4. Magnetostatik

Der Ausgangspunkt der Elektrostatik ist das Coulomb-Gesetz: Ruhende elektrische Ladungen üben aufeinander Kräfte aus. In der Magnetostatik gilt ein markanter Unterschied, es gibt keine magnetischen Ladungen. Es existiert kein magnetischer Monopol analog zur elektrischen Ladung. Magnetische Ladungen kommen immer nur in engster Kombination mit der magnetischen Gegenladung, d.h. als *magnetische Dipole* vor.
Wir gehen aus vom experimentellen Befund von Oersted, daß ein zeitlich konstanter Strom von elektrischen Ladungen zeitunabhängige Magnetfelder erzeugt, wobei eine Kompaßnadel die Richtung dieses Magnetfeldes anzeigt. Ähnlich wie in der Elektrostatik, wo *stationäre elektrische Ladungen* auf *konstante elektrische Felder* führten, führen in der Magnetostatik *konstante Ströme elektrischer Ladungen* auf *konstante Magnetfelder*.

4.1 Strom und Stromdichte

4.1.1 Stromdichte und Stromfaden

Die Stromdichte $\vec{j}$ ist der Fluß einer Ladungsmenge dq durch die Fläche dF in der Zeit dt:

$$j = |\vec{j}| = \frac{dq}{dF\ dt} \tag{4.1.1}$$

Die Stromdichte $\vec{j}$ ist der Vektor in Richtung der Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger mit dem Betrag (4.1.1).
Die zeitliche Ableitung in Gleichung (4.1.1) soll als einzige nicht verschwinden, damit ein stationärer Strom existieren kann. Unter einem stationären Strom verstehen wir also das Fließen von elektrischen Ladungen, das immer gleich stark vonstatten geht: niemals anwachsend, niemals abfallend und niemals richtungsändernd. Einen solchen Zustand gibt es in der Praxis natürlich nicht. Wir meinen damit den Grenzfall, in dem zeitliche Änderungen viel kleiner als räumliche Änderungen des physikalischen Systems sind.
Eine bewegte Punktladung kann daher keinen stationären Strom erzeugen, da sie sich zu einem Moment an einem Ort und im nächsten Moment an einem anderen Ort befindet. Die Situation ist also gänzlich anders als in der Elektrostatik: dort waren wir von einer Punktladung ausgegangen und hatten mit dem Superpositionsprinzip auf beliebige Ladungsverteilungen erweitert. Hier geht das so nicht, da eine bewegte Punktladung kein statisches Feld erzeugt.
Das Integral der Stromdichte über die Fläche dF mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ ergibt den elektrischen Strom

$$I = \int_F \vec{j} \cdot \vec{n} dF = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{F} \ , \tag{4.1.2}$$

d.h. der Strom ist Ladung pro Zeiteinheit.

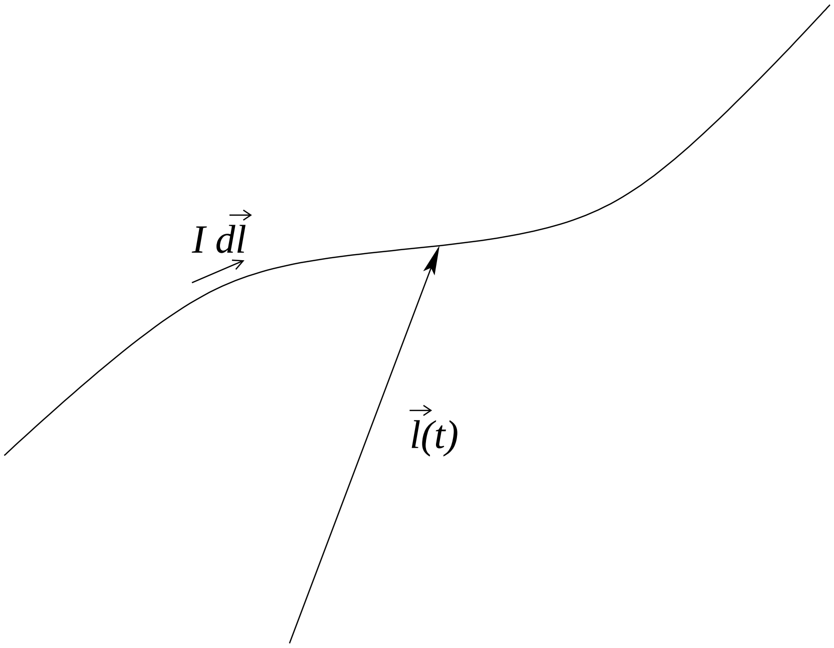

Abb. 4.1: Der Stromfaden.

Wir führen jetzt den Begriff des *Stromfadens* ein (siehe Abbildung 4.1): dazu betrachten wir einen dünnen Draht mit der Querschnittsfläche ΔF. $\vec{l}(t)$ beschreibt die Länge des Drahts in Abhängigkeit von dem Bahnparameter t. Die Stromdichte dieses dünnen Drahts ist dann

$$\vec{j} = \frac{I}{\Delta F}\frac{d\vec{l}}{dl},$$

weil jedes Wegelement der Kurve $\vec{l}$ mit $Id\vec{l}$ zur Stromdichte beiträgt. Mit $\Delta F\; dl = \Delta V = d^3r$ ergibt sich

$$\vec{j}(\vec{r},t)d^3r = Id\vec{l} \tag{4.1.3}$$

Mit Gleichung (4.1.3) können wir ausgedehnte Stromverteilungen durch Überlagerung von stromdurchflossenen Drahtelementen oder Stromfäden repräsentieren. Gleichung (4.1.3) ist das Analogon von ausgedehnten Ladungsverteilungen in der Elektrostatik ($dq = \rho d^3r$).
In der Magnetostatik beschränken wir uns auf zeitunabhängige Ströme $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})$.

4.1.2 Mikroskopische Definition

In einer mikroskopischen klassischen Beschreibung gehen wir von N Punktladungen q_i, $i = 1, ..., N$ aus mit den jeweiligen Ortsvektoren $\vec{r}_i(t)$ und Geschwindigkeisvektoren $\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t)$. Damit erhalten wir als atomare Ladungsdichte

$$\rho_{at}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \tag{4.1.4}$$

und als atomare Stromdichte

$$\vec{j}_{at}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{v}_i(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \tag{4.1.5}$$

Durch räumliche Mittelung dieser atomaren Größen über ein Volumen ΔV erhalten wir die mittleren Ladungs- und Stromdichten:

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{\int_{\Delta V} d^3r \rho_{at}(\vec{r},t)}{\int_{\Delta V} d^3r} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3r \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V} q_i$$

und

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3r \vec{j}_{at}(\vec{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V} q_i \vec{v}_i(t)$$

Sind alle Ladungen gleich $q_i = q$, gilt

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{q}{\Delta V}\sum_{\Delta V} \vec{v}_i(t) \tag{4.1.6}$$

und

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{q}{\Delta V}\Delta N,$$

oder

$$\frac{q}{\Delta V} = \rho(\vec{r},t)\frac{1}{\Delta N} \quad , \tag{4.1.7}$$

wobei ΔN die Anzahl der Ladungen in ΔV ist. Setzen wir (4.1.7) in Gleichung (4.1.6) folgt der Zusammenhang

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\frac{1}{\Delta N}\sum_{\Delta V} \vec{v}_i(t) = \rho(\vec{r},t)\vec{V}(t) \quad , \tag{4.1.8}$$

wobei

$$\vec{V}(t) = \frac{1}{\Delta N}\sum_{\Delta V} \vec{v}_i(t)$$

die mittlere Geschwindigkeit der Ladungen in ΔV ist. Die Stromdichte $\vec{j}$ ist über die Ladungsdichte ρ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{V}$ verknüpft.

Beipiel eines stromdurchflossenen Metalldrahts: Ein Metall besteht aus einem Gitter von positiven Ionen und freien Elektronen. Da die mittlere Geschwindigkeit der Ionen gleich Null ist, leisten diese keinen Beitrag zur Stromdichte. Bei angelegter Spannung haben nur die Elektronen eine von Null verschiedene mittlere Geschwindigkeit.

4.1.3 Kontinuitätsgleichung

Gemäß Gleichung (4.1.2) ist die Stromdichte $\vec{j}$ gleich Strom pro Fläche, sodaß $\oint_{O(V)} \vec{j} \cdot d\vec{F}$ der Strom durch die Oberfläche O des Volumens V ist. Ist ρ die Ladungsdichte, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r\rho$$

die zeitliche Änderung der Ladung im Volumen V. Diese Änderung der Ladung im Volumen V muß gleich dem Ladungsstrom durch die Oberfläche sein:

$$0 = \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \oint_{O(V)} \vec{j} \cdot d\vec{F} \tag{4.1.9}$$

Wenden wir das Gauß-Theorem auf den zweiten Term dieser Gleichung an, so erhalten wir

$$0 = \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_V d^3r \ \operatorname{div} \vec{j} = \int_V d^3r [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \ \operatorname{div} \vec{j}]$$

für beliebige Volumina V, sodaß die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \ \operatorname{div} \vec{j} = 0 \tag{4.1.10}$$

folgt.

Im statischen Fall der Magnetostatik ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) folgt speziell die *magnetostatische Kontinuitätsgleichung*

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \tag{4.1.11}$$

4.2 Ampere-Gesetz

Das Ampere-Gesetz beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Stromfäden L_1 und L_2 (siehe Abbildung 4.2).

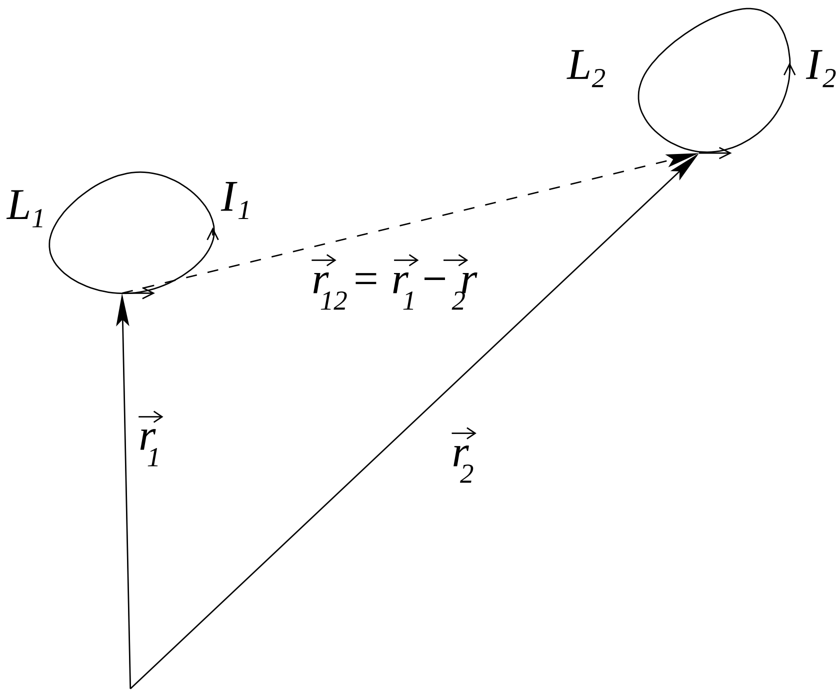

Abb. 4.2: Die Kraft zwischen zwei Stromfäden.

2. experimentelles Fundamentalgesetz (Ampere-Gesetz): Werden die Stromfäden L_1 und L_2 von den stationären Strömen I_1 und I_2 durchflossen, so treten zwischen L_1 und L_2 Kraftwirkungen auf, die durch

$$\vec{F}_{12} = K_2 I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \tag{4.2.1}$$

mit $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ beschrieben werden können.
Im CGS-System ist die Proportionalitätskonstante $K_2 = 1/c^2$ festgelegt, sodaß

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \tag{4.2.2}$$

Mit der Identität des dreifachen Kreuzprodukts

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

für $\vec{a} = d\vec{r}_1$, $\vec{b} = d\vec{r}_2$ und $\vec{c} = \vec{r}_{12}$ erhalten wir für

$$d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}) = (d\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12}) \cdot d\vec{r}_2 - (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) \cdot \vec{r}_{12},$$

sodaß

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \Big[\oint_{L_2} d\vec{r}_2 \oint_{L_1} d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \oint_{L_1} \oint_{L_2} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \Big]$$

Der erste Term verschwindet, da mit $\vec{r}_{12}/r_{12}^3 = -\ \mathrm{grad}\ (1/r_{12})$

$$\oint_{L_1} d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\oint_{L_1} d\vec{r}_1 \cdot \text{ grad } \frac{1}{r_{12}} = -\int_{O(L_1)} d\vec{f}_1 \cdot \text{ rot grad } \frac{1}{r_{12}} = 0,$$

wobei wir das Stokes-Theorem (2.6.7) und die Beziehung (2.4.4.2), rot grad $= 0$, ausgenutzt haben. Es verbleibt

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \, \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \tag{4.2.3}$$

mit der Eigenschaft Actio=Reactio

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{4.2.4}$$

wegen $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$.

4.3 Magnetische Induktion und Biot-Savart-Gesetz

Analog zum Coulomb-Gesetz interpretiert man das Ampere-Gesetz mittels des Feldbegriffs: der Stromfaden L_1 befindet sich in dem vom Stromfaden L_2 erzeugten Kraftfeld, d.h. wir schreiben das Ampere-Gesetz (4.2.2) als

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1}{c} \oint_{L_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \tag{4.3.1}$$

oder

$$\vec{F}_{21} = \frac{I_2}{c} \oint_{L_2} d\vec{r}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2) \tag{4.3.2}$$

mit der *magnetischen Induktion*

$$B_i(\vec{r}) \equiv \frac{I_i}{c} \oint_{L_i} \frac{d\vec{r}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{[\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad , \tag{4.3.3}$$

d. h.

$$B_2(\vec{r_1}) \equiv \frac{I_2}{c} \oint_{L_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

und

$$B_1(\vec{r_2}) \equiv \frac{I_1}{c} \oint_{L_1} \frac{d\vec{r}_1 \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

Gleichung (4.3.3) wird als *Biot-Savart-Gesetz* bezeichnet. Die Dimension der magnetischen Induktion $\vec{B}$ im CGS-System ist dyn (Le)$^{-1}$=dyn$^{1/2}$cm^{-1} $= 1$ Gauss, d.h. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben im CGS-System die gleiche Dimension.

Analog zum elektrischen Feld gilt für das Magnetfeld das Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen: das Magnetfeld von stationären Stromkreisen $L_i = 1, ..., n$ entsteht durch Superposition der Einzelfelder der Stromkreise:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{I_i}{c} \oint_{L_i} \frac{d\vec{r}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{[\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad . \tag{4.3.4}$$

Mit Gleichung (4.1.3), $\vec{j}(\vec{r})d^3r = Id\vec{l}$, gehen wir auf beliebige Stromdichten über und erhalten

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{4.3.5}$$

Gleichung (4.3.5) vergleicht sich mit der Beziehung (3.2.6) der Elektrostatik,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Anstelle des Produkts aus ρ und dem Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$ in haben wir in der magnetostatischen Gleichung (4.3.5) das Kreuzprodukt aus Stromdichte $\vec{j}$ und dem Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$.
Verwenden wir Gleichung (4.1.3) in der Form $\vec{j}(\vec{r})d^3r = I_1 d\vec{r}_1$, in Beziehung (4.3.1), so erhalten wir die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})] \quad , \tag{4.3.6}$$

die auf eine Stromdichte $\vec{j}$ von einem durch eine *andere* Stromdichte erzeugten $\vec{B}$-Feld ausgeübt wird.
Das durch die Kraft (4.3.6) ausgeübte Drehmoment um den Ursprung ist

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \; \vec{r} \times [\vec{j} \times \vec{B}] \tag{4.3.7}$$

Ist der Stromkreis an anderer Stelle fixiert, muß das Drehmoment analog bezüglich dieser Stelle berechnet werden.

4.3.1 Beispiel: Lorentz-Kraft

Als *Beispiel* betrachten wir den magnetischen Anteil der Lorentz-Kraft: für eine Punktladung $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ ist $\vec{j}(\vec{r}) = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Eingesetzt in Gleichung (4.3.6) erhalten wir

$$\vec{F}_B = \frac{q}{c} \vec{v}(\vec{r}_0) \times \vec{B}(\vec{r}_0) \tag{4.3.8}$$

Zusammen mit der Coulomb-Kraft (3.2.2) folgt für die gesamte Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = \vec{K}_E + \vec{F}_B = q[\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}] \tag{4.3.9}$$

und die Bewegungsgleichungen für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld lauten

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q[\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}], \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} \tag{4.3.10}$$

mit dem Lorentzfaktor $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$.

4.3.2 Beispiel: Magnetfeld eines geraden Leiters

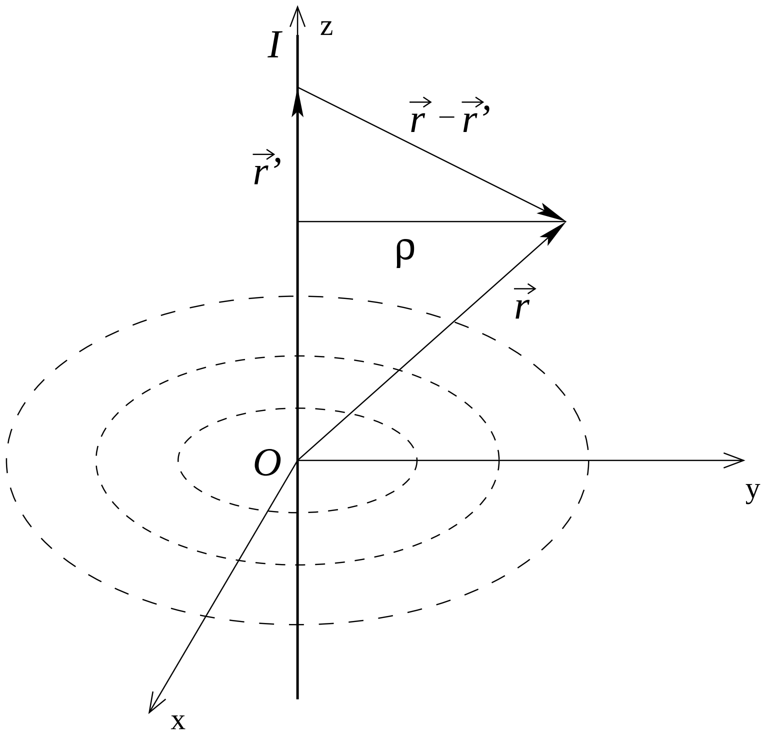

Abb. 4.3: Der unendlich lange stromdurchflossene Leiter durch den Ursprung.

Als weiteres Beispiel berechnen wir das Magnetfeld eines geraden Leiters durch den Ursprung parallel zur z-Achse (siehe Abbildung 4.3) mit dem Strom I. Verwenden wir Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z), so ist $\vec{r}^{'} = z^{'}\vec{e}_z$, $d\vec{r}^{'} = dz^{'}\vec{e}_z$ und es gilt

$$\vec{r} - \vec{r}^{'} = \rho\vec{e}_\rho + (z - z^{'})\vec{e}_z.$$

Damit folgt für Gleichung (4.3.3)

$$B(\vec{r}) = \frac{I}{c}\oint_L \frac{d\vec{r}^{'} \times (\vec{r} - \vec{r}^{'})}{[\vec{r} - \vec{r}^{'}|^3} =$$

$$\frac{I}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dz^{'} \frac{\vec{e}_z \times [\rho\vec{e}_\rho + (z - z^{'})\vec{e}_z]}{[\rho^2 + (z - z^{'})^2]^{3/2}} = \frac{I\rho}{c}(\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho)J_1 = \frac{I\rho}{c}\vec{e}_\phi J_1 \tag{4.3.11}$$

mit dem Integral

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz^{'}}{[\rho^2 + (z - z^{'})^2]^{3/2}}$$

Substituieren wir $z - z^{'} = \rho t$, so folgt

$$J_1 = \frac{\rho}{\rho^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{2}{\rho^2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$$

und mit der Substitution $y = t^2$

$$J_1 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\infty} dy\; y^{-1/2}(1+y)^{-3/2}$$

Die Beta-Funktion hat die Integral-Darstellung

$$B(x,w) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(w)}{\Gamma(x+w)} = \int_0^{\infty} dy\; y^{x-1}(1+y)^{-(x+w)}$$

und wir erhalten mit $x = 1/2$ und $w = 1$

$$\int_0^{\infty} dy\; y^{-1/2}(1+y)^{-3/2} = B(\frac{1}{2}, 1) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} = 2,$$

sodaß

$$J_1 = \frac{2}{\rho^2}$$

Für Gleichung (4.3.11) folgt dann die ursprüngliche Form des Biot-Savart-Gesetzes

$$B(\vec{r}) = \frac{2I}{c\rho}\vec{e}_\phi \tag{4.3.12}$$

des Magnetfelds eines geraden Leiters. Die Feldlinien ergeben sich als konzentrische Kreise um den geraden Leiter, wobei der Betrag der magnetischen Induktion proportional zur Stromstärke I ist und umgekehrt proportional zum senkrechten Abstand ρ zum Leiter ist.

4.4 Differentielle Feldgleichungen

Mit der Identität (2.7.27),

$$\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}^{'}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}^{'}}{|\vec{r} - \vec{r}^{'}|^3} \quad ,$$

folgt für Gleichung (4.3.5)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r^{'} \vec{j}(\vec{r}^{'}) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}^{'}}{|\vec{r} - \vec{r}^{'}|^3} = -\frac{1}{c} \int d^3r^{'} \vec{j}(\vec{r}^{'}) \times (\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}^{'}|}) =$$

$$\frac{1}{c} \int d^3r^{'} (\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}^{'}|}) \times \vec{j}(\vec{r}^{'}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \times \int d^3r^{'} \frac{\vec{j}(\vec{r}^{'})}{|\vec{r} - \vec{r}^{'}|} = \text{ rot } \vec{A}(\vec{r}) \tag{4.4.1}$$

mit dem *Vektorpotential*

$$\vec{A}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \text{ grad } \Lambda(\vec{r}) \tag{4.4.2}$$

Wegen rot grad $= 0$ kann zum 1. Integral ein beliebiges Gradientenfeld dazuaddiert werden, ohne daß sich das Magnetfeld (4.4.1) ändert (Eichung des Potentials). Wählen wir speziell $\Lambda = 0$, so gilt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{4.4.3}$$

Wir berechnen die Divergenz des Potentials (4.4.3):

$$\text{div }_r\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\vec{\nabla}_r\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Mit

$$\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{4.4.4}$$

ergibt sich nach partieller Integration unter Ausnutzung der magnetostatischen Kontinuitätsgleichung (4.1.11)

$$\text{div }_r\vec{A} = -\frac{1}{c}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\text{div }_{r'}\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0$$

oder

$$\text{div } \vec{A} = 0 \tag{4.4.5}$$

was als *Coulomb-Eichung* bezeichnet wird.
Weil div rot $= 0$, folgt aus Gleichung (4.4.1) sofort

$$\text{div } \vec{B} = 0 \tag{4.4.6}$$

und wegen rot rot $=$ grad div $-\,\Delta$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\times\vec{\nabla}_r\times\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{c}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\Delta_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Im ersten Integral verwenden wir Beziehung (4.4.4), im zweiten Integral Beziehung (2.7.28)

$$\Delta_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Dann erhalten wir

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') - \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\int_V d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad ,$$

also

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) - \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\int_V d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{4.4.7}$$

Nun ist mit der Produktregel (2.4.2.3) und der magnetostatischen Kontinuitätsgleichung (4.1.11)

$$\vec{\nabla}_{r'}\cdot\Big(\vec{j}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Big) = \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\text{ div }\vec{j}(\vec{r}\,') = \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Für den 2. Term in Gleichung (4.4.7) folgt dann mit dem Gauß-Theorem (2.6.4)

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\int_V d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\int_V d^3r'\,\vec{\nabla}_{r'}\cdot\Big(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Big) \\ &= -\frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\oint_{O(V)} d\vec{f}\,'\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0 \quad , \end{aligned}$$

weil das Oberflächenintegral im Unendlichen ($r' \to \infty$) verschwindet. Nach Gleichung (4.4.7) verbleibt

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{4.4.8}$$

Alternativ könnem wir die differentielle Feldgleichung (4.4.8) auch kurz und elegant aus dem Helmholtz-Theorem (2.8.7) ableiten: setzen wir $\vec{F} = \vec{B}$ so folgt mit (4.4.6), div $\vec{B} = 0$, daß

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\times\int_V d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{B}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Der Vergleich mit Beziehung (4.3.5)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{[\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

liefert sofort

$$\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{B}(\vec{r}\,') = \frac{1}{c}\vec{j}(\vec{r}\,')$$

oder

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Q.E.D.

Als *differentielle Feldgleichungen der Magnetostatik* erhalten wir damit

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \tag{4.4.9}$$

und

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{4.4.10}$$

Mit $\vec{B}(\vec{r}) = \text{ rot } \vec{A}(\vec{r})$ folgt alternativ für das Vektorpotential unter Coulombeichung

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{4.4.11}$$

und

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad , \tag{4.4.12}$$

weil rot rot $\vec{A} = $ grad div $\vec{A} - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A}$.
Die Potentialgleichung (4.4.11) besteht aus drei Gleichungen für die Komponenten des Vektorpotentials $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Das Integral (4.4.3) ist die Lösung der Feldgleichung (4.4.11).
Das *Grundproblem der Magnetostatik* besteht darin, aus der gegebenen Stromdichteverteilung $\vec{j}$ in einem interessierenden Raumbereich V und den gegebene Randbedingungen auf der Oberfläche $O(V)$ dieses Volumens die Komponenten des Vektorpotentials $\vec{A}$ zu bestimmen, die sich aus der Lösung der partiellen, inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung (4.4.11) ergeben.
Formal haben wir das gleiche mathematische Problem wie bei der Lösung der Poisson-Gleichung der Elektrostatik. Die in Kapitel 3 entwickelten Lösungsverfahren finden auch hier ihre Anwendung. Bevor wir diese illustrieren, betrachten wir zunächst die Integralform der magnetostatischen Feldgleichungen und das Verhalten von Magnetfeldern an Grenzflächen (Randbedingungen).

4.5 Integralform der Feldgleichungen

Die Anwendung des Gauß-Theorems auf die differentielle Feldgleichung (4.4.9), div $\vec{B} = 0$, ergibt

$$\int_V d^3r \text{ div } \vec{B} = \oint_{O(V)} d\vec{F} \cdot \vec{B} = \phi_m = 0 \tag{4.5.1}$$

Der magnetische Fluß ϕ_m durch die Oberfläche $O(V)$ eines beliebigen Volumens verschwindet. Anschaulich heißt das: es gehen ebenso viele magnetische Feldlinien in ein beliebiges Volumen V hinein wie heraus; deshalb sind magnetische Feldlinien immer geschlossen.

Die Anwendung des Stokes-Theorems auf die zweite differentielle Feldgleichung (4.4.10), rot $\vec{B} = 4\pi\vec{j}/c$, d.h. die Integration über eine Fläche F mit der Berandung C, ergibt das *integrale Ampere-Gesetz*:

$$\int_F [\text{ rot } \vec{B}] \cdot d\vec{f} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} = \frac{4\pi}{c} I_f \tag{4.5.2}$$

Das geschlossenen Linienintegral über $\vec{B}$ ergibt den durch die umschlossene Fläche fließenden Strom multipliziert mit dem Faktor $(4\pi/c)$.
Bei der Berechnung des Stroms I_f haben wir Beziehung (4.1.3) benutzt: mit $\vec{j} = \frac{I}{\Delta F}\frac{d\vec{l}}{dl}$ und $d\vec{f} = \Delta F \frac{d\vec{l}}{dl}$ folgt

$$\vec{j} \cdot d\vec{f} = \frac{I}{\Delta F}\frac{d\vec{l}}{dl} \cdot \Delta F \frac{d\vec{l}}{dl} = I = I_f$$

In Abbildung 4.4 fassen wir die abgeleiteten integralen und differentiellen magnetostatischen Feldgleichungen zusammen, die den Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke $\vec{B}$, der Stromdichte $\vec{j}$ und dem Vektorpotential $\vec{A}$ vermitteln.

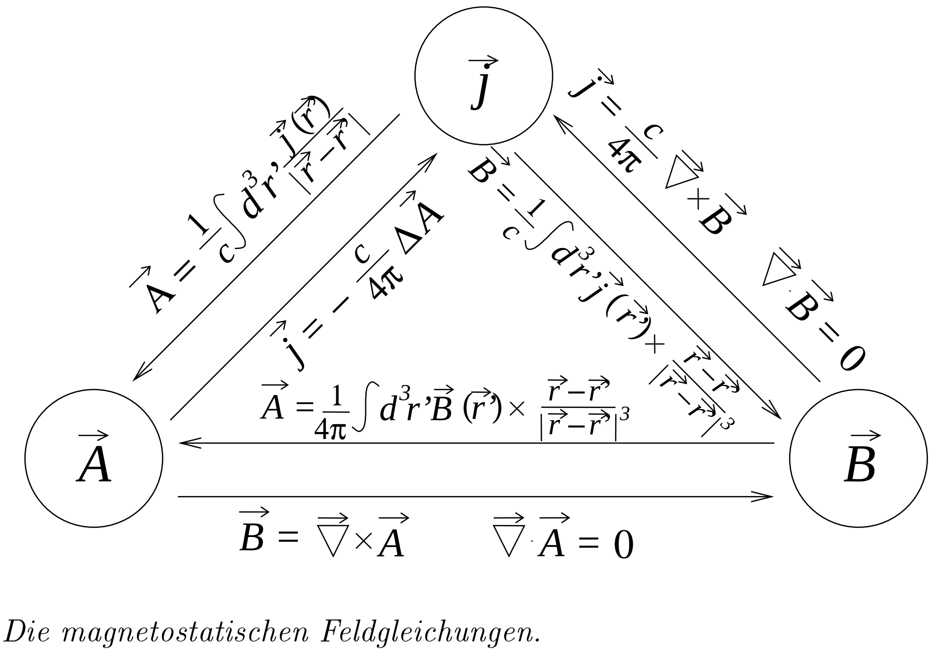

Abb. 4.4: Die magnetostatischen Feldgleichungen.

4.6 Feldverhalten an Grenzflächen

Das Magnetfeld ist unstetig an einer stromdurchflossenen Oberfläche. Anders als in der Elektrostatik betrifft es hier die Tangentialkomponente des Magnetfeldes.

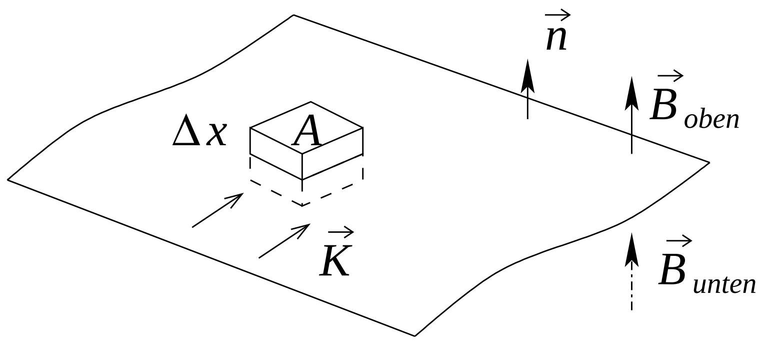

Abb. 4.5: Das Gaußsche Kästchen um eine Fläche A mit dem Strom $\vec{K}$.

Wir wenden, wie in Abbildung 4.5 illustriert, die integrale Feldgleichung (4.5.1) auf ein Gaußsches Kästchen in einer Oberfläche mit dem Strom $\vec{K}$ an. Das Gaußsche Kästchen habe die Fläche a und die Seitenlänge Δx. Im Grenzfall $\Delta x \to 0$ folgt

$$\int_{\Delta V} d^3r \;\; \text{div}\, \vec{B} = \oint_{O(A)} d\vec{a} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = a\vec{n} \cdot [\vec{B}_{\perp,oben} - \vec{B}_{\perp,unten}] = 0 \;\; ,$$

also

$$\vec{B}_{\perp,oben} = \vec{B}_{\perp,unten} \;\; , \tag{4.6.1}$$

d.h. die Normalkomponente des Magnetfelds ist stetig.

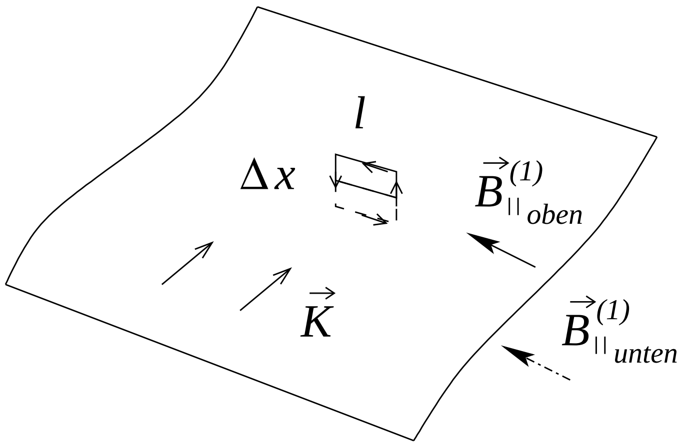

Abb. 4.6: Die Stokessche Fläche an einer Grenzfläche senkrecht zu einem Strom $\vec{K}$.

Um das Verhalten der Tangentialkomponente zu untersuchen, setzen wir die in Abbildung 4.6 gezeigte dünne Schleife mit der Länge l und Enden $\Delta x \to 0$ *senkrecht* zum Strom $\vec{K}$. Mit dem Ampere-Gesetz (4.5.2) folgt

$$\oint_{Schleife} \vec{B} \cdot d\vec{r} = [B^{(1)}_{\|,oben} - B^{(1)}_{\|,unten}]l = \frac{4\pi}{c} I_{eingeschlossen} = \frac{4\pi}{c} Kl \;\; , ,$$

oder

$$B^{(1)}_{\parallel,oben} - B^{(1)}_{\parallel,unten} = \frac{4\pi}{c} K \tag{4.6.2}$$

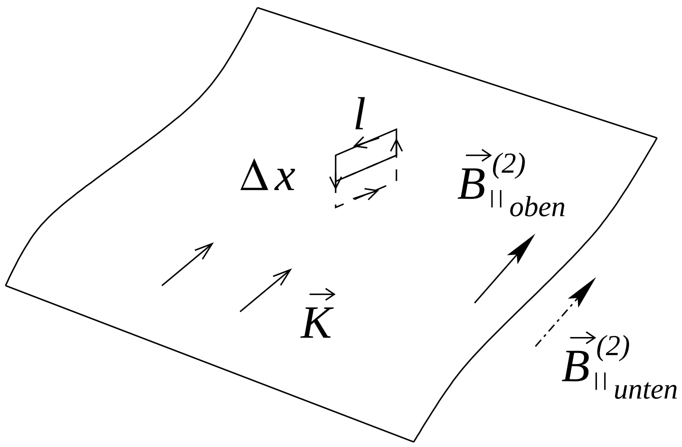

Abb. 4.7: Die Stokessche Fläche an einer Grenzfläche parallel zu einem Strom $\vec{K}$.

Setzen wir die dünne Schleife *parallel* zum Strom $\vec{K}$ (Abbildung 4.7), so folgt

$$\oint_{Schleife} \vec{B} \cdot d\vec{r} = [B^{(2)}_{\parallel,oben} - B^{(2)}_{\parallel,unten}] l = 0 \quad ,$$

oder

$$B^{(2)}_{\parallel,oben} = B^{(2)}_{\parallel,unten} \tag{4.6.3}$$

Die Beziehungen (4.6.1) – (4.6.3) können wir in einer Gleichung zusammenfassen zu

$$\vec{B}_{oben} - \vec{B}_{unten} = \frac{4\pi}{c} (\vec{K} \times \vec{n}) \quad , \tag{4.6.4}$$

wobei der Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$ senkrecht auf der Oberfläche steht und in den Abbildungen nach oben zeigt.
Das Vektorpotential $\vec{A}$ ist stetig an jeder Grenzfläche:

$$\vec{A}_{oben} = \vec{A}_{unten} \quad , \tag{4.6.5}$$

denn mit div $\vec{A} = 0$ folgt

$$\int_{\Delta V} d^3r \ \text{div}\ \vec{A} = 0 = \oint_{O(A)} d\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = a\vec{n} \cdot [\vec{A}_{oben} - \vec{A}_{unten}]$$

zum einen die Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{A}$. Zum anderen gilt wegen rot $\vec{A} = \vec{B}$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_F \ \text{rot}\ \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = \phi_m = 0$$

die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\vec{A}$ (der genaue Beweis erfolgt in Analogie zur Herleitung von Gleichungen (4.6.2) und (4.6.3), wobei die rechten Seiten der Gleichungen jetzt jeweils gleich Null sind).
Allerdings ist die Normalenableitung von $\vec{A}$ unstetig mit

$$\frac{\partial \vec{A}_{oben}}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_{unten}}{\partial n} = -\frac{4\pi}{c}\vec{K} \tag{4.6.6}$$

mit $\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$. (
Übungsaufgabe: A4.6.1) Beweisen Sie die Beziehungen (4.6.5) und (4.6.6).

4.7 Multipolentwicklung für das Vektorpotential

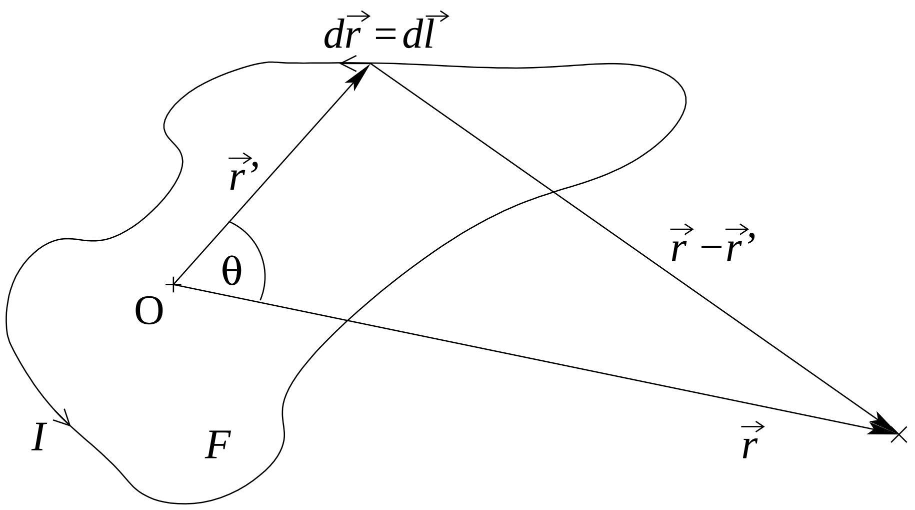

Abb. 4.8: Lokalisierte Stromverteilung mit Stromschwerpunkt $\vec{r_S} = 0$.

Wir untersuchen die in Abbildung 4.8 auf die Fläche F lokalisierte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ und berechnen approximativ das Vektorpotential im Punkt P für große Abstände. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der "Stromschwerpunkt"

$$\vec{r}_S \equiv \frac{\int d^3r\ \vec{r}|\vec{j}(\vec{r})|}{\int d^3r|\vec{j}(\vec{r})|}$$

im Ursprung liegt.
Nach Gleichung (4.4.3) gilt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Mit

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + (r')^2} = r\sqrt{1 - 2s\mu + s^2},$$

wobei $\mu = \cos\theta$, $s = r^{'}/r$ folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{rc}\int d^3r^{'}\frac{\vec{j}(\vec{r}^{'})}{\sqrt{1-2s\mu+s^2}} = \frac{1}{rc}\sum_{l=0}^{\infty}\int d^3r^{'}\ P_l(\mu)\vec{j}(\vec{r}^{'})(\frac{r^{'}}{r})^l,$$

oder

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{cr^{l+1}}\int d^3r^{'}\ P_l(\mu)\vec{j}(\vec{r}^{'})(r^{'})^l \quad , \tag{4.7.1}$$

wobei wir die Darstellung (3.9.5) der Legendre-Polynome $P_l(\mu)$ ausgenutzt haben.

4.7.1 Hilfssatz

Seien $f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ stetig differenzierbare skalare Felder. Dann gilt in der Magnetostatik für den Ausdruck

$$M = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\ [f(\vec{r})\vec{j}\cdot\vec{\nabla}g(\vec{r}) + g(\vec{r})\vec{j}\cdot\vec{\nabla}f(\vec{r})] = 0 \tag{4.7.2}$$

Zum Beweis benutzen wir Gleichung (2.4.2.3) mit der Kontinuitätsgleichung $\text{div}\ \vec{j} = 0$:

$$\text{div}\ (gf\vec{j}) = gf\ \text{div}\ \vec{j} + \vec{j}\cdot\ \text{grad}\ (fg) = \vec{j}\cdot\ \text{grad}\ (fg)$$

Mit Gleichung (2.4.2.1) folgt

$$\text{div}\ (gf\vec{j}) = f(\vec{j}\cdot\vec{\nabla}g) + g(\vec{j}\cdot\vec{\nabla}f)$$

Integrieren wir diese Gleichung über den ganzen Raum, so folgt mit dem Gauß-Theorem

$$M = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\ [f\vec{j}\cdot\vec{\nabla}g + g\vec{j}\cdot\vec{\nabla}f] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\ \ \text{div}\ (gf\vec{j}) = \oint_{O(\mathbb{R}^3)} d\vec{f}\cdot(gf\vec{j}) = 0,$$

weil die Stromdichte $\vec{j}$ im Unendlichen verschwindet. Q.E.D.
Speziell für $f = 1$, $g = x, y, z$ folgt aus dem Hilfssatz (4.7.2)

$$\int d^3r\vec{j}\cdot\vec{e}_{x,y,z} = 0 \quad \text{oder kurz} \quad \int d^3r\vec{j} = 0 \tag{4.7.3}$$

4.7.2 Magnetisches Dipolmoment

Für die ersten beiden Terme der Multipolentwicklung (4.7.1) erhalten wir mit $P_0 = 1$ und $P_1 = \mu$

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{1}{cr}[\int d^3r^{'}\ \vec{j}(\vec{r}^{'}) + \frac{1}{r}\int d^3r^{'}\ \vec{j}(\vec{r}^{'})\mu r^{'}]$$

Gemäß Gleichung (4.7.3) verschwindet der erste Term und das Vektorpotential wird für große Abstände $r >> r^{'}$ durch den Dipolanteil bestimmt:

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^2}\int d^3r' \; \vec{j}(\vec{r}')\mu r'$$

Mit $\mu r' = \vec{r}\cdot\vec{r}'/r$ folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^3}\int d^3r' \; \vec{r}\cdot\vec{r}'\vec{j}(\vec{r}') \tag{4.7.4}$$

Wir verwenden nochmals die Hilfsformel (4.7.2) für $f = x_i$, $g = x_k$ mit $x_i, x_k \in (x, y, z)$. Es ergibt sich

$$0 = \int d^3r[x_i j_k + x_k j_i] \quad ,$$

oder

$$\int d^3\, r x_i j_k = -\int d^3r \; x_k j_i \tag{4.7.5}$$

Für einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\int d^3r' \; \vec{r}' j_i(\vec{r}') &= \sum_k a_k \int d^3r' \; x'_k j_i = \frac{1}{2}\sum_k a_k \int d^3r' \; [x'_k j_i + x'_k j_i] \\ &= \frac{1}{2}\sum_k a_k \int d^3r' \; [x'_k j_i - x'_i j_k] \quad ,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung (4.7.5) verwandt haben. Wir erhalten also

$$\vec{a}\cdot\int d^3r' \; \vec{r}' j_i(\vec{r}') = -\frac{1}{2}\sum_k a_k \int d^3r' \; [x'_i j_k - x'_k j_i] = -\frac{1}{2}\sum_k\sum_n \epsilon_{ikn} a_k \int d^3r' \; (\vec{r}' \times \vec{j})_n \quad ,$$

oder

$$\int d^3r' \; (\vec{a}\cdot\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2}[\vec{a}\times\int d^3r' \; (\vec{r}' \times \vec{j})] \tag{4.7.6}$$

Mit $\vec{a} = \vec{r}$ gilt für Gleichung (4.7.6)

$$\int d^3r' \; (\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2}[\vec{r}\times\int d^3r' \; (\vec{r}' \times \vec{j})]$$

Verwenden wir dieses Ergebnis in Gleichung (4.7.4), so erhalten wir für den Dipolanteil des Vektorpotentials

$$\vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = -\frac{1}{2cr^3}\vec{r}\times\int d^3r' \; (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))$$

Wir definieren das *magnetische Moment* als

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2c}\int d^3r' \; (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \tag{4.7.7}$$

und erhalten damit

$$\vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.7.8}$$

Im Vergleich zum entsprechenden Dipolanteil des elektrostatischen Potentials (3.9.31) sehen wir, daß neben dem Kreuzprodukt jetzt das magnetische Moment $\vec{m}$ die Rolle des elektrostatischen Diplomonents (3.9.32) einnimmt.
Aus dem Potential (4.7.8) können wir durch rot $\vec{A}_{dipol}$ den Dipolanteil des Magnetfelds berechnen. Dazu verwenden wir die Identitäten (2.4.2.5) und (2.4.2.6)

$$\text{rot } (\vec{a}f) = f \text{ rot } \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla} f, \quad \text{rot } (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a}$$

Aus Gleichung (4.7.8) folgt

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}_{dipol} &= \frac{1}{r^3} \text{ rot } (\vec{m} \times \vec{r}) - (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^5} (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \text{ rot } (\vec{m} \times \vec{r}) \\ &= \frac{3}{r^5} (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} [(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{m} - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} + \vec{m} \text{ div } \vec{r} - \vec{r} \text{ div } \vec{m}] \end{aligned} \tag{4.7.9}$$

Speziell für *konstantes* magnetisches Moment $\vec{m} = const$ gilt div $\vec{m} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{m} = 0$, sodaß sich Gleichung (4.7.9) enorm vereinfacht. Mit der Regel für das dreifache Kreuzprodukt im ersten Term ergibt sich

$$\text{rot } \vec{A}_{dipol} = \frac{3}{r^5} [\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{m}] - \frac{1}{r^3} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} + \frac{1}{r^3} \vec{m} \text{ div } \vec{r}$$

Mit $(\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{m}$ und div $\vec{r} = 3$ folgt

$$\text{rot } \vec{A}_{dipol} = \frac{3}{r^5} [\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{m}] - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{m}}{r^3} = -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5} \vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}),$$

also

$$\vec{B}_{dipol} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \tag{4.7.10}$$

Von der Form her hat Gleichung (4.7.10) dieselbe Form wie der Dipolanteil des elektrisches Felds (3.9.40), wobei das konstante magnetische Moment $\vec{m}$ die Rolle des elektrostatischen Dipolmoments $\vec{p}$ einnimmt.
Für zwei Beispiele berechnen wir das magnetische Moment (4.7.7).

4.7.3 Magnetisches Moment eines geschlossenen, ebenen Stromkreises

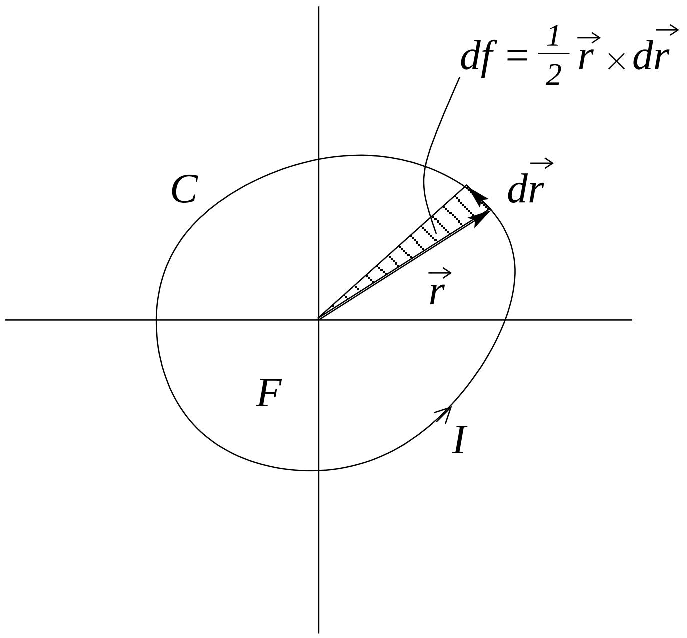

Abb. 4.9: Ein Stromkreis als geschlossener ebener Stromfaden.

Wir fassen den in Abbildung 4.9 gezeigten Stromkreis als Stromfaden mit $\vec{j}d^3r = Id\vec{r}$ auf. Aus Gleichung (4.7.7) folgt dann

$$\vec{m} = \frac{I}{2c}\int_C (\vec{r} \times d\vec{r})$$

Wie aus der Abbildung ersichtlich, ist $d\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$ gerade ein Flächenelement in der Ebene des Stromkreises, und wir erhalten

$$\vec{m} = \frac{I}{c}\int_C d\vec{f} = \frac{I}{c}\vec{F} \tag{4.7.11}$$

Mit der Rechte-Hand-Regel folgt, daß $\vec{m}$ senkrecht auf der Leiterebene steht.

4.7.4 Magnetisches Moment eines Systems von Punktladungen

Die Stromdichte $\vec{j}$ sei hervorgerufen durch N Teilchen mit identischer Ladung q und Masse M, sodaß

$$\vec{j}(\vec{r}) = q\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i\delta(\vec{r} - \vec{R}_i)$$

Für das magnetische Moment (4.7.7) folgt dann

$$\vec{m} = \frac{q}{2c}\sum_{i=1}^{N}\int d^3r(\vec{r} \times \vec{v}_i)\delta(\vec{r} - \vec{R}_i) = \frac{q}{2c}\sum_{i=1}^{N}(\vec{R}_i \times \vec{v}_i)$$

Führen wir den Bahndrehimpuls des i-ten Teilchens $\vec{l}_i = \vec{R}_i \times \vec{p}_i = M(\vec{R}_i \times \vec{v}_i)$ ein, so folgt

$$\vec{m} = \frac{q}{2Mc} \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \frac{q\vec{L}}{2Mc} \quad , \tag{4.7.12}$$

wobei $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i$ der Gesamtdrehimpuls des Systems ist. Für das *gyromagnetische Verhältnis* erhalten wir dann

$$\frac{|\vec{m}|}{|\vec{L}|} = \frac{q}{2Mc} \quad , \tag{4.7.13}$$

das auch im atomaren Bereich bei Bahnbewegungen gültig ist.

4.8 Beispiel: Magnetfeld durch Gleichstrom im Koaxialkabel

Durch einen zylindrischen, unendlich langen Draht mit kreisförmigen Querschnitt (Radius a) als Innenleiter fließe ein Gleichstrom. Dazu gebe es einen koaxialen zylindrischen Rückleiter mit dem Querschnitt eines Kreisrings vom inneren Radus b und äußeren Radius D (siehe Abbildung 4.10). Die Richtung der Achse sei $\vec{e}_z$.

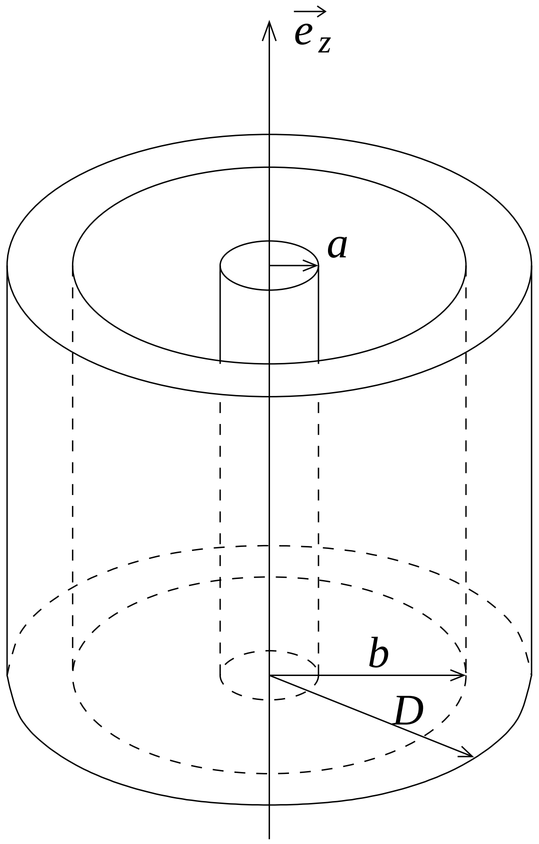

Abb. 4.10: Schematischer Aufbau eines koaxialen Leiters.

Im Innenleiter fließt also der konstante Strom mit der Stromdichte $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ mit $j_0 = const.$.

Für den Gesamtstrom im Innenleiter ($0 \leq r \leq a$) gilt dann

$$\vec{I} = \pi a^2 \vec{j} = \pi a^2 j_0 \vec{e}_z \tag{4.8.1}$$

Der Rückleiter ($b \leq r \leq D$) wird dann in negativer $\vec{e}_z$-Richtung vom Strom $-\vec{I}$ durchflossen:

$$-\vec{I} = \pi(D^2 - b^2)\vec{j}_- = -\pi(D^2 - b^2) j_- \vec{e}_z \tag{4.8.2}$$

Im Hohlraum ($a < r < b$) und im Außenraum ($r > D$) ist kein Strom vorhanden, also verschwindet dort die Stromdichte

$$\vec{j} = 0, \ \ a < r < b \ , r > D \tag{4.8.3}$$

Das Magnetfeld im Außenraum $r > D$ verschwindet; das entsprechende konstante Vektorpotential wird gleich Null gesetzt. Wegen der unendlichen Ausdehnung in z-Richtung hängt das Vektorpotential für $r \leq D$ nur vom Radius r ab, d.h. $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(r)$. Wir unterscheiden zwischen den drei Raumbereichen:
Innenleiter: $0 \leq r \leq a$
Hohlraum: $a < r < b$
Rückleiter: $b \leq r \leq D$
In jedem Bereich gilt $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ oder $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ und das Ampere-Gesetz $\operatorname{rot} \vec{B} = 4\pi \vec{j}/c$, oder kombiniert die Potentialgleichung

$$\Delta \vec{A}(r) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{4.8.4}$$

Im Innenleiter: Mit Gleichung (4.8.1) folgt für die drei Komponenten des Vektorpotentials nach Gleichung (4.8.4)

$$\Delta A_z^{(i)}(r) = -\frac{4\pi}{c} j_0, \quad \Delta A_x^{(i)}(r) = 0, \quad \Delta A_y^{(i)}(r) = 0$$

Wir wählen speziell $A_x^{(i)} = A_y^{(i)} = 0$, sodaß nur $A_z^{(i)} \neq 0$ ist.
Im Hohlraum: Mit Gleichung (4.8.3) folgt für die drei Komponenten des Vektorpotentials nach Gleichung (4.8.4)

$$\Delta A_z^{(h)}(r) = \Delta A_x^{(h)}(r) = \Delta A_x^{(h)}(r) = 0$$

Auch hier wählen wir speziell $A_x^{(h)} = A_y^{(h)} = 0$.
Im Rückleiter: Mit Gleichung (4.8.2) folgt für die drei Komponenten des Vektorpotentials nach Gleichung (4.8.4)

$$\Delta A_z^{(R)}(r) = -\frac{4\pi}{c} j_-, \quad \Delta A_x^{(R)}(r) = \Delta A_y^{(R)}(r) = 0$$

Auch hier wählen wir speziell $A_x^{(R)} = A_y^{(R)} = 0$.

Mit dem Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten folgen als nichttriviale Gleichungen:

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})A_z^{(i)}(r) = -\frac{4\pi}{c}j_0 \quad , \tag{4.8.5}$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})A_z^{(h)}(r) = 0 \tag{4.8.6}$$

und

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})A_z^{(R)}(r) = \frac{4\pi}{c}j_- \tag{4.8.7}$$

Die Lösung im Innenleiter von Gleichung (4.8.5) ist mit den Integrationskonstanten a_i und b_i

$$A_z^{(i)}(r) = a_i \ln r + b_i - \frac{\pi j_0}{c}r^2 \quad , \tag{4.8.8}$$

denn mit

$$\frac{\partial A_z^{(i)}(r)}{\partial r} = \frac{a_i}{r} - \frac{2\pi j_0}{c}r$$

folgen

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}A_z^{(i)}(r) = \frac{a_i}{r^2} - \frac{2\pi j_0}{c}$$

und

$$\frac{\partial^2 A_z^{(i)}(r)}{\partial r^2} = -\frac{a_i}{r^2} - \frac{2\pi j_0}{c} \quad ,$$

sodaß die linke Seite von (4.8.5) zu

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})A_z^{(i)}(r) = -\frac{a_i}{r^2} - \frac{2\pi j_0}{c} + \frac{a_i}{r^2} - \frac{2\pi j_0}{c} = -\frac{4\pi j_0}{c}$$

wird.

Für die Lösungen von Gleichungen (4.8.6) und (4.8.7) setzen wir an

$$A_z^{(h)}(r) = a_h \ln r + b_h \tag{4.8.9}$$

und

$$A_z^{(R)}(r) = a_R \ln r + b_R + \frac{\pi j_-}{c}r^2 \tag{4.8.10}$$

Die Integrationskonstanten a_i, a_h, a_R, b_i, b_h und b_R müssen mithilfe der Randbedingungen bestimmt werden. Aus der Forderung der Endlichkeit von $A_z^{(i)}(r)$ für $r \to 0$ folgt sofort $a_i = 0$, sodaß sich Gleichung (4.8.8) auf

$$A_z^{(i)}(r) = b_i - \frac{\pi j_0}{c} r^2 \tag{4.8.11}$$

reduziert.

Aus den Potentialen (4.8.9) – (4.8.11) berechnen wir die entsprechenden Magnetfelder gemäß

$$\vec{B} = \text{ rot } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\vec{e}_y \tag{4.8.12}$$

Mit den Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten gilt (Gleichungen (2.2.3.6))

$$\vec{e}_x = \cos\phi\vec{e}_r - \sin\phi\vec{e}_\phi, \quad \vec{e}_y = \sin\phi\vec{e}_r + \cos\phi\vec{e}_\phi \quad ,$$

sodaß wir für Gleichung (4.8.12) erhalten

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\partial A_z}{\partial y}(\cos\phi\vec{e}_r - \sin\phi\vec{e}_\phi) - \frac{\partial A_z}{\partial x}(\sin\phi\vec{e}_r + \cos\phi\vec{e}_\phi) \\ &= (\frac{\partial A_z}{\partial y}\cos\phi - \frac{\partial A_z}{\partial x}\sin\phi)\vec{e}_r - (\frac{\partial A_z}{\partial y}\sin\phi + \frac{\partial A_z}{\partial x}\cos\phi)\vec{e}_\phi \end{aligned} \tag{4.8.13}$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

und der Tatsache, daß alle Potentiale $A_z(r)$ nur von r abhängig sind, sodaß

$$\frac{\partial A_z(r)}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}, \quad \frac{\partial A_z(r)}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial A_z(r)}{\partial r},$$

folgt für Gleichung (4.8.13)

$$\vec{B} = \frac{\partial A_z(r)}{\partial r}(\cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi)\vec{e}_r - \frac{\partial A_z(r)}{\partial r}(\sin^2\phi + \cos^2\phi)\vec{e}_\phi = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\vec{e}_\phi \quad , \tag{4.8.14}$$

d.h. das Magnetfeld ist überall tangential ausgerichtet, insbesondere an den Leiteroberflächen. Mit den Potentialen (4.8.9) – (4.8.11) ergibt sich

$$\vec{B}^{(i)} = \frac{2\pi j_0}{c} r\vec{e}_\phi \quad ,$$

$$\vec{B}^{(h)} = -\frac{a_h}{r}\vec{e}_\phi$$

und

$$\vec{B}^{(R)} = -[\frac{a_R}{r} + \frac{2\pi j_-}{c} r]\vec{e}_\phi$$

Gemäß Beziehung (4.6.4) sind die Tangentialkomponenten der Magnetfelder an den Grenzflächen stetig, da kein Oberflächenstrom fließt: es gelten also die Randbedingungen

(1)

$$B_\phi^{(i)}|_{r=a} = B_\phi^{(h)}|_{r=a} \quad ,$$

sodaß

$$\frac{2\pi j_0}{c} a = -\frac{a_h}{a}$$

oder

$$a_h = -\frac{2\pi j_0}{c} a^2$$

(2)

$$B_\phi^{(h)}|_{r=b} = B_\phi^{(R)}|_{r=b} \quad ,$$

sodaß

$$-\frac{a_h}{b} = \frac{2\pi j_0 a^2}{cb} = -[\frac{a_R}{b} + \frac{2\pi j_-}{c} b]$$

oder

$$a_R = -\frac{2\pi j_0 a^2}{c} - \frac{2\pi j_- b^2}{c} = -\frac{2\pi}{c}[j_- b^2 + j_0 a^2]$$

Damit erhalten wir für die Magnetfelder

$$\vec{B}^{(i)} = \frac{2\pi j_0}{c} r \vec{e}_\phi \quad ,$$

$$\vec{B}^{(h)} = \frac{2\pi j_0}{c} \frac{a^2}{r} \vec{e}_\phi$$

und

$$\vec{B}^{(R)} = \frac{2\pi}{c}[\frac{j_- b^2 + j_0 a^2}{r} - j_- r]\vec{e}_\phi$$

(3) Da das Magnetfeld im Außenraum verschwindet, gilt

$$B_\phi^{(R)}|_{r=D} = 0 \quad ,$$

sodaß

$$\frac{j_- b^2 + j_0 a^2}{D} = j_- D$$

oder mit Beziehung (4.8.1)

$$j_- = \frac{j_0 a^2}{D^2 - b^2} = \frac{I}{\pi(D^2 - b^2)}$$

Der Rückstrom stellt sich also gemäß dieser Randbedingung ein. Für die Magnetfeldkomponenten folgt mit $I = \pi j_0 a^2$ letztendlich

$$\vec{B}^{(i)}(r) = \frac{2I}{a^2 c} r \vec{e}_\phi \quad , \tag{4.8.15}$$

$$\vec{B}^{(h)}(r) = \frac{2I}{cr} \vec{e}_\phi \quad , \tag{4.8.16}$$

$$\vec{B}^{(R)}(r) = \frac{2I}{cr} \frac{D^2 - r^2}{D^2 - b^2} \vec{e}_\phi \tag{4.8.17}$$

und $\vec{B}(r \geq D) = 0$. Der radiale Verlauf dieser Tangentialkomponenten ist in Abbildung 4.11 skizziert.

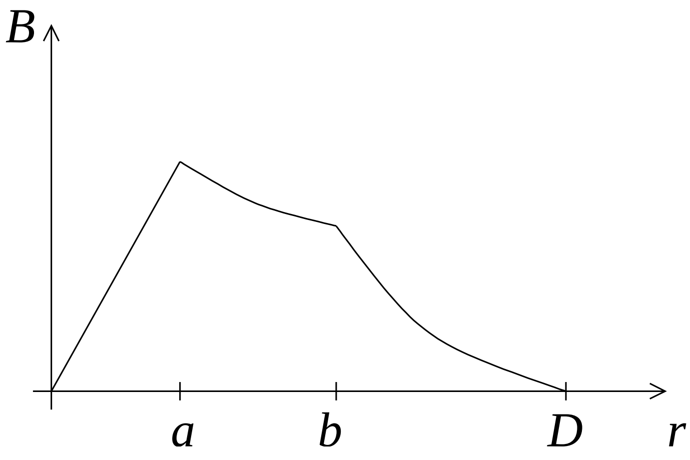

Abb. 4.11: Verlauf der Tangentialkomponenten des Magnetfeldes im Koaxialkabel.