t)$.
Die Existenz des Verschiebungsstroms wurde experimetell von Hertz bestätigt. Wie wir sehen werden, führt das Vorhandensein des Verschiebungsstroms zur Interpretation von Licht als elektromagnetische Wellen.
Aus den Maxwell-Gleichungen (5.3.6) und (5.3.7) folgt die Kontinuitätsgleichung, denn die Anwendung der Divergenz-Operation auf (5.3.7) ergibt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{c}\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = 0 - \frac{1}{c}\frac{\partial(4\pi\rho)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla} \cdot \vec{j},$$

oder

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.3.9}$$

Zusammen mit der Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q[\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)}{c}] \tag{5.3.10}$$

erhalten wir eine vollständige Beschreibung elektromagnetischer Phänomene in Vakuum. Die Maxwell-Gleichungen zeigen uns, wie Ladungverteilungen und Ströme von Ladungen elektromagnetische Felder produzieren. Die Lorentz-Kraft zeigt uns, wie diese elektromagnetischen Felder auf Ladungen wirken. Ergänzt wird dieses System von Gleichungen noch durch mathematische Randbedingungen, je nach konkreter Problemstellung.

5.4 Elektromagnetische Potentiale

In Analogie zur Elektrostatik und Magnetostatik versuchen wir durch Einführung von Potentialen das vollständig gekoppelte Gleichungssystem der Maxwellgleichungen zu vereinfachen und zu entkopplen.
Gleichung (5.3.8) erlaubt wieder die Einführung des *Vektorpotentials*

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{ rot } \vec{A}(\vec{r},t) \tag{5.4.1}$$

Setzen wir diese Beziehung in Gleichung (5.3.5) ein, so folgt

$$\text{rot}\ [\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}] = 0 \tag{5.4.2}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist wegen rot grad $= 0$ gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = -\ \text{grad}\ \Phi(\vec{r},t),$$

sodaß

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{5.4.3}$$

Gleichung (5.4.3) ist die Potentialdarstellung des elektrischen Feldes mit dem *skalaren Potential* $\Phi(\vec{r},t)$ und dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$. Im statischen Fall ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) reduziert sich Gleichung (5.4.3) auf Gleichung (3.3.1) für das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$.
Mit den Potentialdarstellungen (5.4.1) und (5.4.3) sind die *homogenen* (d.h. quellfreien) Maxwell-Gleichungen (5.3.5) und (5.3.8) automatisch erfüllt. Es verbleiben noch die *inhomogenen* Maxwell-Gleichungen (5.3.6) und (5.3.7) zur Bestimmung der Potentiale aus den gegebenen Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$. Durch Einsetzen der Darstellungen (5.4.1) und (5.4.3) erhalten wir für Gleichung (5.3.6)

$$-\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t))}{\partial t} = 4\pi\rho(\vec{r},t)$$

oder

$$\Delta\Phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t))}{\partial t} = -4\pi\rho(\vec{r},t) \tag{5.4.4}$$

Für Gleichung (5.3.7) folgt ebenso

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}] = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

Mit rot rot $=$ grad div $-\,\Delta$ erhalten wir

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)) - \Delta\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} + \vec{\nabla}(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

Wir definieren den *d'Alembert-Operator* oder *Quabla* durch

$$\square \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{5.4.5}$$

und erhalten damit

$$\square\vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t}] = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \tag{5.4.6}$$

Die Gleichungen (5.4.4) und (5.4.6) sind vier Gleichungen für die vier Potentialfunktionen $A_x, A_y.A_z$ und Φ, die aber noch gekoppelt sind.

5.5 Eichtransformationen

Zur Entkoppelung der Potentialgleichungen (5.4.4) und (5.4.6) nutzen wir aus, daß $\vec{B}$ und $\vec{E}$ durch die Beziehungen (5.4.1) und (5.4.3) nicht eindeutig mit $\vec{A}$ und Φ verknüpft sind. Diese Mehrdeutigkeit verwenden wir, um bei fest vorgegeben Maxwell-Gleichungen verschiedene Gleichungen für die Potentiale herzuleiten. Diese Möglichkeit wird *Eichung* der Potentiale genannt.
Die Transformation

$$\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \text{ grad } \Lambda(\vec{r},t) \tag{5.5.1}$$

ändert das magnetische Feld $\vec{B}$ nicht, weil wegen rot grad $= 0$

$$\text{rot } \vec{A}' = \text{ rot } \vec{A} + \text{ rot grad } \Lambda = \text{ rot } \vec{A}$$

Damit auch das elektrische Feld $\vec{E}$ gemäß Gleichung (5.4.3) unverändert bleibt, muß gleichzeitig auch das skalare Potential mittransformiert werden

$$\Phi(\vec{r},t) \to \Phi'(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(\vec{r},t)}{\partial t}, \tag{5.5.2}$$

denn dann ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi + \frac{1}{c}\vec{\nabla}(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\Lambda) = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Die Gleichungen (5.5.1) und (5.5.2) bilden eine *Eichtransformation*: die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder ändern sich nicht unter dieser Transformation mit einem beliebigen skalaren Feld $\Lambda(\vec{r},t)$.

5.5.1 Lorentz-Eichung

Wir behaupten: $\vec{A}'$ und Φ' können so gewählt werden, daß sich die Potentialgleichungen (5.4.4) und (5.4.6) reduzieren auf

$$\Box\Phi'(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t) \tag{5.5.3}$$

und

$$\Box\vec{A}'(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \tag{5.5.4}$$

mit der Lorentz-Bedingung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \tag{5.5.5}$$

Beweis: Nach Gleichungen (5.5.1) und (5.5.2) ist

$$\vec{A} = \vec{A}' - \vec{\nabla}\Lambda, \quad \Phi = \Phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{5.5.6}$$

Setzen wir dies in die gekoppelten Potentialgleichungen (5.4.4) und (5.4.6) ein, erhalten wir

$$\Delta\Phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial(\Delta\Lambda)}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Lambda) = \Delta\Phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = -4\pi\rho \tag{5.5.7}$$

und

$$\Box\vec{A}' - \Box(\vec{\nabla}\Lambda) + \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}] = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{5.5.8}$$

Wir nehmen ferner an, daß $\vec{A}$ und Φ als Lösungen von (5.4.4) und (5.4.6) bekannt sind. Dann kann die skalare Funktion Λ so gewählt werden, daß es die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\Box\Lambda = [\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}] \tag{5.5.9}$$

ist, deren rechte Seite bekannt ist. Gleichung (5.5.9) besitzt bei geeigneten Randbedingungen und Anfangsbedingungen für Λ eindeutige Lösungen. Mit Gleichung (5.5.9) reduziert sich Gleichung (5.5.8) auf

$$\Box\vec{A}' = \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

d.h. wir haben die zweite Behauptung (5.5.4) bewiesen.
Gleichung (5.5.7) bleibt zunächst unverändert,

$$\Delta\Phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = -4\pi\rho$$

Mithilfe von Beziehung (5.5.6) erhalten wir für die Summe

$$\begin{aligned}\text{div }\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= (\text{ div }\vec{A}' - \Delta\Lambda) + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} \\ &= \text{ div }\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} + (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} - \Delta\Lambda) = \text{ div }\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} + \Box\Lambda,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Quabla-Operator (5.4.5) benutzt haben. Nach Gleichung (5.5.9) ist die linke Seite dieser Gleichung gleich $\Box\Lambda$, sodaß die Lorentz-Bedingung (5.5.5) folgt:

$$\text{div }\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\text{div } \vec{A}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t},$$

die wir in Gleichung (5.5.7) einsetzen:

$$\Delta\Phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t}) = \Delta\Phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi' = -\Box\Phi' = -4\pi\rho,$$

d.h. wir haben auch die erste Behauptung (5.5.3) bewiesen. Q.E.D.
Lassen wir jetzt die Strich-Bezeichnung in den Gleichungen (5.5.3) – (5.5.5) fallen, so lauten unter Lorentz-Eichung

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \tag{5.5.10}$$

die Potentialgleichungen

$$\Box\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta\Phi(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \tag{5.5.11}$$

und

$$\Box\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, t) \tag{5.5.12}$$

Wir erhalten also vier *entkoppelte* lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Potentialfelder $\Phi(\vec{r}, t)$, $A_x(\vec{r}, t)$, $A_y(\vec{r}, t)$ und $A_z(\vec{r}, t)$. Aufgrund der Lorentz-Eichung (5.5.10) sind nur drei dieser vier Felder unabhängig voneinander.
Jede Komponente der Gleichung (5.5.12) hat dieselbe *Wellen-Gleichungsstruktur* wie die skalare Gleichung (5.5.11). Wir können die Diskussion der Lösungen daher auf Gleichung (5.5.11) beschränken. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.5.11) ist gleich der Summe aus einer partikulären Lösung Φ_{part} von (5.5.11) und der homogenen Lösung Φ_{hom}:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) + \Phi_{\text{part}}(\vec{r}, t), \tag{5.5.13}$$

wobei Φ_{hom} der zu (5.5.11) homogenen Gleichung

$$\Delta\Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{5.5.14}$$

genügt.

5.5.2 Coulomb-Eichung

Eine andere nützliche Eichung der Potentiale ist die *Coulomb-Eichung*

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \tag{5.5.15}$$

Damit wird Gleichung (5.4.4) für das skalare Potential sehr einfach zur Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t) \tag{5.5.16}$$

mit der Lösung (siehe Gleichung (3.3.2)

$$\Phi(\vec{r},t) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{5.5.17}$$

Φ ist das *instantane* Coulomb-Potential der Ladungsdichte ρ (daher auch der Name Coulomb-Eichung).
Der *Nachteil* der Coulomb-Eichung ist die verbleibende komplizierte Gleichung für das Vektorpotential, denn nach Gleichung (5.4.6) und (5.5.15) gilt

$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{5.5.18}$$

Setzen wir die Lösung (5.5.17) ein, erhalten wir mit der Ladungserhaltungsgleichung (5.3.9)

$$\begin{aligned}\Box\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\int d^3r' \, \frac{\partial\rho(\vec{r}\,',t)}{\partial t}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\int d^3r' \, \frac{\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\end{aligned} \tag{5.5.19}$$

Nach dem Helmholtzschen Zerlegungssatz (2.8.8) läßt sich die Stromdichte $\vec{j}$ als Summe zweier Terme darstellen: dem Gradient eines Skalars (*longitudinaler Anteil*) plus der Rotation eines Vektors (*transversaler Anteil*)

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_l(\vec{r},t) + \vec{j}_t(\vec{r},t) \tag{5.5.20}$$

mit

$$\vec{j}_l(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\int d^3r' \, \frac{\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

und

$$\vec{j}_t(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r \times \int d^3r' \, \frac{\operatorname{rot}\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

In Gleichung (5.5.19) taucht $\vec{j}_l$ als zweiter Term auf der rechten Seite auf, d.h.

$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) - \frac{4\pi}{c}\vec{j}_l(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}(\vec{j}_l(\vec{r},t) + \vec{j}_t(\vec{r},t)) - \frac{4\pi}{c}\vec{j}_l(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_t(\vec{r},t)$$

also

$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_t(\vec{r},t) \tag{5.5.21}$$

Unter Coulomb-Eichung ist das Vektorpotential vollständig durch die transversale Stromdichte $\vec{j}_t$ bestimmt. Deshalb wird die Coulomb-Eichung auch als *transversale Eichung* bezeichnet.
Die Coulomb-Eichung spielt eine wichtige Rolle in der Quantenelektrodynamik und im *quellfreien* Fall ($\rho = 0, \vec{j} = 0$). Dann ist $\Phi = 0$ eine Lösung und nach Gleichung (5.5.18) erfüllt das Vektorpotential die homogene Wellengleichung

$$\Box \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \tag{5.5.22}$$

Die elektromagnetischen Felder sind dann einfach durch $\vec{B} = \text{ rot } \vec{A}$ und $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ gegeben.

5.6 Energiesatz der Elektrodynamik

Als erste wichtige Konsequenz der Maxwell-Gleichungen behandeln wir den Energiesatz der Elektrodynamik. Dazu betrachten wir zunächst ein Teilchen mit der Ladung q, das im elektromagnetischen Feld der Lorentz-Kraft (5.3.10) unterliegt:

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}]$$

Bei der Verschiebung des geladenen Teilchens um die Strecke $d\vec{r} = \vec{v}dt$ leistet das Feld am Teilchen Arbeit. Zählt man diese positiv, so ist

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = q\vec{E} \cdot \vec{v}dt$$

Diese Feldenergie wird in kinetische Teilchenenergie umgewandelt. Die entsprechende Leistung ist

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Nur der elektrische Anteil der Lorentz-Kraft beteiligt sich am Energieaustausch zwischen Teilchen und Feld, weil die magnetische Kraftkomponente $\perp \vec{v}$ steht.
Dieselben Aussagen gelten auch für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r}, t)$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{V}(\vec{r}, t)$, die im Feld die *Kraftdichte* (Kraft pro Volumenelement)

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)[\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{V}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{c}] = \rho(\vec{r}, t)\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{c} \tag{5.6.1}$$

erfahren. Die Leistungsdichte

$$\vec{f}(\vec{r}, t) \cdot \vec{V}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

ist allein durch das elektrische Feld $\vec{E}$ und die Stromdichte $\vec{j}$ bestimmt. Die gesamte Arbeitsleistung des Feldes im Volumen V ist dann

$$\frac{dW_V}{dt} = \int_V d^3r\ \vec{f}(\vec{r},t) \cdot \vec{V}(\vec{r},t) = \int_V d^3r\ \vec{j}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t) \tag{5.6.2}$$

Im folgenden berechnen wir diese Arbeitsleistung. Dazu multiplizieren wir die Maxwell-Gleichung (5.3.5) skalar mit $\vec{B}$:

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{1}{c}\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5.6.3}$$

Ebenso multiplizieren wir die Maxwell-Gleichung (5.3.7) skalar mit $\vec{E}$:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{c}\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \cdot \vec{E} \tag{5.6.4}$$

Wir bilden die Differenz dieser beiden Gleichungen:

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{1}{2c}\frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{1}{2c}\frac{\partial E^2}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Gemäß Beziehung (2.4.2.4) ist

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}),$$

sodaß

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + B^2) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \cdot \vec{E}$$

oder nach Multiplikation mit dem Faktor $(c/4\pi)$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + B^2) - \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{5.6.5}$$

Wir definieren die *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes* durch

$$u_{em}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}(E^2(\vec{r},t) + B^2(\vec{r},t)) \tag{5.6.6}$$

und den *Poynting-Vektor* oder die *Energiestromdichte*

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t) \tag{5.6.7}$$

Damit schreibt sich Gleichung (5.6.6) als *differentielles Poynting-Theorem*

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \ \text{div}\ \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \tag{5.6.8}$$

Setzen wir Gleichung (5.6.8) ein in Gleichung (5.6.2), so erhalten wir unter Ausnutzung des Gauß-Theorems das *integrale Poynting-Theorem*

$$\frac{dW_V}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V d^3r\ u_{em}(\vec{r},t) - \int_V d^3r\ \vec{\nabla}\vec{S}(\vec{r},t) = -\frac{d}{dt}\int_V d^3r\ u_{em}(\vec{r},t) - \oint_{O(V)} d\vec{f}\cdot\vec{S}(\vec{r},t) \tag{5.6.9}$$

Die Leistung des elektromagnetischen Feldes an Ladungen im Volumen V ist gleich der Abnahme der gesamten elektromagnetischen Energie $\int_V d^3r u_{em}$ im Volumen V minus dem Energiestrom $\oint_{O(V)} d\vec{f}\cdot\vec{S}$ durch die Oberfläche des Volumens.
Mit der mechanischen Energiedichte u_M:

$$W_V = \int_V d^3r\ u_M(\vec{r},t)$$

folgt nach Gleichung (5.6.2)

$$\frac{dW_V}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\ u_M(\vec{r},t) = \int_V d^3r\ \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t),$$

oder

$$\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}u_M(\vec{r},t),$$

sodaß nach Beziehung (5.6.8) gilt

$$\mathrm{div}\ \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}(u_M + u_{em}) \tag{5.6.10}$$

5.7 Impulssatz der Elektrodynamik

Wir eliminieren in der Lorentz-Kraftdichte (5.6.1),

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{\vec{j}\times\vec{B}}{c},$$

ρ und $\vec{j}$ durch die Maxwell-Gleichungen (5.3.6) und (5.3.7)

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\vec{E},\quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi}[\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}]$$

und erhalten

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + \frac{1}{4\pi}[(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}] \tag{5.7.1}$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

und mit dem Induktionsgesetz (5.3.5) $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c\vec{\nabla}\times\vec{E}$, sodaß

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + c\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \tag{5.7.2}$$

Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (5.7.1) ergibt

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi}[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})] - \frac{1}{4\pi}[\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})] - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B})$$

Damit es symmetrischer aussieht, führen wir den Term $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} = 0$ in die zweite eckige Klammer ein mit dem Ergebnis

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi}[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})] - \frac{1}{4\pi}[\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B}] - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) \tag{5.7.3}$$

Gemäß der Produktregel (2.4.2.2)

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a}$$

gilt für $\vec{a} = \vec{b} = \vec{E}$:

$$\vec{\nabla}(E^2) = 2\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + 2(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$$

und ebenso für $\vec{a} = \vec{b} = \vec{B}$:

$$\vec{\nabla}(B^2) = 2\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + 2(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Damit erhalten wir

$$\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(E^2) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E},$$

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(B^2) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

und Gleichung (5.7.3) reduziert sich auf

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi}[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}] - \frac{1}{8\pi}\vec{\nabla}(E^2 + B^2) - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) \tag{5.7.4}$$

Wir definieren den *Maxwellschen Spannungstensor*

$$\hat{T} = T_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi}[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\delta_{ij}] \tag{5.7.5}$$

mit $i, j \in [1, 2, 3]$; $E_1 = E_x$, $E_2 = E_y$ und $E_3 = E_z$.
Das Skalarprodukt dieses Tensors mit einem Vektor $\vec{a}$ ergibt wieder einen Vektor:

$$(\vec{a} \cdot \hat{T})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij}$$

Speziell gilt

$$(\vec{\nabla}\cdot\hat{T})_j = \sum_{i=x,y,z}\frac{\partial}{\partial x_i}T_{ij} = \frac{1}{4\pi}[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})E_j+(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})E_j+(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})B_j+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})B_j-\frac{1}{2}\nabla_j(E^2+B^2)],$$

sodaß für Gleichung (5.7.4) mit dem Poynting-Vektor (5.6.7) folgt

$$\vec{f} = \vec{\nabla}\cdot\hat{T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{S}}{\partial t} \tag{5.7.6}$$

Die Gesamtkraft im Volumen V ist dann

$$\vec{F} = \int_V d^3r\ \vec{f} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3r\ \vec{S} + \int_V d^3r\ (\vec{\nabla}\cdot\hat{T}) = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\ \vec{S} + \oint_{O(V)} d\vec{f}\cdot\hat{T},$$

also

$$\vec{F} = \oint_{O(V)} d\vec{f}\cdot\hat{T} - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\ \vec{S} \tag{5.7.7}$$

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die Kraft auf ein Objekt gleich der zeitlichen Änderung seines Impulses $\vec{F} = d\vec{p}/dt$,sodaß

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \oint_{O(V)} d\vec{f}\cdot\hat{T} - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\ \vec{S} \tag{5.7.8}$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche Struktur wie das integrale Poynting-Theorem (5.6.9) und erlaubt eine ähnliche Interpretation. Mit dem *Impuls des elektromagnetischen Feldes*

$$\vec{p}_{em} = \frac{1}{c^2}\int_V d^3r\ \vec{S} \tag{5.7.9}$$

und der Einführung der *Impulsdichte*

$$\vec{p}_{em} = \int_V d^3r\ \vec{g}_{em}(\vec{r},t) \tag{5.7.10}$$

gilt

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{B} \tag{5.7.11}$$

Definieren wir noch die *mechanische Impulsdichte* durch

$$\vec{p} = \int_V d^3r\ \vec{p}_M(\vec{r},t),$$

können wir Gleichung (5.7.6) auch schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t}[\vec{p}_M(\vec{r},t) + \vec{g}_{em}(\vec{r},t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\vec{p}_M(\vec{r},t) + \frac{\vec{S}(\vec{r},t)}{c^2}] = \vec{\nabla}\cdot\hat{T} \tag{5.7.12}$$

Elektromagnetische Felder tragen also neben Energie mit der Energiedichte (5.6.6),

$$u_{em} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2),$$

auch Impuls mit der Impulsdichte (5.7.11)

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E} \times \vec{B}$$

Sie besitzen deshalb auch Drehimpuls mit der Drehimpulsdichte

$$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g}_{em} = \frac{1}{4\pi c}\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{5.7.13}$$

5.8 Lagrange- und Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

Auf ein Teilchen der Ladung e im elektromagnetischen Feld wirkt die LorentzKraft (5.3.10)

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \tag{5.8.1}$$

wobei $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke, $\vec{B}$ die magnetische Feldstärke, $\vec{v}$ die Teilchengeschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit darstellen. Die Feldstärken

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5.8.2}$$

lassen sich durch das skalare Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ und dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ darstellen. Setzt man die Gleichungen (5.8.2) in Gleichung (5.8.1) ein, so folgt für die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = e\Big(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Big) \tag{5.8.3}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, betrachten wir die x-Komponente des letzten Terms:

$$T_3 = [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_x = v_y(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) - v_z(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) = v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

Nun addieren wir

$$0 = v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

und erhalten mit

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z})$$

daß

$$T_3 = v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Damit erhalten wir nach für die x-Komponente der Lorentzkraft

$$F_x/e = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{dA_x}{dt} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{dA_x}{dt}$$

Weil $\vec{A}(\vec{r}, t)$ nicht von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ abhängt, gilt

$$A_x = \frac{\partial}{\partial v_x}(A_x v_x) = \frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{A} \cdot \vec{v}),$$

sodaß

$$F_x/e = -\frac{\partial}{\partial x}[\Phi - \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}] - \frac{1}{c} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial v_x}(\vec{A} \cdot \vec{v})\Big) \tag{5.8.4}$$

Da das skalare Potential $\phi(\vec{r}, t)$ ebenfalls nicht von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ abhängt, dürfen wir schreiben

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x} \tag{5.8.5}$$

mit dem generalisierten Potential

$$U \equiv e\Phi - \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} \tag{5.8.6}$$

Entsprechendes gilt für die y- und z-Komponente der Lorentzkraft, d.h.

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_z},$$

sodaß allgemein

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} U + \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_{\vec{v}} U) \tag{5.8.7}$$

Die Gleichungen (5.8.5) und (5.8.7) erfüllen genau die in der Mechanik-Vorlesung (siehe dort Gleichung (3.13.1)) gestellten Anforderungen an das verallgemeinerte Potential V^*. Für die Lagrange-Funktion eines Teilches im elektromagnetischen Feld $L = T - V^*$ folgt mit $V^* = U$:

$$L = T - \ e\Phi + \ \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2}v^2 - \ e\Phi + \ \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} \tag{5.8.8}$$

Da keine Zwangsbedingungen vorliegen, sind die verallgemeinerten Koordinaten q_k gleich den natürlichen Koordinaten x_k. Es gilt dann für den kanonisch konjugierten Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{v}} + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}, \tag{5.8.9}$$

d.h. ein Teilchen im Magnetfeld ändert seinen Linearimpuls um $\frac{e}{c}\vec{A}$. Dies ist ein Beispiel dafür, daß der kanonisch konjugierte Impuls nicht mit dem mechanischen Linearimpuls $m\vec{v}$ übereinstimmt.

Die Hamilton-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld erhalten wir aus der Lagrange-Funktion (5.8.8) durch

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \vec{v} - L(\vec{x}, \vec{v}, t) \tag{5.8.10}$$

und Einsetzen von $\vec{v}$ aus der Gleichung (5.8.9) für den kanonisch konjugierten Impuls:

$$\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) \tag{5.8.11}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}}{m} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) - \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\Phi - \frac{e}{c}\vec{A} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) \\ &= e\Phi + (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) \cdot [\frac{\vec{p}}{m} - \frac{\vec{p}}{2m} + \frac{e}{2mc}\vec{A} - \frac{e}{mc}\vec{A}] = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\Phi \end{aligned} \tag{5.8.12}$$