3. Elektrostatik

Wir beginnen mit Feldern, die von stationären, ruhenden geladenen (mit positiver ($q > 0$) und negativer ($q < 0$) Ladung) Massenpunkten im Vakuum herrühren.

3.1 Coulomb-Gesetz

1. experimentelles Fundamentalgesetz (Coulomb-Gesetz): Zwei ruhende geladene Massenpunkte an den Stellen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ mit den Ladungen q_1 und q_2 üben im Vakuum die Kraft

$$\vec{K}_1 = kq_1q_2\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{3.1.1}$$

aufeinander aus. k ist dabei eine Proportionalitätskonstante, deren Wert von der Festlegung der Einheit der Ladungen q_1 und q_2 abhängt.
Wir folgern aus dem Coulomb-Gesetz:
(a) Die Coulomb-Kraft (3.1.1) ist eine Zentralkraft, d.h. sie wirkt in Richtung der Verbindungslinie zweier Ladungen.
(b) Es gilt Actio=Reactio, d.h. die Kraft auf die erste Ladung durch die zweite Ladung und die Kraft auf die zweite Ladung durch die erste Ladung sind entgegengesetzt gleich groß: $\vec{K}_2 = -\vec{K}_1$.
(c) Die Coulombkraft ist proportional zum Produkt q_1q_2. Da die Ladungen positiv oder negativ sind, stoßen sich gleichnamige Ladungen ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.
(d) Für die Coulombkräfte gilt das Superpositionsprinzip. Die resultierende Kraft auf eine Ladung Q am Ort $\vec{r}$ ergibt sich aus der Summe der Coulombkräfte zwischen dieser Ladung und allen anderen Ladungen q_n:

$$\vec{K}_n = kQ\sum_n q_n\frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} \tag{3.1.2}$$

Definition der elektrostatische Ladungseinheit im CGS-System: Zwei elektrostatische Ladungseinheiten (Le) üben im Abstand von 1 cm aufeinander die Kraft von 1 dyn= 1 g cm s^{-2} aus. Dimensionsmäßig besagt das Coulombgesetz dann dyn =(Le)^2 cm^{-2} oder

$$1 \text{ Le} = 1 \text{ cm dyn}^{1/2} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1} \tag{3.1.3}$$

Damit wird die Proportionalitätskonstante $k = 1$ im Coulombgesetz (3.1.1):

$$\vec{K}_1 = q_1q_2\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{3.1.4}$$

Als *1. Deutung* des Coulombgesetzes besagt die *Fernwirkungstheorie*: Teilchen 2 wirkt gemäß Gleichung (3.1.4) direkt auf Teilchen 1 ohne Mitwirkung des dazwischenliegenden Raums (momentane Ausbreitung der Wirkung).

3.2 Elektrische Feldstärke

Wir gehen von der Kraft $\vec{K}$ aus, die eine Ladung q_1 auf eine möglichst kleine Probeladung q ausübt:

$$\vec{K} = qq_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \tag{3.2.1}$$

Als die von q_1 am Ort $\vec{r}$ der Ladung q hervorgerufene elektrische Feldstärke definieren wir den Quotienten

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{K}}{q} \tag{3.2.2}$$

Da i.a. die Punktladung q das elektrische Feld verändert, gehen wir zum Grenzfall einer verschwindend kleinen Ladung über:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \vec{K}}{\Delta q} = \frac{d\vec{K}}{dq} \tag{3.2.3}$$

Dies führt auf die *2. Deutung* des Coulombgesetzes (*Feldwirkung*): Das geladene Teilchen 1 verändert den Zustand des leeren Raums in seiner Umgebung durch Aufbau des elektrischen Felds $\vec{E}$; dieses wirkt auf das andere geladene Teilchen.
Mit dem Coulombgesetz (3.2.1) folgt für das Feld einer Punktladung q_1:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \tag{3.2.4}$$

Wie in Abbildung 3.1 skizziert, ist dieses für $q_1 > 0$ radial nach außen gerichtet und für $q_1 < 0$ radial nach innen gerichtet.

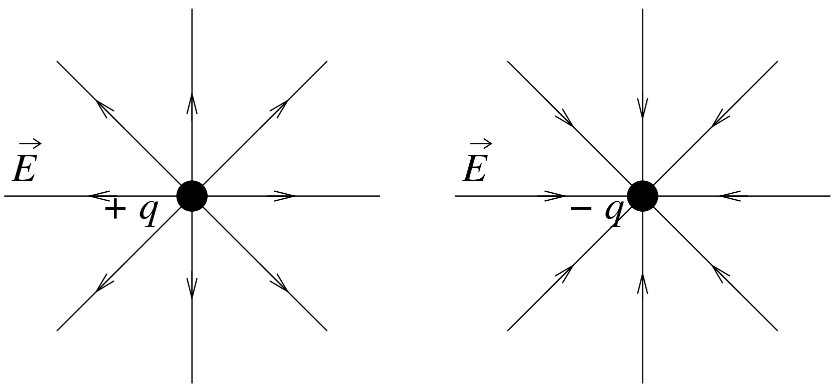

Abb. 3.1: Die elektrischen Felder einer positiven und einer negativen Punktladung.

Für eine Summe von Punktladungen folgt nach Gleichung (3.1.2)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_n \frac{q_n(\vec{r} - \vec{r}_n)}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} = \sum_n \vec{E}_n(\vec{r}) \tag{3.2.5}$$

Für eine *kontinuierliche Ladungsverteilung* müssen wir von der Summation über Punktladungen zur Integration über die räumliche Ladungsverteilung übergehen. Setzen wir an Stelle der Punktladung q_i das Ladungselement $\rho(\vec{r}^{\,\prime})dV^{\prime}$, wobei ρ die Ladungsdichte und $dV^{\prime} = d^3r^{\prime}$ das Volumenelement sind, so folgt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dV^{\prime}\,\rho(\vec{r}^{\,\prime})\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|^3} \tag{3.2.6}$$

Die Gesamtkraft auf eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ist dann

$$\vec{K} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\;\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \tag{3.2.7}$$

und die Gesamtladung Q ist

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\;\rho(\vec{r}) \tag{3.2.8}$$

Die Einheit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ ist $[\vec{E}] = [\vec{K}]/[q]$ = dyn/Le=dyn$^{1/2}$ cm^{-1} im CGS-System.
Mit der δ-Funktion (wir schreiben kurz $\delta(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$) erhalten wir aus der Beziehung (3.2.6) wieder Gleichung (3.2.5), denn Einsetzen von

$$\rho(\vec{r}^{\,\prime}) = \sum_{n=1}^{N} q_n\delta(\vec{r}^{\,\prime}-\vec{r}_n)$$

liefert sofort

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N}\int d^3r^{\prime} q_n\delta(\vec{r}^{\,\prime}-\vec{r}_n)\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|^3} = \sum_{n=1}^{N}\frac{q_n\vec{r}-\vec{r}_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3} = \sum_n \vec{E}_n(\vec{r})$$

3.3 Differentielle Feldgleichungen

Mit Beziehung (2.7.26),

$$\text{grad}_{\,r}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|} = \vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{r-r^{\prime}}\right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|^3}\quad ,$$

folgt für Gleichung (3.2.6)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r^{\prime}\rho(\vec{r}^{\,\prime})\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|^3} = -\;\text{grad}\int d^3r^{\prime}\,\frac{\rho(\vec{r}^{\,\prime})}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|} = -\;\text{grad}\;\Phi(\vec{r}) \tag{3.3.1}$$

mit dem "skalaren Potential" oder "elektrostatischen Potential"

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r^{\prime}\,\frac{\rho(\vec{r}^{\,\prime})}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|} + \;const. = \int d^3r^{\prime}\,\frac{\rho(\vec{r}^{\,\prime})}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|}\quad , \tag{3.3.2}$$

da die Konstante ohne Bedeutung für die Berechnung des $\vec{E}$-Feldes ist.
Das elektrische Feld kann nach dem Helmholtz-Satz aus der Festlegung seiner Quellen (div $\vec{E}$) und Wirbel (rot $\vec{E}$) berechnet werden. Die Anwendung von Gleichung (2.7.28),

$$\vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{r-r'} = \Delta_r \frac{1}{r-r'} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'),$$

auf Gleichung (3.3.2) ergibt

$$\Delta_r \Phi(\vec{r}) = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi \int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}') = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{3.3.3}$$

Damit ist dann nach Gleichung (3.3.1)

$$\text{div } \vec{E} = -\text{ div } \text{ grad } \Phi = -\vec{\nabla}^2\Phi = -\Delta\Phi = 4\pi\rho$$

und

$$\text{rot } \vec{E} = -\text{ rot } \text{ grad } \Phi = 0$$

und wir erhalten die *differentiellen Feldgleichungen der Elektrostatik*

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \tag{3.3.4}$$

und

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{3.3.5}$$

Gemäß Gleichungen (3.3.3) und (3.3.1) können wir diese Grundgleichungen alternativ auch für das skalare Potential formulieren:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{3.3.6}$$

und

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{ grad } \Phi(\vec{r}) \tag{3.3.7}$$

Gleichung (3.3.6) wird als *Poisson-Gleichung* bezeichnet.
Im Spezialfall $\rho(\vec{r}) = 0$ reduziert sich die Poisson-Gleichung zur *Laplace-Gleichung*

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 0 \tag{3.3.8}$$

Die Formulierungen (3.3.6) und (3.3.8) für das skalare Potential $\Phi(\vec{r})$ haben den Vorteil, daß man nur eine Funktion $\Phi(\vec{r})$ statt der drei Komponenten der Vektorfunktion $\vec{E}(\vec{r})$ benötigt.
Das *Grundproblem der Elektrostatik* besteht darin, aus der gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ das Potential $\Phi(\vec{r})$ oder die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ aus den formalen Lösungen (3.3.2) oder (3.2.6) zu berechnen.

3.3.1 Feldlinien

Unter Äquipotentiallinien oder Äquipotentialflächen versteht man den geometrischen Ort aller Punkte mit dem gleichen Wert des Potentials $\phi(\vec{r})$:

$$\text{Äquipotentialfläche } \Phi(\vec{r}) = const. \tag{3.3.9}$$

Die Flächennormalen zeigen in Richtung von $\operatorname{grad}\Phi = -\vec{E}$ und werden als *Feldlinien* bezeichnet.

So folgt z. B. für eine Summe von Punktladungen $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ aus Gleichung (3.3.2)

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Für zwei Ladungen $(N = 2)$ mit $q_1 = -q_2 = q$ ergibt sich für die Äquipotentiallinien dann

$$\Phi(r) = \frac{q}{r - r_1} - \frac{q}{r - r_2} = const.$$

In Abbildung 3.2 sind für dieses Beispiel die Äquipotentiallinien und die Feldlinien skizziert.

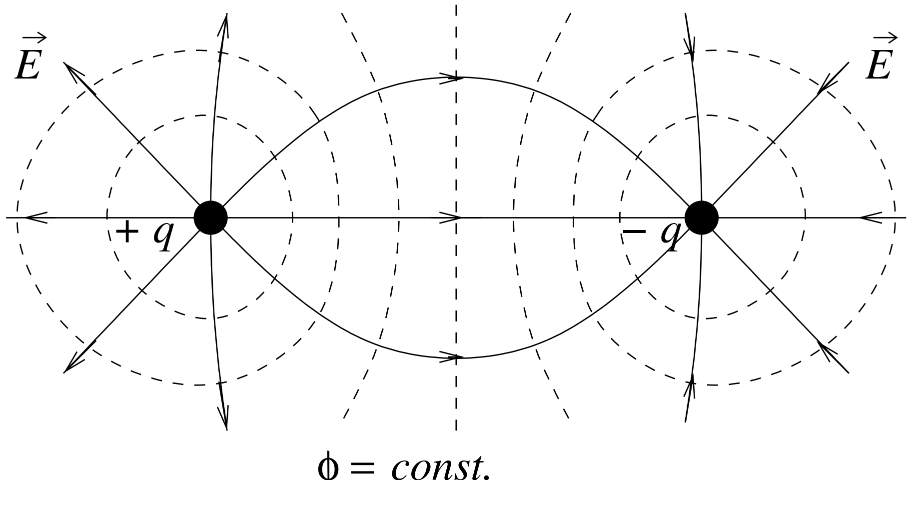

Abb. 3.2: Elektrisches Feld und Äquipotentioalflächen zwischen positiver und negativer Punktladung.

(Übungsaufgabe: Berechnung der Äquipotentiallinien und der Feldlinien für zwei gleichnamige Ladungen $q_1 = q_2 = q$.)

3.4 Integralform der Feldgleichungen

(Die Aussagen dieses Abschnitts lassen sich auch kurz mit dem in Kap. 2.9 formulierten Satz 1 für rotationsfreie Vektorfelder begründen.)

Die Anwendung des Gauß-Theorems auf die inhomogene differentielle Feldgleichung (3.3.4),

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \quad ,$$

ergibt für das Integral über das Volumen V mit der Oberfläche O

$$4\pi \int_V d^3r \ \rho(\vec{r}) = 4\pi Q_V = \int_V d^3r \ \text{ div } \vec{E}(\vec{r}) = \oint_O d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad ,$$

oder

$$\oint d\vec{F} \cdot \vec{E} = 4\pi Q_V \tag{3.4.1}$$

Das Oberflächenintegral über $\vec{E}$ ist gleich 4π mal der im Volumenelement eingeschlossenen Ladung Q_V. Gleichung (3.4.1) wird als *Gauss-Gesetz* bezeichnet.
Integriert man die homogene differentielle Feldgleichung (3.3.5),

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad ,$$

über eine Fläche F mit der Berandung C, so folgt nach dem Stokes-Theorem

$$0 = \int_F d\vec{f} \cdot [\text{ rot } \vec{E}(\vec{r})] = \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad ,$$

oder

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{3.4.2}$$

für die Integration über beliebig geschlossenen Wege. Insbesondere folgt, daß es in der Elektrostatik keine geschlossenen Feldlinien gibt.
In Abbildung 3.3 fassen wir die abgeleiteten integralen und differentiellen elektrostatischen Feldgleichungen zusammen, die den Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$, der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und dem elektrostatischen Potential $\Phi(\vec{r})$ vermitteln.

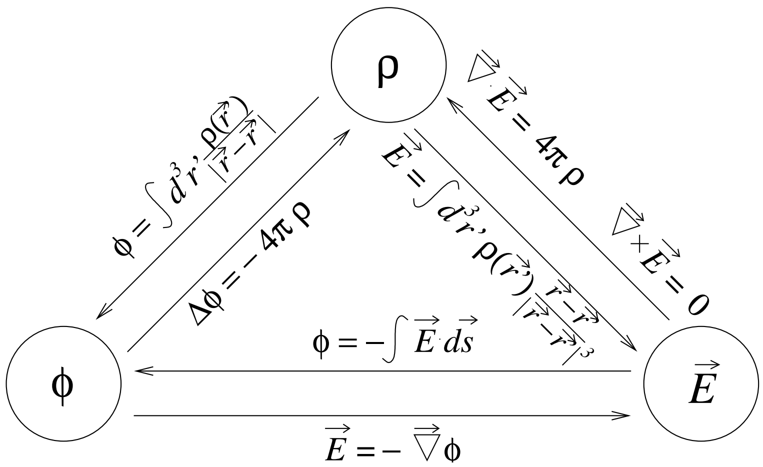

Abb. 3.3: Die elektrostatischen Feldgleichungen.

Um alle Zusammenhänge zu beweisen, betrachten wir die formale Ableitung der Beziehung

$$\Phi(P) = -\int_O^P d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \tag{3.4.3}$$

des Potentials $\Phi(P)$ am Punkt P, wobei O einen beliebigen Referenzpunkt kennzeichnet. Gemäß Gleichung (3.4.3) gilt dann für die Potentialdifferenz an zwei Punkten a und b:

$$\begin{aligned}\Phi(b) - \Phi(a) &= -\int_O^b d\vec{s} \cdot \vec{E} + \int_O^a d\vec{s} \cdot \vec{E} = -\int_O^b d\vec{s} \cdot \vec{E} - \int_a^0 d\vec{s} \cdot \vec{E} \\ &= -[\int_a^0 d\vec{s} \cdot \vec{E} + \int_O^b d\vec{s} \cdot \vec{E}] = -\int_a^b d\vec{s} \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

Nach Gleichung (2.6.2) gilt für den Gradienten

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{s},$$

sodaß

$$\int_a^b (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{s} = -\int_a^b d\vec{s} \cdot \vec{E}$$

für alle beliebigen Punkte a und b gilt. Dann folgt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi,$$

im Einklang mit Gleichung (3.3.1), d.h. die Beziehung (3.4.3) ist in der Tat die Integralform von Gleichung (3.3.1).

3.5 Anwendung des Gauß-Gesetzes

Bei geeigneter Symmetrie ist das integrale Gauß-Gesetz (3.4.1) die schnellste und leichteste Methode, um elektrische Feldstärken $\vec{E}$ zu berechnen.

3.5.1 Feld einer homogenen geladenen Kugel

Die Ladungsdichte einer homogenen geladenen Kugel ist

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \le a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases} \tag{3.5.1}$$

mit $\rho_0 = const.$ Wegen der Symmetrie verwenden wir Kugelkoordinaten r, θ, ϕ, und das Potential kann nur vom Abstand r abhängen.

Als *1. Lösungsverfahren* verwenden wir das Gauß-Gesetz. Wir werten Gleichung (3.4.1) aus für eine Kugeloberfläche $F = 4\pi r^2$ mit dem Radius r. Weil $d\vec{F} \parallel \vec{E}$ mit $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, gilt

$$\oint d\vec{F} \cdot \vec{E} = \int |\vec{E}| dF = |\vec{E}| \int dF = 4\pi r^2 E(r)$$

Gleichzeitig gilt mit der Ladungsdichte (3.5.1)

$$4\pi Q_V = 4\pi \int_0^r 4\pi (r')^2 dr' \rho(r') = \begin{cases} 16\pi^2 \rho_0 \int_0^r dr' (r')^2 = \frac{16\pi^2}{3}\rho_0 r^3 & \text{für } r \leq a \\ 16\pi^2 \rho_0 \int_0^a dr' (r')^2 = \frac{16\pi^2}{3}\rho_0 a^3 & \text{für } r > a \end{cases}$$

Mit der Gesamtladung der Kugel $Q = 4\pi\rho_0 a^3/3$ folgt

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 4\pi Q \frac{r^3}{a^3} & \text{für } r \leq a \\ 4\pi Q & \text{für } r > a \end{cases} ,$$

sodaß

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{a^3} & \text{für } r \leq a \\ \frac{Q}{r^2} & \text{für } r > a \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Man beachte: das Feld außerhalb der Kugel ist exakt das gleiche, als wenn die gesamte Ladung im Zentrum $r = 0$ konzentriert wäre.
Das dazugehörige Potential berechnen wir durch Integration von

$$\frac{d\Phi}{dr} = -E(r)$$

mit $\Phi(\infty) = 0$ zu

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{a}[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2}] & \text{für } r \leq a \\ \frac{Q}{r} & \text{für } r > a \end{cases} , \tag{3.5.3}$$

wobei wir die Steigkeit des Potentials an der Stelle $r = a$ ausnutzen.
Das *2. Lösungsverfahren* beruht auf der Poisson-Gleichung (3.3.6), wobei wir nach (2.5.6.6) den Radialanteil des Lapace-Operators in Kugelkoordinaten verwenden:

$$\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi}{dr}) = -4\pi\rho(r) \tag{3.5.4}$$

Für $r > a$ folgt mit der Ladungsverteilung (3.5.1):

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi}{dr}) = 0$$

oder

$$r^2\frac{d\Phi}{dr} = C_1$$

und daraus

$$\Phi = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2. Mit $\Phi(\infty) = 0$ folgt $C_2 = 0$, sodaß

$$\Phi(r > a) = -\frac{C_1}{r}$$

Für $r \leq a$ gilt

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi}{dr}) = -4\pi\rho_0 r^2 \quad ,$$

sodaß

$$r^2\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 + C_3$$

oder

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{C_3}{r^2} - \frac{4\pi}{3}\rho_0 r$$

Nach Integration erhalten wir

$$\Phi(r \leq a) = C_4 - \frac{C_3}{r} - \frac{2\pi}{3}\rho_0 r^2$$

Der Term $-\frac{C_3}{r}$ entspricht wegen $\Delta(\frac{C_3}{r}) = -4\pi C_3\delta^3(\vec{r})$ einer Punktladung bei $\vec{r} = 0$, die es nicht gibt, sodaß wir $C_3 = 0$ setzen. Für das Potential erhalten wir dann

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{C_1}{r} & \text{für } r > a \\ C_4 - \frac{Qr^2}{2a^3} & \text{für } r \leq a \end{cases} \tag{3.5.5}$$

Die rechte Seite der Poisson-Gleichung (3.5.4) hat einen Sprung bei $r = a$, also hat auch auch die linke Seite $\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi}{dr})$ einen Sprung. Daraus folgt, daß $r^2\frac{d\Phi}{dr}$ einen Knick hat bei $r = a$; daher sind Φ und $\frac{d\Phi}{dr}$ stetig bei $r = a$ (zur Begründung siehe Kap. 3.5.2). Die Stetigkeit von Φ liefert

$$\frac{-C_1}{a} = C_4 - \frac{Q}{2a} \quad ;$$

die Stetigkeit von $\frac{d\Phi}{dr}$ liefert

$$\frac{C_1}{a^2} = -\frac{Q}{a^2}$$

oder
$C_1 = -Q$ und $C_4 = \frac{3Q}{2a}$. Eingesetzt in Gleichung (3.5.5) folgt dann

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{a}[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2}] & \text{für } r \leq a \\ \frac{Q}{r} & \text{für } r > a \end{cases}$$

das gleiche Ergebnis wie Gleichung (3.5.3). Zur Bestimmung dieser Lösung brauchten wir vier Konstanten aus vier Randbedingungen:
(a) $\Phi(0)$ endlich, d.h. keine Punktladung bei $r = 0$;
(b) $\Phi(r)$ stetig bei $r = a$;
(c) $\frac{d\Phi}{dr}$ stetig bei $r = a$;
(d) $\Phi(\infty) = 0$ als willkürlichen Referenzpunkt.

3.5.2 Feldverhalten an Grenzflächen

Das Verhalten des elektrostatischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ an Grenzflächen, die eine Flächenladung σ tragen, folgt aus den integralen Feldgleichungen. Dazu legen wir, wie in Abbildung 3.4

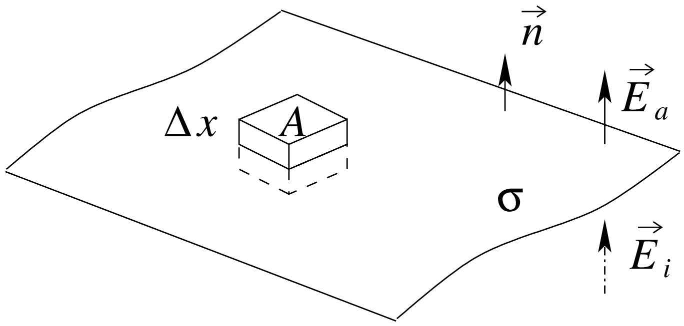

Abb. 3.4: Das Gaußsche Kästchen um eine Fläche A mit Oberflächenladung σ.

skizziert, um die Fläche ein sogenanntes *Gaußsches Kästchen* mit dem Volumen ΔV. Die Kästchenkante senkrecht zur Grenzfläche habe die Länge Δx, die wir in einem Grenzprozeß gegn Null gehen lassen. Nach dem Gauß-Theorem gilt dann

$$\int_{\Delta V} d^3r \ \ \text{div}\ \vec{E}(\vec{r}) = \oint_{S(\Delta V)} d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \to A\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \ \ , \tag{3.5.6}$$

denn das Oberflächenelement $d\vec{a}$ hat dann die Normalenrichtung $\vec{n}$ und die Fläche A. $\vec{E}_a$ und $\vec{E}_i$ bezeichnen die Normalkomponenten des elektrischen Feldes außerhalb (oben) und innerhalb (unten) der Grenzfläche.

Andererseits gilt nach dem Gauß-Gesetz (3.4.1)

$$\int_{\Delta V} d^3r \ \ \text{div}\ \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \int_{\Delta V} d^3r\ \rho(\vec{r}) = 4\pi\sigma A \tag{3.5.7}$$

Der Vergleich mit Gleichung (3.5.6) ergibt

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 4\pi\sigma \ \ , \tag{3.5.8}$$

d.h. die Normalkomponente des elektrischen Feldes verhält sich an der Grenzfläche unstetig wenn $\sigma \neq 0$ ist.

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes dagegen ist immer stetig. Dies folgt aus der Anwendung von Gleichung (3.4.2),

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0,$$

auf die in Abbildung 3.5 gezeigte dünne rechtwinklige Schleife, die durch die Grenzfläche

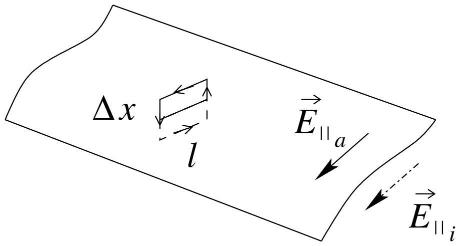

Abb. 3.4: Die Stokessche Fläche an einer Grenzfläche.

geht. Die Enden $\Delta x \to 0$ ergeben keinen Beitrag und die Seiten mit der Länge l ergeben

$$E_{\parallel,a} l - E_{\parallel,i} l = 0$$

oder

$$E_{\parallel,a} = E_{\parallel,i} \quad , \tag{3.5.9}$$

wobei $E_{\parallel} \perp \vec{n}$ die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche kennzeichnet.
Die Ergebnisse (3.5.8) und (3.5.9) können kombiniert werden zu

$$\vec{E}_a - \vec{E}_i = 4\pi\sigma\vec{n} \quad , \tag{3.5.10}$$

wobei $\vec{n}$ der Einheitsvektor senkrecht zur Grenzfläche ist.
Das elektrostatische Potential Φ ist stetig an jeder Grenzfläche, weil nach Gleichung (3.4.3)

$$\Phi_a - \Phi_i = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Für verschwindend kleine Weglänge $ds \to 0$ folgt dann

$$\Phi_a = \Phi_i \tag{3.5.11}$$

Aber der Gradient von Φ besitzt wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ die Unstetigkeit von $\vec{E}$. Mit Gleichung (3.5.10) gilt

$$\vec{\nabla}\Phi_a - \vec{\nabla}\Phi_i = -4\pi\sigma\vec{n} \quad ,$$

oder

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = -4\pi\sigma \tag{3.5.12}$$

wobei

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{n} \tag{3.5.13}$$

die "Normalen-Ableitung" von Φ ist (d.h. die Änderung von Φ in Richtung senkrecht zur Oberfläche).
Gleichung (3.5.12) begründet die in Kap. 3.5.1 angenommenen Stetigkeit von $\frac{d\Phi}{dr}$ bei der homogenen Kugel, da diese keine Flächenladung an der Grenzfläche aufweist.

3.6 Elektrostatische Feldenergie

Nach Gleichung (3.2.2) wird im elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$ auf die Punktladung q die Kraft $\vec{K}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$ ausgeübt. Um die Punktladung im Feld $\vec{E}$ von Punkt a nach Punkt b zu verschieben, muß die Arbeit W_{ab} mit der Gegenkraft $-\vec{K}$ geleistet werden:

$$W_{ab} = -\int_a^b \vec{K} \cdot d\vec{r} = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Unter Verwendung von Gleichung (3.4.3) erhalten wir unabhängig vom Weg

$$W_{ab} = q[\Phi(b) - \Phi(a)] = qU_{b,a} = -qU_{a,b} \quad , \tag{3.6.1}$$

wobei die Potentialdifferenz $U_{b,a} = \Phi(b) - \Phi(a)$ als *Spannung* bezeichnet wird. Die Arbeit ist dann $W_{ab} = -qU_{a,b}$. Umgekehrt kann man sagen: Die Potentialdifferenz zwischen den Punkten a und b ist gleich der Arbeit pro Einheitsladung, die man aufwenden muß, um das Ladungsteilchen von a nach b zu transportieren.

3.6.1 Energie einer Punktladungsverteilung

Wir berechnen die Arbeit, die nötig ist, um eine Ladung q_n im Feld der Punktladungen $q_1, ..., q_{n-1}$ an den Stellen $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_{n-1}$ von ∞ nach $\vec{r}_n$ zu bringen. Das Potential der $n-1$ Punktladungen lautet

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

Damit ergibt sich nach Gleichung (3.6.1) diese Arbeit zu

$$A_n = q_n[\Phi(\vec{r}_n) - \Phi(\infty)] = q_n\Phi(\vec{r}_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_n q_j}{|\vec{r}_n - \vec{r}_j|} \tag{3.6.2}$$

(3.6.2) ist die Arbeit, die notwendig ist, um die Ladung q_n von Unendlich zum Ort $\vec{r}_n$ zu bringen.
Stellen wir uns nun vor, daß wir nacheinander die Ladungen $n_1, n_2, n_3, ..., n_N$ von Unendlich nach $\vec{r}_n$ bringen. Die aufzuwendende Arbeit erhalten wir durch Summation von Beziehung (3.6.2) zu

$$A = \sum_{n=2}^{N} A_n(\vec{r}_n) = \sum_{n=2}^{N} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_n q_j}{|\vec{r}_n - \vec{r}_j|} \tag{3.6.3}$$

Der Transport der 1. Ladung braucht keine Arbeit, weil noch kein Feld vorhanden ist, gegen das die Arbeit geleistet werden muß.
Die Doppelsumme (3.6.3) werten wir so aus, daß wir jedes Paar doppelt zählen und daher durch 2 teilen müssen, d.h.

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n,j,n\neq j}^{N} \frac{q_n q_j}{|\vec{r}_n - \vec{r}_j|} \equiv W_e \tag{3.6.4}$$

Die aufzuwendende Arbeit ist gleich der potentiellen Energie W_e des Systems aus N Punktladungen.

3.6.2 Kontinuierliche Ladungsverteilungen

Für *kontinuierliche* Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r})$ benutzt man in Verallgemeinerung von Gleichung (3.6.4) die Definition

$$W_e \equiv \frac{1}{2} \int d^3r\ \rho(\vec{r}) \int d^3r'\ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{3.6.5}$$

Mit Gleichung (3.3.2),

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

erhalten wir

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) d^3r$$

Benutzen wir die Poissongleichung (3.3.6) in der Form

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta\Phi = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}^2 \Phi,$$

und integrieren partiell, so folgt unter Verwendung von (3.3.1)

$$W_e = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r\ (\vec{\nabla}^2\Phi)\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r\ (\vec{\nabla}\Phi)^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3r\ |\vec{E}(\vec{r})|^2 \ , \tag{3.6.6}$$

da es keine Randterme bei $r \to \infty$ gibt. Es ist dann naheliegend,

$$w_e(\vec{r}) \equiv \frac{1}{8\pi} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \tag{3.6.7}$$

als Energiedichte des elektrischen Feldes zu interpretieren.

3.7 Leiter und Isolatoren

Man teilt Materialien grob in zwei Klassen ein:

1)*Isolatoren (Nichtleiter)*: Stoffe (wie Glas oder Gummi), bei denen jedes Elektron an ein bestimmtes Atom angelagert ist, sodaß sich die Ladungsträger auch bei Anlegen eines elektrischen Feldes nicht verschieben lassen.
2) *Leiter*: Stoffe, in denen sich eins oder mehrere Elektronen pro Atom frei verschieben lassen (z. B. Elektronen eines nicht vollständig gefüllten Energiebands in einem Festkörper). Ein perfekter Leiter wäre ein Material mit unbegrenzt vielen freien Elektronen.

3.7.1 Leiter

Aus diesen Definitionen folgen sofort die grundlegenden elektrostatischen Eigenschaften von idealen Leitern:
(1) $\vec{E} = 0$ **innerhalb des Leiters**: Würde man einen Leiter in ein äußeres Feld $\vec{E}_0$ legen (siehe Abbildung 3.6), würden alle freien positiven Ladungen nach rechts und alle freien negativen Ladungen nach links laufen, und diese *induzierten* Ladungen produzieren ihr eigenes Feld $\vec{E}_1$, das entgegengesetzt zu $\vec{E}_0$ zeigt. Die Ladungen fließen solange im Leiter, bis die induzierten Ladungen das äußere Feld innerhalb des Leiters aufheben.

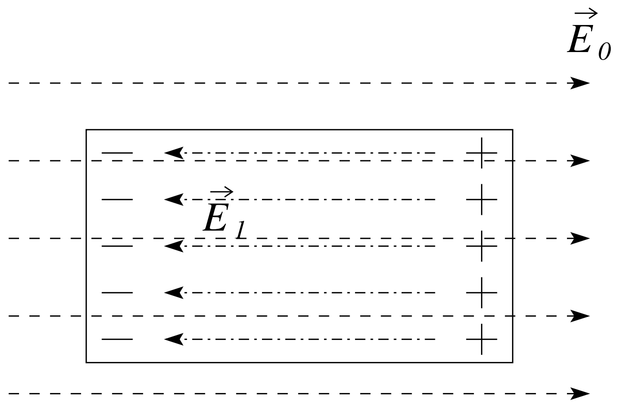

Abb. 3.6: Ladungen und $\vec{E}$-Feld innerhalb eines Leiters in einem äußeren $\vec{E}$-Feld.

(2) $\rho = 0$ **innerhalb des Leiters**: Dies folgt aus der Feldgleichung div $\vec{E} = 4\pi\rho$ als Konsequenz von $\vec{E} = 0$ innerhalb des Leiters. Es sind zwar Ladungen vorhanden, aber exakt gleich viele positive wie negative.
(3) **Jede Netto-Ladung sitzt auf der Oberfläche**: Dies ist der einzige Ort, wo sie sein können.
(4) **Das Potential Φ ist konstant im Leiter**: Nach Gleichung (3.4.3) gilt für zwei Punkte a und b in oder auf der Oberfläche

$$\Phi(b) - \Phi(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0,$$

oder$\Phi(b) = \Phi(a)$, d.h. die Oberfläche eines Leiters ist immer eine Äquipotentialfläche. Da die Feldlinien senkrecht zu den Äquipotentialflächen verlaufen, folgt
(5) $\vec{E}$ **steht immer senkrecht auf der Oberfläche** direkt außerhalb des Leiters (siehe

Abbildung 3.7). Wenn nicht, würden, wie unter Punkt (1) notiert, sofort Ladungen fließen, bis alle tangentialen $\vec{E}$-Felder verschwinden.

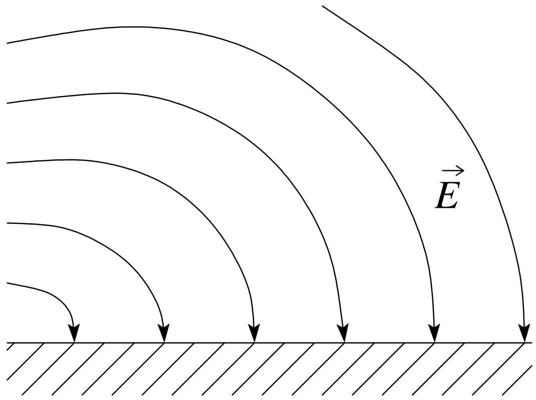

Abb. 3.7: Das $\vec{E}$-Feld steht stets senkrecht auf der Leiteroberfläche.

(6) **Faraday-Käfig**: Aus Punkt (1), $\vec{E} = 0$ innerhalb des Leiters, folgt mit dem Gaußsatz, daß das Innere eines elektrischen Leiters stets ladungsfrei ist (siehe Punkt (2) oben). Daran ändert sich auch nichts, wenn wir den Leiter aushöhlen: das dadurch entstehende Loch bleibt feldfrei (sog. *Faradayscher Käfig*).

Bringen wir einen Leiter in ein externes elektrostatisches Feld, so verschieben sich die freien Ladungsträger so lange, bis das resultierende Feld senkrecht auf der Leiteroberfläche steht; das externe Feld wird deformiert. Weil die Normalkomponente des inneren Feldes $E_i^{(n)} = 0$, folgt nach Gleichung (3.5.8), daß die Normalkomponente des Feldes unmittelbar außerhalb

$$E_a^{(n)} = 4\pi\sigma$$

oder mit Beziehung (3.5.12)

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_R \tag{3.7.1}$$

am Rand R ist, daß sich also eine passende Oberflächenladungsdichte σ gebildet haben muß. Das äußere Feld *influenziert* Ladungen an der Leiteroberfläche gemäß Gleichung (3.7.1)!

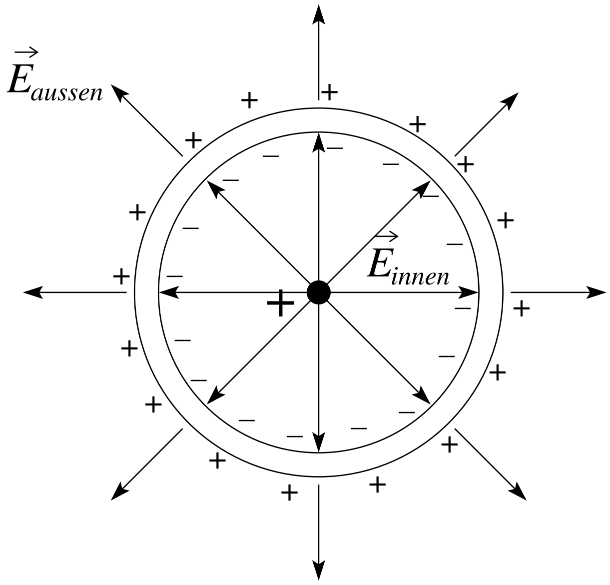

Abb. 3.8: Die $\vec{E}$-Felder und Ladungen eines sphärischen Hohlleiters.

Wir illustrieren dies am in Abbildung 3.8 skizzierten *Beispiel*: Wir setzen eine positive Punktladung $q > 0$ in das Zentrum eines sphärischen Hohlleiters. Wieviel negative Ladung wird an die innere Oberfläche gezogen? Ladungen fließen solange, bis das Netto-Feld im Leiter (durch q und die induzierten Ladungen) gleich Null ist. Weil das Feld einer gleichförmigen kugelförmigen Oberflächenladung gleich dem ist, wenn es im Zentrum der Kugel lokalisiert wäre (siehe Kap. 3.5.1), tritt das auf, wenn sich die Ladungsmenge $-q$ bei $r = a$ angesammelt hat. Also ist die induzierte Oberflächenladung dort $\sigma_a = -q/(4\pi a^2)$. Gleichzeitig verteilt sich die übrige Ladung $+q$ auf der äußeren Oberfläche mit der Oberflächenladungsdichte $\sigma_b = q/(4\pi b^2)$. (Aufgabe: Berechnen Sie für diese Anordnung den radialen Verlauf von $\vec{E}$ und Φ in den Bereichen $r \leq a$, $a < r < b$ und $r \geq b$.)

3.7.2 Isolatoren

Isolatoren enthalten positive und negative Ladungen in gleicher Anzahl, die nicht frei beweglich und damit nicht zu trennen sind. Man kann sie aber um kurze Strecken gegeneinander verschieben. Die damit verbundenen Polarisation der Atome bzw. Moleküle im Feld führen zu einem induzierten Dipolmoment, dessen Effekte wir im Kap. 8 detaillierter untersuchen werden.

3.7.3 Leiter im elektrostatischen Feld

Die Diskussion des Verhaltens von Leitern führt uns zu einer *Umformulierung des Hauptproblems der Elektrostatik: Gesucht wird die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = 4\pi\rho$ mit der Randbedingung, daß alle Leiteroberflächen Äquipotentialflächen sind.*

Dazu existieren im wesentlichen zwei Lösungsmethoden, die wir in den folgenden Abschnitten ausführlich behandeln:

(a) Methode von Green: Es muß eine Greensfunktion bestimmt werden, die den Randbedingungen angepaßt ist.
(b) Spiegelungsmethode: Es wird versucht, die durch Influenz entstandenen Oberflächenladungen durch fiktive Ladungen im Inneren des Leiters zu ersetzen, die im Außenraum dasselbe Feld wie die Oberflächenladungen erzeugen.

3.8 Randwertprobleme

3.8.1 Formulierung des Randwertproblems

Nach der Diskussion der physikalischen Randbedingungen im letzten Abschnitt formulieren wir das zu lösende Problem mathematisch: ein zusammenhängendes Volumen V werde durch eine oder mehrere Metalloberflächen (Leiteroberflächen) begrenzt. Der Rand von V besteht aus mehreren Rändern von getrennten Metallkörpern, also $R = (R_1, R_2, ...)$. Im Volumen V ist das Potentialfeld $\phi(\vec{r})$ gesucht. Es gelten die Randbedingungen

$$\Phi|_{R_i} = \Phi_i = const. \tag{3.8.1}$$

und

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_R = -4\pi\sigma \tag{3.8.2}$$

mit $\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}$.
Die Vorgabe der Potentialwerte am Rand (wie in Gleichung (3.8.1)) wird *Dirichlet-Randbedingung* genannt:

$$\text{Dirichlet-Randbedingung } \Phi|_R = \Phi_0(\vec{r}) \tag{3.8.3}$$

Gleichung (3.8.3) ist etwas allgemeiner als Gleichung (3.8.1), weil ϕ_0 eine Funktion von $\vec{r}$ sein kann und nicht, (wie bei einem Leiter) auf jedem R_i konstant sein soll.
Die Vorgabe der Normalkomponente auf dem Rand (wie in Gleichung (3.8.2)) wird *von Neumann-Randbedingung* genannt:

$$\text{von Neumann-Randbedingung } \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_R = -4\pi\sigma(\vec{r}) \tag{3.8.4}$$

Im algemeinen sind die Oberflächenladungen nicht bekannt, sondern die Potentialwerte $\Phi_0(\vec{r})$ auf den einzelnen Metallkörpern. Wir erhalten dann das *Randwertproblem mit Dirichlet-Randbedingung* zu:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \quad \text{in } V \tag{3.8.5}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) \quad \text{auf } R \ , \tag{3.8.6}$$

wobei $\rho(\vec{r})$ und $\Phi_0(\vec{r})$ gegeben sind und $\Phi(\vec{r})$ gesucht wird.
Aus der Lösung $\Phi(\vec{r})$ kann dann gemäß Gleichung (3.8.4) die Oberflächenladung bestimmt werden;

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_R$$

3.8.2 Partikuläre und homogene Lösung

Jede lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit Quellterm kann als Summe einer speziellen (partikulären) Lösung und der homogenen Lösung geschrieben werden:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_{part}(\vec{r}) + \Phi_{hom}(\vec{r}) \tag{3.8.7}$$

mit der homogenen Lösung

$$\Delta\Phi_{hom}(\vec{r}) = 0 \tag{3.8.8}$$

und der partikulären Lösung

$$\Delta\Phi_{part}(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{3.8.9}$$

Gemäß Kap. 3.3 ist Gleichung (3.8.9) äquivalent zu

$$\Phi_{part}(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{3.8.10}$$

Aus der Randbedingung (3.8.6) folgt

$$\Phi_{part}|_R + \Phi_{hom}|_R = \Phi_0(\vec{r})$$

oder

$$\Phi_{hom}|_R = (\Phi_0 - \Phi_{part})|_R \tag{3.8.11}$$

Mit (3.8.10) erhalten wir für die Lösung (3.8.7)

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} + \Phi_{hom}(\vec{r}) \tag{3.8.12}$$

Im *Spezialfall*, daß keine Metalloberflächen vorhanden sind, ist das Volumen V der gesamte Raum und die Randbedingung lautet $\Phi(\infty) = 0$. Wegen $\Phi_{part}(\infty) = 0$ folgt aus (3.8.11) $\Phi_{hom}(\infty) = 0$ und damit $\Phi_{hom}(\vec{r}) = 0$.

3.8.3 Eindeutigkeit der Lösung

Seien $\Phi_1(\vec{r})$ und $\Phi_2(\vec{r})$ zwei beliebige Lösungen des Potentialproblems (3.8.5) – (3.8.6). Für die Differenz

$$\psi(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r}) - \Phi_2(\vec{r}) \tag{3.8.13}$$

gilt dann

$$\Delta\psi = \Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2 = -4\pi(\rho - \rho) = 0$$

also

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{in } V \tag{3.8.14}$$

und

$$\psi|_R = \Phi_1|_R - \Phi_2|_R = \Phi_0 - \Phi_0 = 0 \tag{3.8.15}$$

Benutzen wir den 1. Greenschen Satz (2.6.10) für die skalaren Funktionen $u = v = \psi$, so gilt

$$\int_V dV[\psi\Delta\psi + (\vec{\nabla}\psi)^2] = \int_R dF\ \psi\frac{\partial\psi}{\partial n} \tag{3.8.16}$$

Wegen (3.8.15) $\psi|_R = 0$ verschwindet die rechte Seite von (3.8.16). Setzen wir auf der linken Seite gemäß Gleichung (3.8.14) $\Delta\psi = 0$ ein, so folgt

$$\int_V dV(\vec{\nabla}\psi)^2 = 0$$

oder

$$\vec{\nabla}\psi = 0 \quad ,$$

sodaß

$$\psi(\vec{r}) = const. \quad , \tag{3.8.17}$$

d. h. die beiden möglichen Lösungen $\Phi_1(\vec{r})$ und $\Phi_2(\vec{r})$ können sich nur um eine Konstante unterscheiden.

Für die Dirichlet-Randbedingung $\psi|_R = 0$ muß die Konstante gleich Null sein. Für die von-Neumann-Randbedingung ist die Lösung bis auf diese unwesentliche Konstante festgelegt.

3.8.4 Greensfunktion

Die partikuläre Lösung in (3.8.7) läßt sich mithilfe der Greensfunktion $G(\vec{r}, \vec{r}^{\,\prime})$ konstruieren, die die Poisson-Gleichung mit Punktquelle am Ort $\vec{r}^{\,\prime}$ erfüllt:

$$\Delta G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (3.8.18)$$

Die partikuläre Lösung $\Phi_{part}(\vec{r})$ ist dann durch

$$\Phi_{part}(\vec{r}) = \int d^3r' \, G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}') \qquad (3.8.19)$$

gegeben, weil

$$\Delta\Phi_{part}(\vec{r}) = \int d^3r' \, \rho(\vec{r}')\Delta G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi \int d^3r' \, \rho(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}') = -4\pi\rho(\vec{r})$$

gemäß (3.8.9) Q.E.D. .
Aufgrund der Beziehung (2.7.27) (siehe auch Kap. 3.3)

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad , \qquad (3.8.20)$$

wissen wir, daß eine Lösung von (3.8.18) durch

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (3.8.21)$$

gegeben ist. Allgemein ist

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + f(\vec{r},\vec{r}') \quad , \qquad (3.8.22)$$

wobei f die Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllt. Die Greensfunktion bei vorgegebenen Randbedingungen läßt sich also mithilfe der homogenen Lösungen $\Delta f = 0$ der Laplace-Gleichung und den vorausgesetzten Randbedingungen konstruieren. In Kap. 3.10 kommen wir auf diese allgemeine Darstellung zurück.
Eine einfache Lösung von Gleichung (3.8.10) für das partikuläre Potential einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$, d.h.

$$\Phi_{part}(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

wird man nur bei Vorliegen von symmetrischen Ladungsverteilungen angeben können. Daher sind *Näherungsmethoden* von Interesse, wie z.B. die Entwicklung nach Multipolen, die wir als nächstes besprechen.

3.9 Entwicklung des skalaren Potentials einer statischen, begrenzten Ladungsverteilung nach Multipolen

Wir untersuchen die in Abbildung 3.9 gezeigte auf das Gebiet G begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$. Den Vektor

$$\vec{r}_S = \frac{\int_G d^3r' \; \vec{r}' \rho(\vec{r}')}{\int_G d^3r' \; \rho(\vec{r}')} \tag{3.9.1}$$

bezeichnet man als *Ladungsschwerpunktsvektor*. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß $\vec{r}_S = \vec{0}$ erfüllt ist.

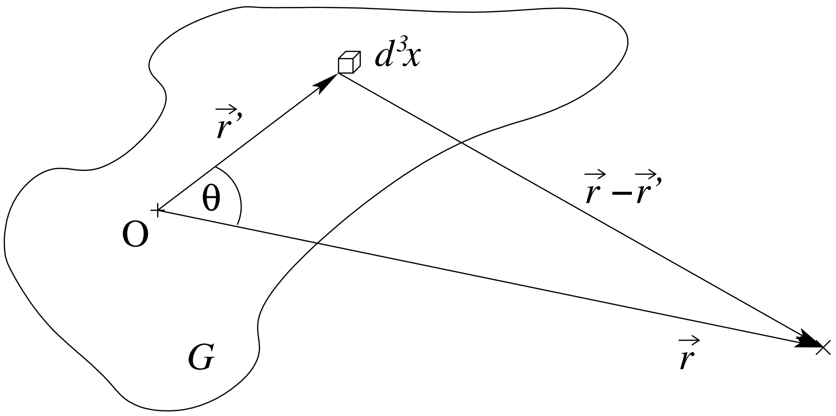

Abb. 3.9: Begrenzte Ladungsverteilung mit Ladungsschwerpunkt $\vec{r_S} = 0$.

3.9.1 Multipole

Gemäß Gleichung (3.8.10) berechnen wir das im Punkt $\vec{r}$ durch diese Ladungsverteilung hervorgerufene Potential $A_0(\vec{r}) \equiv \Phi_{part}(\vec{r})$ zu

$$A_0(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{3.9.2}$$

durch Entwicklung nach Multipolen für $r > r'$. Mit

$$\cos\theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}||\vec{r}'|}$$

folgt aus Abbildung 3.9 mit dem Kosinussatz

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r'})^2} = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos\theta + (r')^2} \quad ,$$

also

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta + (\frac{r'}{r})^2} \tag{3.9.3}$$

Wir definieren $\mu = \cos\theta$ und $s = r'/r$. Damit lautet Gleichung (3.9.3)

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = r\sqrt{1 - 2s\mu + s^2} \quad ,$$

sodaß wir für das Potential (3.9.2) erhalten:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{1}{r}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r'})}{\sqrt{1-2s\mu+s^2}}, \qquad \text{mit } s = r'/r \tag{3.9.4}$$

Jetz nutzen wir die Definition der *Legendre-Polynome* $P_l(\mu)$ über deren *erzeugende Funktion*

$$T(\mu,s) = \frac{1}{\sqrt{1-2s\mu+s^2}} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu)s^l \quad , \tag{3.9.5}$$

d.h. die Legendre-Polynome werden als Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $T(\mu,s)$ definiert. Mit $s = r'/r$ folgt dann für das Potential (3.9.4) die Multipolentwicklung

$$A_0(\vec{r}) = \frac{1}{r}\int d^3r' \sum_{l=0}^{\infty} \rho(\vec{r'})P_l(\mu)(\frac{r'}{r})^l = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^l}\int d^3r'\ P_l(\mu)\rho(\vec{r'}),$$

oder

$$A_0(\vec{r}) = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q_l}{r^l} \tag{3.9.6}$$

mit den *Multipolen*

$$Q_l = \int d^3r'\ \rho(\vec{r'})P_l(\mu)(r')^l \tag{3.9.7}$$

Die Multipole Q_l müssen mit den Legendre-Polynomen $P_l(\mu)$ ausgerechnet werden.

3.9.2 Eigenschaften der Legendre-Polynome

Rekursionsbeziehungen: Wir bilden mit Gleichung (3.9.5) die partielle Ableitung bezüglich s:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(\mu)s^{l-1} = \frac{-\frac{1}{2}(-2\mu+2s)}{(1-2\mu s+s^2)^{3/2}},$$

oder

$$\sum_{l=0}^{\infty} lP_l(\mu)s^{l-1} = \frac{\mu-s}{(1-2\mu s+s^2)^{3/2}}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(1-2\mu s+s^2)$ und nutzen auf der rechten Seite erneut Gleichung (3.9.5):

$$(1-2\mu s+s^2)\sum_{l=0}^{\infty} lP_l(\mu)s^{l-1} = (\mu-s)\frac{1}{(1-2\mu s+s^2)^{1/2}} = (\mu-s)\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu)s^l,$$

d.h. wir erhalten die Beziehung

$$(1-2\mu s+s^2)\sum_{l=0}^{\infty} lP_l(\mu)s^{l-1} + (s-\mu)\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu)s^l = 0 \tag{3.9.8}$$

Wir schreiben diese Identität etwas anders:

$$\sum_{m=0}^{\infty} mP_m(\mu)s^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2\mu nP_n(\mu)s^n + \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(\mu)s^{l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu)s^{l+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \mu P_n(\mu)s^n = 0$$

Der Koeffizientenvergleich für jede Potenz von s mit $m = n+1$ und $l = n-1$ ergibt

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) - 2\mu nP_n(\mu) + (n-1)P_{n-1}(\mu) + P_{n-1}(\mu) - \mu P_n(\mu) = 0$$

oder

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) - (2n+1)\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0$$

Als erste Rekursionsbeziehung erhalten wir

$$(2n+1)\mu P_n(\mu) = (n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu) \tag{3.9.9}$$

Differentialgleichung der Legendre-Polynome: Wir bilden mit Gleichung (3.9.5) die partielle Ableitung bezüglich μ:

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l^{'}(\mu)s^l = \frac{-\frac{1}{2}(-2s)}{(1-2\mu s+s^2)^{3/2}} = \frac{s}{(1-2\mu s+s^2)^{3/2}}$$

oder

$$(1-2\mu s+s^2)\sum_{l=0}^{\infty} P_l^{'}(\mu)s^l = \frac{s}{(1-2\mu s+s^2)^{1/2}} = s\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu)s^l$$

Dabei ist $P_l^{'}(\mu) = \frac{d}{d\mu}P_l(\mu)$. Wir erhalten also die Identität

$$(1-2\mu s+s^2)\sum_{l=0}^{\infty} P_l^{'}(\mu)s^l - s\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu)s^l = 0$$

Wir schreiben diese Identität wieder etwas anders:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m^{'}(\mu)s^m - \sum_{n=0}^{\infty} 2\mu P_n^{'}(\mu)s^{n+1} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l^{'}(\mu)s^{l+2} - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu)s^{n+1} = 0$$

Der Koeffizientenvergleich für jede Potenz von s mit $m = n+1$ und $l = n-1$ ergibt

$$P_{n+1}^{'}(\mu) - 2\mu P_n^{'}(\mu) + P_{n-1}^{'}(\mu) - P_n(\mu) = 0$$

oder

$$P_{n+1}^{'}(\mu) + P_{n-1}^{'}(\mu) = 2\mu P_n^{'}(\mu) + P_n(\mu) \tag{3.9.10}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(2n+1)$:

$$(2n+1)P'_{n+1}(\mu) + (2n+1)P'_{n-1}(\mu) = 2(2n+1)\mu P'_n(\mu) + (2n+1)P_n(\mu) \qquad (a)$$

Wir differentieren die Rekursionsbeziehung (3.9.9) nach μ:

$$(2n+1)P_n(\mu) + (2n+1)\mu P'_n(\mu) = (n+1)P'_{n+1}(\mu) + nP'_{n-1}(\mu)$$

und multiplizieren das Ergebnis mit dem Faktor 2:

$$2(2n+1)P_n(\mu) + 2(2n+1)\mu P'_n(\mu) = 2(n+1)P'_{n+1}(\mu) + 2nP'_{n-1}(\mu) \qquad (b)$$

Die Addition der Gleichungen (a) und (b) ergibt

$$\begin{aligned}(2n+1)P'_{n+1} + (2n+1)P'_{n-1} + 2(2n+1)P_n + 2\mu(2n+1)P'_n \\ = 2\mu(2n+1)P'_n + (2n+1)P_n + 2(n+1)P'_{n+1} + 2nP'_{n-1}\end{aligned}$$

oder nach Ordnen

$$[2(2n+1) - (2n+1)]P_n = [2(n+1) - (2n+1)]P'_{n+1} + [2n - (2n+1)]P'_{n-1} \quad ,$$

also

$$(2n+1)P_n(\mu) = P'_{n+1}(\mu) - P'_{n-1}(\mu) \qquad (3.9.11)$$

Lösen wir diese Gleichung nach P'_{n+1} auf,

$$P'_{n+1} = (2n+1)P_n + P'_{n-1} \quad ,$$

und setzen nach (3.9.10)

$$P'_{n-1} = 2\mu P'_n + P_n - P'_{n+1}$$

ein, so folgt

$$2P'_{n+1} = 2(n+1)P_n + 2\mu P'_n$$

oder

$$P'_{n+1}(\mu) = (n+1)P_n(\mu) + \mu P'_n(\mu) \qquad (3.9.12)$$

Ebenso können wir Gleichung (3.9.11) auch nach P'_{n-1} auflösen,

$$P'_{n-1} = P'_{n+1} - (2n+1)P_n \quad ,$$

und nach (3.9.12) P'_{n+1} einsetzen:

$$P'_{n-1} = (n+1)P_n + \mu P'_n - (2n+1)P_n = \mu P'_n - nP_n$$

Wir erhalten also

$$P'_{n-1}(\mu) = -nP_n(\mu) + \mu P'_n(\mu) \tag{3.9.13}$$

Wir setzen in dieser Gleichung $n = k+1$, sodaß gilt

$$P'_k(\mu) = -(k+1)P_{k+1}(\mu) + \mu P'_{k+1}(\mu)$$

Im letzten Term setzen wir nach (3.9.12)

$$P'_{k+1} = (k+1)P_k + \mu P'_k$$

ein und erhalten

$$P'_k = -(k+1)P_{k+1} + \mu^2 P'_k + \mu(k+1)P_k$$

oder

$$(1-\mu^2)P'_k = (k+1)\mu P_k - (k+1)P_{k+1}$$

Für den letzten Term dieser Gleichung gilt mit der Rekursionsbeziehung (3.9.9)

$$(k+1)P_k = (2k+1)\mu P_k - kP_{k-1} \quad ,$$

sodaß folgt

$$(1-\mu^2)P'_k = kP_{k-1} + \mu P_k[(k+1) - (2k+1)] = kP_{k-1} - k\mu P_k$$

Setzen wir wieder $k = n$, so erhalten wir

$$(1-\mu^2)P'_n(\mu) = -n\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) \tag{3.9.14}$$

Wir differenzieren diese Beziehung nach μ:

$$(1-\mu^2)P''_n - 2\mu P'_n = -nP_n - n\mu P'_n + nP'_{n-1}$$

$$= -nP_n - n\mu P'_n + n(-nP_n + \mu P'_n) = -nP_n - n^2 P_n \quad ,$$

wobei wir für P'_{n-1} Gleichung (3.9.13) benutzt haben. Das Umstellen dieser Gleichung ergibt die *Legendresche Differentialgleichung*

$$(1-\mu^2)P''_n(\mu) - \ 2\mu P'_n(\mu) + \ n(n+1)P_n(\mu)$$

$$= \frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_n(\mu)] + \ n(n+1)P_n(\mu) = 0 \quad , \tag{3.9.15}$$

die eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ist.
Mit $\mu = \cos\theta$ schreibt sich Gleichung (3.9.15) als

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dP_n}{d\theta}) + \ n(n+1)P_n = 0 \tag{3.9.16}$$

Ohne Beweis (Übungsaufgabe) geben wir an, daß die zweimalige Anwendung des Binomialsatzes

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^m$$

auf die erzeugende Funktion $T(\mu, s)$ die folgende Darstellung ergibt:

$$P_n(\mu) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \mu^{n-2k} \tag{3.9.17}$$

wobei

$$[n/2] = \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ (n-1)/2 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Ohne Beweis geben wir auch die *Formel von Rodrigues* an:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \tag{3.9.18}$$

Mit diesen Darstellungen ergibt sich sofort für $n = 0, 1$, daß

$$P_0(\mu) = (-1)^0 \frac{0!}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \mu^0 = 1 \tag{3.9.19}$$

$$P_1(\mu) = (-1)^0 \frac{2!}{2 \cdot 1 \cdot 1! \cdot 1!} \mu = \mu \tag{3.9.20}$$

Aus der Rekursionsbeziehung (3.9.9) folgen daraus alle höheren Legendre-Polynome für $n \geq 2$; z. B. finden wir für aus (3.9.9) mit $n = 1$:

$$2P_2 = 3\mu P_1 - P_0 = 3\mu^2 - 1 \quad ,$$

d.h.

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \tag{3.9.21}$$

Mit $n = 2$ ergibt diese Rekursionsbeziehung

$$3P_3 = 5\mu P_2 - 2P_1 = \frac{5\mu}{2}(3\mu^2 - 1) - 2\mu \quad ,$$

oder

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) \tag{3.9.22}$$

In Abbildung 3.10 sind die ersten 4 Legendre-Polynome gezeichnet.

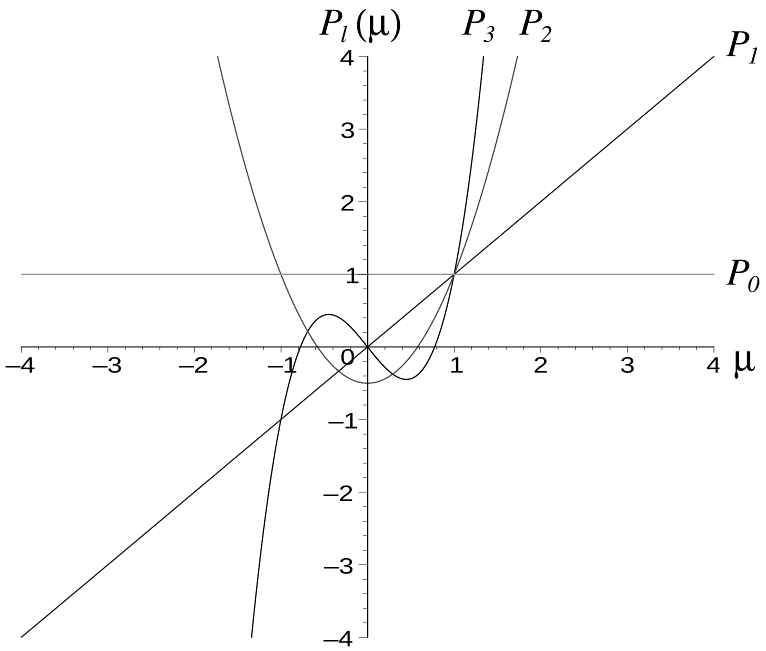

Abb. 3.10: Die Legendre-Polynome $P_l(\mu)$ *für* $l = 0...3$.

Orthogonalität: Wir starten von der Legendreschen Differentialgleichung (3.9.15) für den Index n,

$$\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_n(\mu)] + \ n(n+1)P_n(\mu) = 0 \ \ ,$$

und für den Index $l \neq n$,

$$\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)] + \ l(l+1)P_l(\mu) = 0 \ \ .$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $P_l(\mu)$ und die zweite Gleichung mit $P_n(\mu)$ und bilden dann die Differenz der Ergebnisse:

$$[-n(n+1)+l(l+1)]P_l(\mu)P_n(\mu) = P_l(\mu)\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_n(\mu)] - P_n(\mu)\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)] =$$

$$\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)P_l(\mu)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu} - (1-\mu^2)P_n(\mu)\frac{dP_l(\mu)}{d\mu}]$$

Integrieren wir diese Gleichung über μ, so folgt

$$[-n(n+1)+l(l+1)]\int_{-1}^{1} d\mu P_l(\mu)P_n(\mu)$$
$$=\int_{-1}^{1} d\mu \frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)P_l(\mu)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}-(1-\mu^2)P_n(\mu)\frac{dP_l(\mu)}{d\mu}]$$
$$=[(1-\mu^2)[P_l(\mu)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}-P_n(\mu)\frac{dP_l(\mu)}{d\mu}]\Big]_{-1}^{1}=0$$

aufgrund des Faktors $(1-\mu^2)$. Für $l \neq n$ folgt daher die *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_{-1}^{1} d\mu P_l(\mu)P_n(\mu)=0 \tag{3.9.23}$$

Übungsaufgabe: Beweisen Sie die Orthonormalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} d\mu P_n^2(\mu)=\frac{2}{2n+1} \tag{3.9.24}$$

3.9.3 Multipolentwicklungen

Da wir nun die Legendre-Polynome explizit kennen, können wir die Multipole (3.9.7) Q_l berechenen. Wir erhalten für den Multipol niedrigster Ordnung

$$Q_0=\int d^3r^{'}\ \rho(\vec{r^{'}})\cdot 1=\int d^3r^{'}\rho(\vec{r^{'}})=Q \quad \text{Gesamtladung} \tag{3.9.25}$$

gerade die Gesamtladung unserer Ladungsverteilung.
Den Multipol 1. Ordnung

$$Q_1=\int d^3r^{'}\ \rho(\vec{r^{'}})\mu r^{'} \tag{3.9.26}$$

bezeichnet man als *Dipolmoment*.
Den Multipol 2. Ordnung

$$Q_2=\int d^3r^{'}\ \rho(\vec{r^{'}})\frac{1}{2}(3\mu^2-1)(r^{'})^2 \tag{3.9.27}$$

bezeichnet man als *Quadrupolmoment*. Die Multiploentwicklung (3.9.6) lautet dann

$$A_0(\vec{r})=\frac{Q_0}{r}+\frac{Q_1}{r^2}+\frac{Q_1}{r^3}+....... \tag{3.9.28}$$

Für große Entfernungen dominiert der erste Term Q_0/r! Bei großen Abständen verhält sich die Ladungsverteilung also wie eine Punktladung im Ursprung mit der Gesamtladung $q=Q$.
Enthält die Ladungsverteilung gleichviel positive wie negative Ladungsträger, ist die Gesamtladung $Q=0$. In diesem Fall ist das Dipolmoment in der Potentialentwicklung (3.9.28) der dominante Term für große Entfernungen (falls nicht auch dieser bei entsprechender symmetrischer Ladungsanordnung gleich Null ist), also

$$A_0(\vec{r}, r >> 1) \simeq \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{r^2}\int d^3r^{'}\ \rho(\vec{r^{'}})\mu r^{'} = A_{Dipol}(\vec{r}) \tag{3.9.29}$$

Mit $\mu = \cos\theta$, $\theta = \angle(\vec{r}, \vec{r}^{'})$ gilt

$$r^{'}\cos\theta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^{'}}{r}\ \ ,$$

sodaß das Dipolpotential (3.9.29) lautet

$$A_{Dipol}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int d^3r^{'}\ \vec{r}^{'}\rho(\vec{r}^{'}) \tag{3.9.30}$$

Dies schreiben wir als

$$A_{Dipol}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} \tag{3.9.31}$$

mit der alternativen Darstellung des Dipolmoments durch

$$\vec{p} = \int d^3r^{'}\ \vec{r}^{'}\rho(\vec{r}^{'}) \tag{3.9.32}$$

Das Dipolmoment (3.9.32) hängt von der Geometrie (Größe, Form und Dichte) der Ladungsverteilung ab.

3.9.4 Beispiel: Der physikalische Dipol

Als Beispiel betrachten wir die Dipolladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}) - q\delta(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{a})\ \ , \tag{3.9.33}$$

dessen Gesamtladung $Q = \int d^3r\rho(\vec{r}) = q - q = 0$ verschwindet. In diesem Fall erhalten wir für das Dipolmoment (3.9.32)

$$\begin{aligned}\vec{p} = \int d^3r^{'}\ \vec{r}^{'}\rho(\vec{r}^{'}) = q\int d^3r^{'}\ \vec{r}^{'}\delta(\vec{r}^{'} - \frac{1}{2}\vec{a})\\ -q\int d^3r^{'}\ \vec{r}^{'}\delta(\vec{r}^{'} + \frac{1}{2}\vec{a}) = \frac{q}{2}\vec{a} - q(-\frac{1}{2}\vec{a}) = q\vec{a}\ \ ,\end{aligned} \tag{3.9.34}$$

sodaß nach Gleichung (3.9.31)

$$A_{Dipol}(\vec{r}) = \frac{q\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{3.9.35}$$

Für große Entfernungen $r >> a$ stimmt dieses Ergebnis mit der entsprechenden Näherung für das exakte Potential überein. Führen wir nach Abbildung 3.11 die Abstände r_+ und r_- zur positiven und negativen Ladung ein, so lautet nach Gleichung (3.9.2) und (3.9.33) das exakte Potential

$$A_E = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \tag{3.9.36}$$

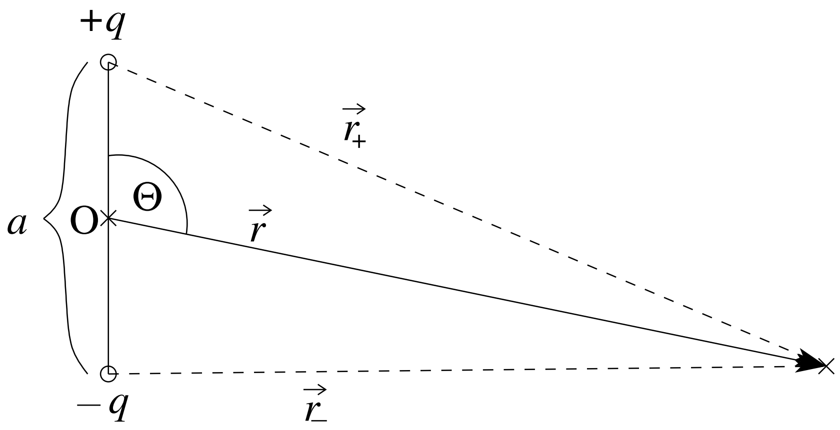

Abb. 3.11: Zur Berechnung des Dipolfeldes.

Nach Abbildung 3.11 ergibt der Kosinussatz

$$r_+^2 = r^2 + (\frac{a}{2})^2 - ra\cos\Theta, \quad r_-^2 = r^2 + (\frac{a}{2})^2 - ra\cos(\pi - \Theta) = r^2 + (\frac{a}{2})^2 + ra\cos\Theta$$

und wir erhalten für das exakte Potential (3.9.36)

$$A_E(r) = \frac{q}{r}\Big(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\Theta + \frac{a^2}{4r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\Theta + \frac{a^2}{4r^2}}}\Big) \tag{3.9.37}$$

Für große Abstände $r >> a$ vernachlässigen wir den Term $(a^2/4r^2) << 1$ und nutzen die Näherung $(1-\epsilon)^{-1/2} \simeq 1 + (\epsilon/2)$ für $\epsilon << 1$, sodaß

$$(1 - \frac{a}{r}\cos\Theta)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{a}{2r}\cos\Theta, \quad (1 + \frac{a}{r}\cos\Theta)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{a}{2r}\cos\Theta$$

Für große Abstände $r >> a$ ergibt sich dann für das exakte Potential (3.9.37) die Näherung

$$A_E(r >> a) \simeq \frac{q}{r}\Big(1 + \frac{a}{2r}\cos\Theta - (1 - \frac{a}{2r}\cos\Theta)\Big) = \frac{qa\cos\Theta}{r^2} = \frac{q\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{3.9.38}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (3.9.35).
Aus den Ergebnissen (3.9.34) und (3.9.35) oder (3.9.38),

$$A(r,\Theta) = \frac{qa\cos\Theta}{r^2} = \frac{p\cos\Theta}{r^2}$$

folgt mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}A(r,\Theta)$ in Kugelkoordinaten (siehe Gleichung 2.5.6.4)) das elektrische Feld des Dipolanteils:

$$E_r = -\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{2p\cos\Theta}{r^3}, \quad E_\Theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\Theta} = \frac{p\sin\Theta}{r^3}, \quad E_\phi = -\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial A}{\partial\phi} = 0$$

also

$$\vec{E}_{Dipol} = \frac{p}{r^3}(2\cos\Theta\vec{e}_r + \sin\Theta\vec{e}_\Theta) \quad , \tag{3.9.39}$$

das proportional zu r^{-3} abfällt. Dieses Feld ist in Abbildung 3.12 skizziert.

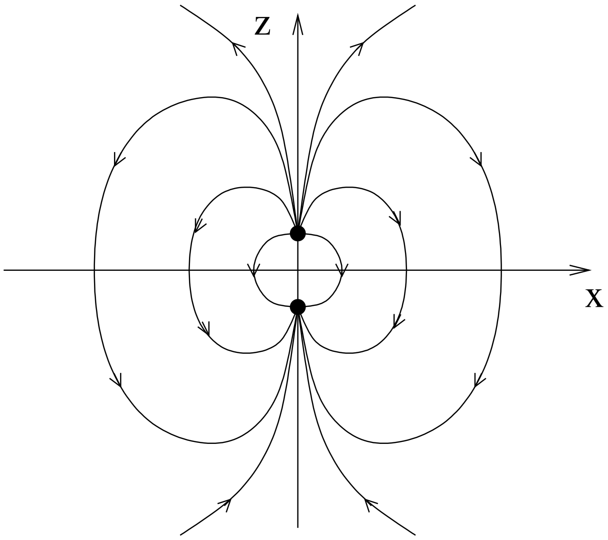

Abb. 3.12: Das elektrische Feld eines Dipols.

Übungsaufgaben:

1) Zeigen Sie, daß das elektrische Feld eines physikalischen Dipols koordinatenunabhängig als

$$\vec{E}_{Dipol} = \frac{1}{r^3}[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}] \tag{3.9.40}$$

ausgedrückt werden kann.

2) Berechnen sie Potential und elektrisches Feld eines Quadrupols.

3.9.5 Berechnung der Multipolkoeffizienten in Kugelkoordinaten

Für manche Formen der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist es bequemer, die Multipolkoeffizienten (3.9.7),

$$Q_l = \int d^3r' \ \rho(\vec{r'})P_l(\mu)(r')^l,$$

in Kugelkoordinaten zu berechnen, d.h. mit

$$\vec{r} = r(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta), \quad \vec{r}' = r'(\cos\phi'\sin\theta', \sin\phi'\sin\theta', \cos\theta')$$

Zu diesem Zweck wird die Entwicklung der Legendre-Polynome

$$P_l(\mu) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3.9.41}$$

nach Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$ benutzt, wobei $\mu = \cos(\angle(\vec{r},\vec{r}^{'}))$ ist. Für die Multipolkoeffizienten erhalten wir dann

$$Q_l(\theta,\phi) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)q^*_{lm} \tag{3.9.42}$$

mit

$$q^*_{lm} \equiv \int d^3r^{'}\ \rho(\vec{r^{'}})(r^{'})^l Y^*_{lm}(\theta^{'},\phi^{'}) \tag{3.9.43}$$

3.10 Spiegelungsmethode oder Methode der Bildladungen

In Kap. 3.8 haben wir bemerkt, daß die allgemeine Form der Greensfunktion der Poisson-Gleichung durch Gleichung (3.8.22) gegeben ist:

$$G(\vec{r},\vec{r}^{'}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{'}|} + f(\vec{r},\vec{r}^{'}) \quad \text{mit}$$

$$\Delta_r f = 0 \ \ \forall \vec{r},\vec{r}^{'} \in V \tag{3.10.1}$$

Wir können die Funktion $f(\vec{r},\vec{r}^{'})$ physikalisch interpretieren als das Potential einer fiktiven Ladungsverteilung *außerhalb* des Volumens V, das zusammen mit dem Potential $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{'}|}$ der Punktladung $q = 1$ bei $\vec{r}^{'}$ für die gegebenen Randbedingungen auf R sorgt.
Diese Interpretation ist der Ausgangspunkt für die *Spiegelungsmethode* (oder *Methode der Bildladungen*): man bringt außerhalb des betrachteten Volumens V an von der Geometrie des Problems abhängigen Stellen fiktive Ladungen, sogenannte *Bildladungen*, an, durch die die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Da diese Bildladungen außerhalb von V liegen, stören sie die Poisson-Gleichung innerhalb von V nicht. Wir ersetzen also $\rho(\vec{r^{'}})$ **plus Randbedingungen** durch $\rho(\vec{r^{'}})$ **plus Bildladungen ohne Randbedingungen**!

3.10.1 Beispiel: Punktladung vor geerdeter, unendlich ausgedehnter Metallplatte

Wir untersuchen die in Abbildung 3.13 skizzierte Anordnung einer Punktladung im Abstand a vor einer geerdeten (d.h. Potential $\Phi(x=0)=0$), unendlich ausgedehnten Metallplatte am Ort $x = 0$. Wir suchen das Potential $\Phi(x)$ dieser Anordnung im Halbraum $x < 0$ und die Influenzladungen auf der Metallplatte. Zu lösen ist ein Dirichletsches Randwertproblem mit

$$\Delta\Phi(x) = -4\pi q\delta(\vec{r}-(-a\vec{e}_x)) \quad \text{für} \quad x<0 \quad \text{entspricht } V \tag{3.10.2}$$

und

$$\Phi|_R = \Phi(x=0,y,z) = 0 \quad \forall y,z \tag{3.10.3}$$

Die Randbedingung (3.10.3) auf der $y - z - Ebene$ bei $x = 0$ realisieren wir durch eine Bildladung q_B *außerhalb* von V, d.h. im Bereich $x > 0$. Aus Symmetriegründen liegt es nahe, diese Bildladung auf die positive x-Achse zu setzen. Für das Potential setzen wir dann an

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} + \frac{q_b}{|\vec{r} - b\vec{e}_x|} \tag{3.10.4}$$

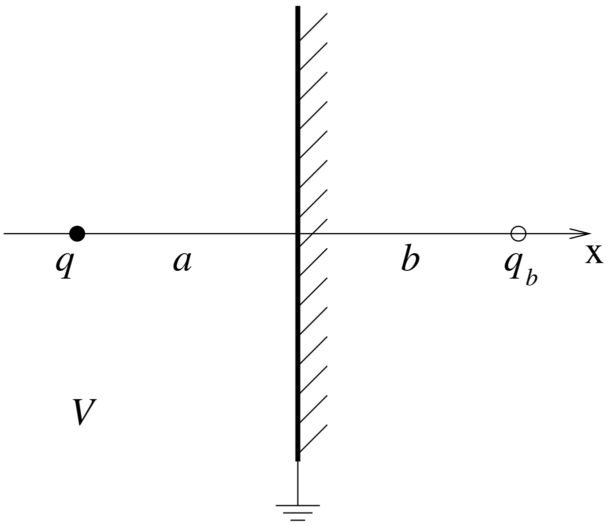

Abb. 3.13: Punktladung und Bildladung bei der geerdeten Metallplatte.

Die Werte von q_b und b werden so bestimmt, daß die Randbedingung (3.10.3) erfüllt ist, d.h. $\Phi(\vec{r}) = 0 \; \forall \vec{r} = (0,y,z)$, also

$$0 = \frac{q}{\sqrt{y^2 + z^2 + (-a)^2}} + \frac{q_b}{\sqrt{y^2 + z^2 + b^2}} \tag{3.10.5}$$

Als Lösung erhalten wir $Q_b = -q$ und $b = a$ und damit für Gleichung (3.10.4):

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} - \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} \tag{3.10.6}$$

Wegen (siehe Gleichung (3.8.20))

$$\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} = -4\pi\delta(\vec{r} - a\vec{e}_x) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbf{V}$$

ist Gleichung (3.10.6) die Lösung der Poisson-Gleichung mit der Randbedingung $\Phi = 0$ auf R.

Für das elektrische Feld im Halbraum in V $(x < 0)$ erhalten wir damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi = q[\frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} - \frac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3}] \tag{3.10.7}$$

Gemäß Gleichung (3.8.4) ergibt sich die influenzierte Oberflächenladung auf der Metallplatte zu

$$\begin{aligned}\sigma(y,z) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_R = -\frac{1}{4\pi}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi|_R = -\frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla}\Phi)_x|_R = -\frac{1}{4\pi}E_x(x=0,y,z)\\ &= -\frac{q}{4\pi}[\frac{a}{(y^2+z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{a}{(y^2+z^2+a^2)^{3/2}}] = -\frac{qa}{2\pi(y^2+z^2+a^2)^{3/2}}\end{aligned} \tag{3.10.8}$$

Die Oberflächenladung ist maximal am Punkt $(y,z) = (0,0)$ auf der Metallplatte und nimmt mit wachsendem Abstand $s = \sqrt{y^2+z^2}$ ab. Der Verlauf der elektrischen Feldlinien und der Oberflächenladung ist in Abbildung 3.14 skizziert.

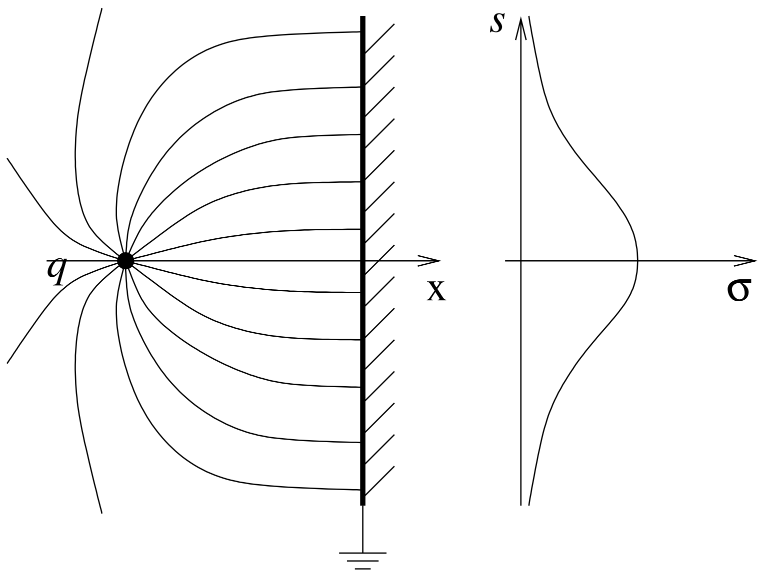

Abb. 3.14: Verlauf des elektrischen Feldes und der Oberflächenladung σ einer Punktladung vor Metallplatte.

Die Gesamtladung auf der Metallplatte ist mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}q_{Infl} &= \int_{x=0} df\,\sigma(y,z) = 2\pi\int_0^\infty ds\; s\sigma(s) = -qa\int_0^\infty ds\frac{s}{(a^2+s^2)^{3/2}}\\ &= qa\int_0^\infty ds\;\frac{d}{ds}(a^2+s^2)^{-1/2} = qa[(a^2+s^2)^{-1/2}]_0^\infty = -q\end{aligned} \tag{3.10.9}$$

Über die Influenzladung üben die Metallplatte und die Punktladung Kräfte aufeinander aus: Die Kraft auf die Punktladung ist $\vec{K} = q\vec{E}'$, wobei $\vec{E}'$ das Feld aller Ladungen außer der Punktladung selbst ist, d.h. $\vec{E}'$ ist gleich dem Feld der Bildladung, also nach (3.10.7)

$$\vec{E}' = -q\frac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3}$$

Für $\vec{r} = (-a, 0, 0)$ folgt

$$\vec{K} = q\vec{E}' = -q^2 \frac{-2a\vec{e}_x}{(-2a)^3} = \frac{q^2}{4a^2}\vec{e}_x \tag{3.10.10}$$

Auf die Platte wirkt eine entgegengesetzt gleichgroße Kraft.
Übungsaufgabe: Punktladung vor geerdeter Metallkugel: Berechnung von $\vec{E}$, σ und $\vec{K}$.

3.11 Methode der konformen Abbildung bei ebenen Problemen

Das Problem der Potentialtheorie besteht in der Lösung der Laplace-Gleichung in Raumbereichen außerhalb der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. In diesen Bereichen folgt gemäß der elektrostatischen Feldgleichungen (3.3.6) und (3.3.7)

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad , \tag{3.11.1}$$

wobei weiterhin gilt

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad , \tag{3.11.2}$$

sodaß $\vec{E}$ durch das Potential A_0 ausgedrückt werden kann:

$$\vec{E} = -\text{ grad } A_0(\vec{r}) \tag{3.11.3}$$

Setzt man Gleichung (3.11.3) in Beziehung (3.11.1) ein, so folgt die Laplace-Gleichung (vergleiche mit (3.3.8)).

$$\Delta A_0 = \text{ div } \text{ grad } A_0 = 0 \quad , \tag{3.11.4}$$

wobei A_0 gegebene Randbedingungen erfüllen muß.

3.11.1 Ebenes Feld

Wir beschränken uns hier auf *ebene Felder*, die nur von zwei kartesischen Koordinaten abhängen. Aufgrund Gleichung (3.11.1) läßt sich $\vec{E}$ wegen div rot $= 0$ auch durch

$$\vec{E} = \text{ rot } \vec{A}' \tag{3.11.5}$$

ein anderes *elektrostatisches Vektor-Potential* $A' = (A'_x, A'_y, A'_z)$ darstellen.
Bei ebenen Problemen ist o.B.d.A.

$$E_x = E_x(x, y), \quad E_y = E_y(x, y), \quad E_z = 0$$

Gemäß der Darstellung (3.11.5) gilt aber auch

$$E_x = \frac{\partial A'_z}{\partial y} - \frac{\partial A'_y}{\partial z} \quad ,$$

$$E_y = \frac{\partial A_x^{'}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{'}}{\partial x} \quad ,$$

und

$$E_z = \frac{\partial A_y^{'}}{\partial x} - \frac{\partial A_x^{'}}{\partial y} \quad .$$

Aus $E_z = 0$ folgt dann

$$\frac{\partial A_y^{'}}{\partial x} = \frac{\partial A_x^{'}}{\partial y}$$

und speziell

$$A_x^{'} = A_y^{'} = 0 \quad , \tag{3.11.6}$$

was wir als Zusatzforderung an das elektrostatische Vektorpotential für ebene Probleme auffassen. Wir erhalten also einfach

$$\vec{A}^{'} = (0, 0, A(x, y)) \quad \text{mit} \quad A = A_z^{'} \tag{3.11.7}$$

Damit haben wir einerseits nach Gleichung (3.11.3) $\vec{E} = -\ \text{grad}\ A_0$ und andererseits nach Gleichung (3.11.5) $\vec{E} = -\ \text{rot}\ \vec{A}^{'}$, oder in unserem Fall

$$E_x = \begin{cases} -\frac{\partial A_0}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \end{cases}$$

und

$$E_y = \begin{cases} -\frac{\partial A_0}{\partial y} \\ -\frac{\partial A}{\partial x} \end{cases} ,$$

sodaß gelten muß

$$\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial A_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A_0}{\partial y} \tag{3.11.8}$$

Die Gleichungen (3.11.8) faßt man als Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen für die komplexe Funktion

$$w(\eta) = A_0 - \imath A, \quad \eta = x + \imath y \tag{3.11.9}$$

auf. Die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen für den Real- und Imaginärteil der komplexen Funktion $w(\eta)$ besagt, daß $w(\eta)$ eine analytische Funktion des komplexen Arguments $\eta = x + \imath y$ ist. Analytisch heißt: In jedem Punkt η der komplexen Ebene besitzt $w(\eta)$ eine eindeutige Ableitung, unabhängig von der Richtung, in der diese gewählt wird. Die analytische Funktion $w(\eta)$ vermittelt eine konforme (d.h. winkeltreue) Abbildung der komplexen η-Ebene auf die komplexe w-Ebene (siehe Abbildung 3.15).

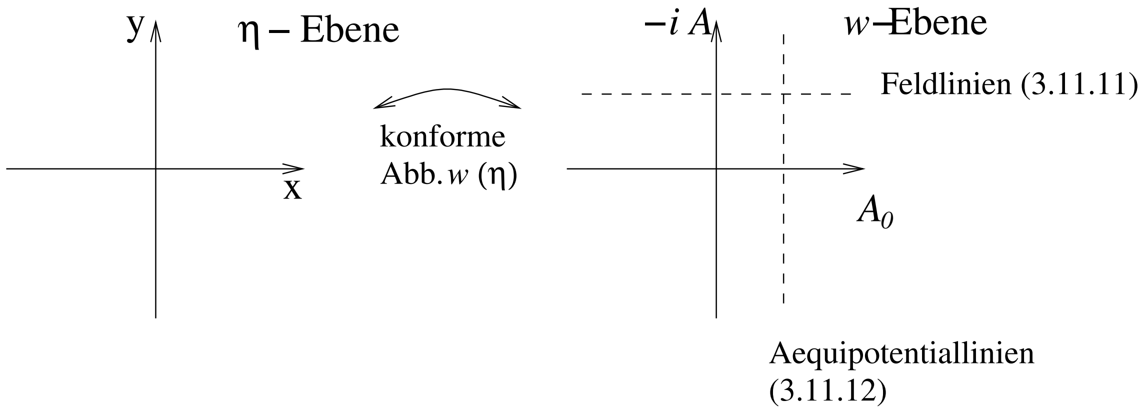

Abb. 3.15: Zur konformen Abbildung w.

Bedeutung von A und A_0: Die Kraftlinien des elektrischen Feldes werden in der η-Ebene durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

beschrieben, d.h.

$$E_x dy = E_y dx \tag{3.11.10}$$

Mit $E_y = -\partial_x A$ und $E_x = \partial_y A$ folgt dann nach Einsetzen in Gleichung (3.11.10)

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} dy + \frac{\partial A(x,y)}{\partial x} dx = dA(x,y) = 0,$$

oder

$$A(x,y) = const. \tag{3.11.11}$$

in der w-Ebene, d.h. die Feldlinien werden durch die Gleichung $A = const.$ beschrieben. Weil die Äquipotentiallinien senkrecht zu den Feldlinien stehen, entsprechen die Äquipotentiallinien der Gleichung

$$A_0(x,y) = const. \tag{3.11.12}$$

Also sind die Äquipotentiallinien durch die Gleichung $\Re w(\eta) = const.$ und die Feldlinien durch die Gleichung $\Im w(\eta) = const.$ bestimmt.

3.11.2 Methode der konformen Abbildung

Sowohl der Realteil (A_0) als auch der Imaginärteil ($-A$) der analytischen Funktion $w(\eta)$ genügen der Poissongleichung im ladungsfreien Raum, denn nach Gleichungen (3.11.8) folgt aus

$$\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial A_0}{\partial x}$$

daß

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 A_0}{\partial y \partial x} \quad , \tag{3.11.13}$$

und aus

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A_0}{\partial y}$$

folgt

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A_0}{\partial x \partial y} \quad . \tag{3.11.14}$$

Die Summe der Gleichungen (3.11.13) und (3.11.14) liefert dann sofort

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$$

oder

$$\Delta(-A) = 0$$

Analog zeigt man $\Delta A_0 = 0$.
Anstatt eine Lösung der Potentialgleichung zu berechnen, sucht man aus der Klasse der analytischen Funktionen diejenige heraus, die die Randbedingungen des betreffenden physikalischen Problems erfüllt. Die Linien konstanten Realteils ergeben dann, wie bewiesen, die Äquipotentiallinien, die Linien konstanten Imaginärteils ergeben die Feldlinien.
Die Suche der analytischen Funktionen $w(\eta)$ geschieht meist durch intelligentes Raten.

3.11.3 Beispiel: Gerader geladener Draht durch den Ursprung und senkrecht zur Ebene

Wir betrachten einen geraden geladenen Draht durch den Ursprung und senkrecht zur $x-y$-Ebene (siehe Abb. 3.16). Wir führen ebene Polarkoordinaten durch $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ ein.

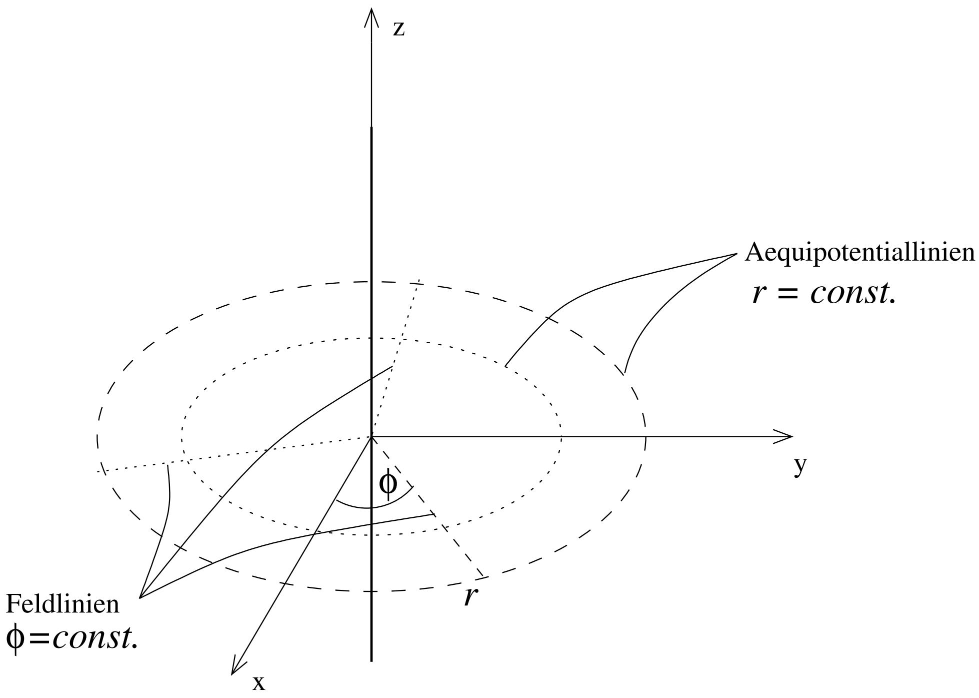

Abb. 3.16: Gerader Draht mit Äquipotential- und Feldlinien.

Wegen der Rotationssymmetrie sind die Äquipotentiallinien durch $r = const.$ gegeben. Damit liegen die Feldlinien orthogonal dazu, $\phi = const.$. Für die Feldlinien in der komplexen η-Ebene gilt also $\phi = const.$, aber r variabel. Da die Feldlinien in der w-Ebene durch die Linien $A = const$ bestimmt sind, darf die z-Komponente des skalaren Vektorpotentials A nicht von r abhängen, d. h. $A = A(\phi)$.
Ebenso gilt: für die Äquipotentiallinien in der komplexen η-Ebene ist $r = const.$, aber ϕ variabel. Da die Äquipotentiallinien in der w-Ebene durch die Linien $A_0 = const.$ bestimmt sind, darf A_0 nicht von ϕ abhängen, d.h. $A_0 = A_0(r)$.
Wir suchen daher eine analytische Funktion

$$w(\eta) = A_0(r) - \imath A(\phi) \quad , \tag{3.11.15}$$

die konzentrische Kreise um den Ursprung O in der η-Ebene auf $\Re w = const.$ und Geraden durch O in der η-Ebene auf $\Im w = const.$ abbildet.
Mit den Umkehrtransformationen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\phi = \arctan(y/x)$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} = \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} = \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

Damit folgt für die erste Cauchy-Riemannsche-Gleichung (3.11.8a)

$$\frac{\partial A(\phi)}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi} = -\frac{\partial A_0(r)}{\partial x} = -\cos\phi\frac{\partial A_0(r)}{\partial r} \quad ,$$

oder

$$\frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi} = -r\frac{\partial A_0(r)}{\partial r} \tag{3.11.16}$$

Für die zweite Cauchy-Riemannsche-Gleichung (3.11.8b)

$$\frac{\partial A(\phi)}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial A_0(r)}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial A_0(r)}{\partial r}$$

folgt ebenfalls Gleichung (3.11.16). Für alle r und ϕ muss die nur von ϕ abhängige linke Seite dieser Gleichung gleich der nur von r abhängigen rechten Seite sein. Beide Seiten müssen deshalb gleich einer Konstanten c sein:

$$r\frac{\partial A_0(r)}{\partial r} = -\frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi} = c$$

Als Lösungen erhalten wir

$$A_0(r) = c_1 + c\ln r, \quad A(\phi) = c_2 - c\phi$$

mit den beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2, die wir gleich Null setzen $c_1 = c_2 = 0$, d.h.

$$A_0(r) = c\ln r, \quad A(\phi) = -c\phi \tag{3.11.17}$$

Gemäß Gleichung (3.11.15) folgt dann

$$w(\eta) = c(\ln r + \imath\phi) = c\ln\eta \tag{3.11.18}$$

mit $\eta = r\exp(\imath\phi) = r(\cos\phi + \imath\sin\phi) = x + \imath y$.
Für das elektrische Feld folgt dann

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A_0(r) = -\frac{c}{r}\vec{e}_r$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Feldlinien und Äquipotentiallinien erhalten wir aus der Umkehrung der Transformation (3.11.18)

$$\begin{aligned}\eta = x + \imath y &= \exp(\frac{w(\eta)}{c}) = \exp(\frac{A_0 - \imath A}{c}) \\ &= \exp(\frac{A_0}{c})\exp(-\frac{\imath A}{c}) = \exp(\frac{A_0}{c})[\cos(-\frac{A}{c}) + \imath\sin(-\frac{A}{c})] \quad ,\end{aligned}$$

sodaß

$$x = \exp(\frac{A_0}{c})\cos(\frac{A}{c}), \quad y = -\exp(\frac{A_0}{c})\sin(\frac{A}{c}) \tag{3.11.19}$$

Daraus folgt

$$x^2 + y^2 = \exp(\frac{2A_0}{c}) \quad ,$$

sodaß sich für $A_0 = const.$ tatsächlich konzentrische Kreise als Äquipotentiallinien ergeben. Aus den Gleichungen (3.11.19) folgt weiterhin

$$\frac{y}{x} = -\tan\frac{A}{c} \quad ,$$

sodaß sich für $A = const.$ tatsächlich Geraden durch den Ursprung als Feldlinien ergeben.

3.12 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separationsansatz

Entsprechen die Randbedingungen den Koordinatenflächen in einem orthogonalen Koordinatensystem, so bietet sich die Lösung durch Separationsansatz in diesen Koordinaten an.

3.12.1 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Mit Gleichung (2.5.6.6) für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten erhalten wir für die Laplace-Gleichung

$$\Delta A_0(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial A_0}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\hat{D}A_0 = 0 \tag{3.12.1}$$

mit dem Winkelanteil

$$\hat{D} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{3.12.2}$$

Durch den Separationsansatz

$$A_0(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi) \tag{3.12.3}$$

erhalten wir für die Laplace-Gleichung (3.12.1)

$$\frac{Y(\theta,\phi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}) + \frac{R(r)}{r^2}\hat{D}Y(\theta,\phi) = 0 \quad ,$$

oder

$$-\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\hat{D}Y(\theta,\phi) = \frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}) = l(l+1) \tag{3.12.4}$$

gleich der Separationskonstanten $l(l+1)$. Diese spezielle Schreibweise der Separationskonstanten wird sich gleich als sehr sinnvoll erweisen.

Für den Radialteil $R(r)$ gilt nach (3.12.4) die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) = l(l+1)R$$

mit der allgemeinen Lösung ($A, B = const.$)

$$R(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)} \tag{3.12.5}$$

Für den Winkelanteil $Y(\theta, \phi)$ gilt nach (3.12.4) die Differentialgleichung

$$\hat{D}Y(\theta,\phi) + l(l+1)Y(\theta,\phi) = 0$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y(\theta,\phi) = 0 \tag{3.12.6}$$

Führen wir $\mu = \cos\theta$ ein, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{1}{\frac{\partial\mu}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \ ,$$

sodaß

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\mu} = -\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\mu},$$

und Gleichung (3.12.6) reduziert sich auf

$$\frac{\partial}{\partial\mu}[(1-\mu^2)\frac{\partial Y}{\partial\mu}] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y = 0$$

oder

$$(1-\mu^2)\Big(\frac{\partial}{\partial\mu}[(1-\mu^2)\frac{\partial Y}{\partial\mu}] + l(l+1)Y\Big) = -\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} \tag{3.12.7}$$

Zur Lösung von Gleichung (3.12.7) machen wir erneut einen Separationsansatz

$$Y(\mu,\phi) = P(\mu)Q(\phi) \tag{3.12.8}$$

und erhalten damit aus Gleichung (3.12.7)

$$\frac{1-\mu^2}{P(\mu)}\Big(\frac{\partial}{\partial\mu}[(1-\mu^2)\frac{\partial P}{\partial\mu}] + l(l+1)P\Big) = -\frac{1}{Q(\phi)}\frac{\partial^2 Q}{\partial\phi^2} = m^2 \tag{3.12.9}$$

mit der Separationskonstanten m^2, da die linke Seite der Gleichung (3.12.9) nur von μ abhängt und die rechte Seite nur von ϕ abhängt.
Für den ϕ-Anteil finden wir dann

$$\frac{d^2Q}{d\phi^2} + m^2 Q(\phi) = 0$$

mit der Lösung

$$Q(\phi) = A_1 \exp(\imath m \phi)$$

O.B.d.A. setzen wir $A_1 = 1$, sodaß

$$Q(\phi) = \exp(\imath m \phi) \tag{3.12.10}$$

Die Forderung der Periodizität $Q(\phi + 2\pi) = Q(\phi)$ an diese Lösung führt auf die Bedingung

$$\exp(\imath 2\pi m) = \cos 2\pi m + \imath \sin 2\pi m = 0$$

und damit auf die Werte

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \text{ ganzzahlig} \tag{3.12.11}$$

für die Separationskonstante.
Für den μ-Anteil finden wir aus Gleichung (3.12.9)

$$\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}]P(\mu) = 0 \tag{3.12.12}$$

3.12.2 Zylindersymmetrie

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, daß die Lösung (3.12.3)

$$A_0 = R(R)P(\mu)Q(\phi)$$

nicht von ϕ abhängt, d.h. nach Gleichung (3.12.10) $m = 0$. Dann reduziert sich Gleichung (3.12.12) auf die Legendresche Differentialgleichung (vergl. mit (3.9.15))

$$\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu} + \ l(l+1)P(\mu) = 0 \ \ , \tag{3.12.13}$$

d.h.

$$P(\mu) = P_l(\mu) \tag{3.12.14}$$

mit $l = 0, 1, 2, 3...$: Die allgemeine Lösung (3.12.3) lautet dann mit Gleichung (3.12.5)

$$A_0(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \Big(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\Big) P_l(\cos\theta) \tag{3.12.15}$$

Die Konstanten A_l und B_l werden mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (3.9.23) der Legendre-Polynome aus den Randbedingungen für das Potential A_0 bestimmt.

3.12.3 Entwicklung nach Legendre-Polynomen

Die Gleichungen (3.9.23) und (3.9.24) lassen sich zur *Orthonormalitätsrelation*

$$\int_{-1}^{1} d\mu P_l(\mu) P_n(\mu) = \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_l(\theta) P_n(\theta) = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,l} \tag{3.12.16}$$

zusammenfassen.

Während Gleichung (3.12.16) für $n \neq l$ bereits in Kap. 3.9.2 bewiesen wurde, beweisen wir jetzt zunächst diese Relation für den Fall $n = l$: Mit der erzeugenden Funktion (3.9.5) folgt

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = [\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n]^2$$

Integrieren wir diese Beziehung über x und nutzen die Orthogonalität (3.9.23) aus, so folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{m=0}^{\infty} t^m \int_{-1}^{1} dx P_n(x) P_m(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{m=0}^{\infty} t^m \int_{-1}^{1} dx P_n^2(x) \delta_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} dx P_n^2(x) \end{aligned} \tag{3.12.17}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung substituieren wir

$$y = 1 + t^2 - 2tx \quad ,$$

d.h. in Umkehrung

$$x = \frac{1 + t^2 - y}{2t} \quad ,$$

sodaß

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2t}$$

und für $x = -1$ ist $y = 1 + t^2 + 2t = (1+t)^2$, und für $x = +1$ ist $y = 1 + t^2 - 2t = (1-t)^2$. Damit erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2t} \ln(\frac{1+t}{1-t})^2 = \frac{1}{t} \ln\frac{1+t}{1-t}$$

Die rechte Seite dieser Beziehung entwickeln wir in eine Potenzreihe im Bereich $-1 \leq t \leq 1$ (Übungsaufgabe) mit dem Ergebnis

$$\frac{1}{t} \ln\frac{1+t}{1-t} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$$

Eingesetzt in Gleichung (3.12.17),

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} dx P_n^2(x) \quad ,$$

folgt die Behauptung

$$\int_{-1}^{1} dx P_n^2(x) = \frac{2}{2n+1}$$

Q.E.D.
Mit der Orthonormalitätsrelation (3.12.16) können wir jede beliebige stetige Funktion $f(\mu)$ im Intervall $-1 \leq \mu \leq 1$ nach Legendre-Polynomen entwickeln:

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad , \tag{3.12.18}$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten a_n mit Hilfe der Orthonormalitätsrelation (3.12.16) berechnet werden. Es gilt offensichtlich

$$\int_{-1}^{1} d\mu f(\mu) P_l(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} d\mu P_n(\mu) P_l(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_{n,l} \int_{-1}^{1} d\mu P_l^2(\mu) = \frac{2a_l}{2l+1}$$

oder

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} d\mu f(\mu) P_l(\mu)$$

Benutzen wir wieder den Index n, so folgt

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} d\mu f(\mu) P_n(\mu) \tag{3.12.19}$$

Es gilt also die Entwicklung

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \int_{-1}^{1} d\mu f(\mu) P_n(\mu) \tag{3.12.20}$$

3.12.4 Zylindersymmetrisches Beispiel: Leitende Kugel im homogenen Feld

Als Beispiel betrachten wir, wie in Abbildung 3.17 skizziert, eine leitende Kugel vom Radius r_0 in einem vorher homogenen Feld $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ mit $E_0 = const.$, d.h.

$$A_0(r \to \infty) = -E_0 z$$

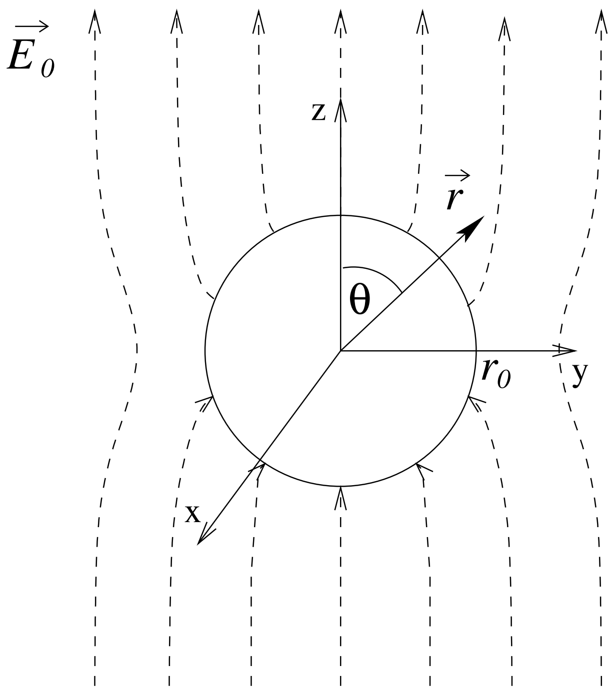

Abb. 3.4: Leitende Kugel im homogenen $\vec{E}$-Feld.

Drücken wir $z = r\cos\theta = r\mu$ durch Kugelkoordinaten aus, so gilt mit Gleichung (3.9.20) als Randbedingung

$$A_0(r \to \infty) = -E_0 r\mu = -E_0 r P_1(\mu) \tag{3.12.21}$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung (3.12.15) im Außenraum $r \geq r_0$

$$A_0(r \geq r_0, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} P_n(\mu)$$

muß für $r \to \infty$ gleich der Randbedingung (3.12.21) sein. Daraus folgt, daß

$$a_0 = 0 \;\; a_n = 0 \quad \forall n > 1$$

und $a_1 = -E_0$. Wir finden also

$$A_0(r \geq r_0, \mu) = a_0 + \frac{b_0}{r} + \;(\frac{b_1}{r^2} - E_0 r)P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}} \tag{3.12.22}$$

Wir wählen das Potential auf dem Rand der leitenden Kugel zu

$$V_0 = A_0(r_0) = 0 \quad \forall \mu$$

Gemäß Gleichung (3.12.22) folgt dann aus der Forderung

$$A_0(r_0) = \frac{b_0}{r_0} + \;(\frac{b_1}{r_0^2} - E_0 r_0)P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{P_n(\mu)}{r_0^{n+1}} = 0$$

für alle μ, daß

$$b_0 = 0, \quad b_n = 0 \text{ für } n \geq 2$$

und $b_1 = E_0 r_0^3$. Mit den nicht-verschwindenden Koeffizienten a_1 und b_1 folgt für das Potential im Außenraum

$$A_0(r \geq r_0, \mu) = (\frac{E_0 r_0^3}{r^2} - E_0 r) P_1(\mu) = -E_0 r P_1(\mu)(1 - \frac{r_0^3}{r^3}) \tag{3.12.23}$$

Für die induzierte Ladung auf der Kugeloberfläche erhält man

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_0}{\partial r}|_{r=r_0} = -\frac{P_1(\mu)}{4\pi}(-2\frac{E_0 r_0^3}{r^3} - E_0)_{r=r_0} = \frac{3E_0 P_1(\mu)}{4\pi} = \frac{3E_0 \cos\theta}{4\pi} \tag{3.12.24}$$

σ ist positiv in der oberen Halbkugel $0 \leq \theta \leq \pi/2$ und negativ in der unteren Halbkugel $-\pi/2 \leq \theta < 0$.
Aufgabe: Auf der Oberfläche der Kugel sei die spezielle Ladungsdichte $\sigma_0(\theta)$ aufgebracht. Man berechne das entsprechende Potential im Außenraum für die Fälle (a) $\sigma_0(\theta) = K \cos\theta$, (b) $\sigma_0(\theta) = K \cos 3\theta$ und (c) $\sigma_0(\theta) = K$, wbei K eine Konstante ist.

3.12.5 Assoziierte Legendre-Polynome

Bei Fallenlassen der Beschränkung auf Zylindersymmetrie ($m \neq 0$ in Lösung (3.12.10)) wird der Winkelanteil durch Gleichung (3.12.12) beschrieben,

$$\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}]P(\mu) = 0 \quad ,$$

die symmetrisch in m ist. Für die Lösung setzen wir an

$$P(\mu) = P^m(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2} w_m(\mu) \quad , \tag{3.12.25}$$

sodaß

$$\frac{dP^m}{d\mu} = (1-\mu^2)^{m/2}\frac{dw_m}{d\mu} - m\mu(1-\mu^2)^{(m/2)-1} w_m(\mu)$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{d}{d\mu}\Big[(1-\mu^2)^{(m/2)+1}\frac{dw_m}{d\mu} - m\mu(1-\mu^2)^{m/2} w_m\Big]$$
$$+ \Big[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\Big](1-\mu^2)^{m/2} w_m = 0 \quad ,$$

oder nach Ausdifferenzieren

$$\frac{m+2}{2}(1-\mu^2)^{m/2}(-2\mu)\frac{dw_m}{d\mu} + (1-\mu^2)^{(m/2)+1}\frac{d^2 w_m}{d\mu^2}$$

$$-m(1-\mu^2)^{m/2}w_m - \mu\frac{m^2}{2}(1-\mu^2)^{(m/2)-1}(-2\mu)w_m - m\mu(1-\mu^2)^{m/2}\frac{dw_m}{d\mu}$$

$$+\Big[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Big](1-\mu^2)^{m/2}w_m = 0$$

Wir dividieren durch den Faktor

$$(1-\mu^2)^{(m/2)-1}$$

und erhalten

$$(1-\mu^2)^2\frac{d^2w_m}{d\mu^2} - (m+2)\mu(1-\mu^2)\frac{dw_m}{d\mu}$$

$$-\mu m(1-\mu^2)\frac{dw_m}{d\mu} + w_m\Big[-m(1-\mu^2)+m^2\mu^2+l(l+1)(1-\mu^2)-m^2\Big] = 0 \quad ,$$

oder

$$(1-\mu^2)^2\frac{d^2w_m}{d\mu^2} - \mu(1-\mu^2)(m+2+m)\frac{dw_m}{d\mu} + (1-\mu^2)w_m[l(l+1)-m^2-m] = 0$$

Nach Division durch $(1-\mu^2)$ ergibt sich

$$(1-\mu^2)\frac{d^2w_m}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu\frac{dw_m}{d\mu} + [l(l+1)-m(m+1)]w_m = 0 \tag{3.12.26}$$

Für $m=0$ reduziert sich diese Gleichung auf die Legendresche Differentialgleichung (3.9.15) für $w_0(\mu)$

$$(1-\mu^2)\frac{d^2w_0}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dw_0}{d\mu} + l(l+1)w_0 = 0 \quad ,$$

also

$$w_0(\mu) = P_l(\mu) \quad \text{und} \quad P^0(\mu) = P_l(\mu) \tag{3.12.27}$$

Differenzieren wir Gleichung (3.12.26) nach μ, so erhalten wir mit der Notation $w_m' = \frac{dw_m}{d\mu}$, $w_m'' = \frac{d^2w_m}{d\mu^2}$ usw.,

$$(1-\mu^2)w_m''' - 2\mu w_m'' - 2(m+1)\mu w_m'' - 2(m+1)w_m' + [l(l+1)-m(m+1)]w_m'$$

$$= (1-\mu^2)w_m''' - 2\mu[1+m+1]w_m'' + [l(l+1)-m(m+1)-2(m+1)]w_m' = 0 \quad ,$$

oder

$$(1-\mu^2)w_m''' - 2(m+2)\mu w_m'' + [l(l+1)-(m+1)(m+2)]w_m' = 0 \quad ,$$

d.h. die Funktion w_m' erfüllt die Differentialgleichung (3.12.26) für w_{m+1} für $m>0$:

$$(1-\mu^2)w''_{m+1} - 2(m+2)\mu w'_{m+1} + [l(l+1)-(m+1)(m+2)]w_{m+1} = 0$$

Es ist also

$$w_{m+1} = w'_m = \frac{dw_m}{d\mu} \tag{3.12.28}$$

Mit Gleichung (3.12.27) finden wir dann

$$w_1 = \frac{dw_0}{d\mu} = \frac{dP_l(\mu)}{d\mu} \quad ,$$

$$w_2 = \frac{dw_1}{d\mu} = \frac{d^2P_l(\mu)}{d\mu^2}$$

und allgemein

$$w_m = \frac{d^mP_l(\mu)}{d\mu^m}$$

Gemäß Gleichung (3.12.25) erhalten wir als Lösung für $m \neq 0$ die *assoziierten oder zugeordneten Legendre-Polynome*

$$P_l^m(\mu)(\equiv P^m(\mu)) = (1-\mu^2)^{|m|/2}\frac{d^mP_l(\mu)}{d\mu^m} \quad , \tag{3.12.29}$$

die sich aus den Legendre-Polynomen berechnen lassen.
Mit der Formel von Rodrigues (3.9.18) für $P_l(\mu)$,

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2-1)^l \quad ,$$

folgt die auch für negative Werte von m, $-l \leq m \leq l$ gültige Beziehung

$$P_l^m(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{|m|/2}}{2^l l!}\frac{d^{m+l}}{d\mu^{m+l}}(\mu^2-1)^l \tag{3.12.30}$$

Unter Ausnutzung der Leibnitz-Formel

$$\frac{d^n}{dt^n}[A(t)B(t)] = \sum_{s=0}^{\infty}\binom{n}{s}[\frac{d^{n-s}}{dt^{n-s}}A(t)][\frac{d^s}{dt^s}B(t)] \quad ,$$

wobei

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)!s!}$$

zeigt man (Übungsaufgabe), daß

$$P_l^{-m}(\mu) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\mu) \tag{3.12.31}$$

Weiterhin gilt die Orthonormalitätsrelation (Übungsaufgabe) für zugeordnete Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_p^m(x) P_q^m(x) = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{p,q} \tag{3.12.32}$$

Für den Winkelanteil (3.12.8) erhalten wir mit den Lösungen (3.12.10) und (3.12.30) die sogenannten *Kugelflächenfunktionen*

$$Y_{l,m}(\mu,\phi) = N_{l,m} P_l^m(\mu) \exp(\imath m\phi) = N_{l,m} P_l^m(\cos\theta) \exp(\imath m\phi) \tag{3.12.33}$$

mit m und l ganzzahlig und $-l \leq m \leq l$. $N_{l,m}$ ist ein Normierungsfaktor derart, daß

$$\int d\Omega |Y_{l,m}(\mu,\phi)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu\ |Y_{l,m}(\mu,\phi)|^2 = 1$$

Man erhält (Übungsaufgabe)

$$N_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \tag{3.12.34}$$

Damit gilt die Orthonormalitätsrelation (Übungsaufgabe) für Kugelflächenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu Y_{l,m}(\mu,\phi) Y^*_{l',m'}(\mu,\phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \tag{3.12.35}$$

Die allgemeine Lösung (3.12.3) der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten lautet damit

$$A_0(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right) Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{3.12.36}$$

3.12.6 Inneres und äußeres Dirichletproblem für die Kugel

Das *innere Dirichlet-Problem* ist gegeben durch

$$\Delta A_0(r,\theta,\phi) = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq R \tag{3.12.37}$$

mit der Randbedingung

$$A_0(R,\theta,\phi) = h(\theta,\phi) \tag{3.12.38}$$

Weil die Lösung (3.12.36) auch für $r \to 0$ endlich sein soll, müssen alle Koeffizienten $B_{lm} = 0$ sein, d.h.

$$A_0(r \leq R,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} r^l Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

Die Randbedingung (3.12.38) liefert

$$h(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm} R^l Y_{l,m}(\theta,\phi) \quad , \tag{3.12.39}$$

und über die Orthonormalitätsrelation (3.12.35) der Kugelflächenfunktionen berechnen sich die Entwicklungskoeffizienten A_{lm} zu

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu \; Y^*_{k,s}(\theta,\phi) h(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm} R^l \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu \; Y^*_{k,s}(\theta,\phi) Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm} R^l \delta_{k,l}\delta_{s,m} = A_{ks} R^k$$

Nach Umbenennung der Indizes ergibt sich also

$$A_{lm} = R^{-l} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu \; Y^*_{l,m}(\theta,\phi) h(\theta,\phi) \quad , \tag{3.12.40}$$

sodaß wir als Lösung erhalten:

$$A_0(r \le R, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} (\frac{r}{R})^l [\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu \; Y^*_{l,m}(\mu,\phi) h(\mu,\phi)] Y_{l,m}(\mu,\phi) \quad , \tag{3.12.41}$$

wobei

$$Y_{l,m}(\mu,\phi) = N_{lm} P_l^m(\mu) e^{\imath m\phi}, \quad N_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

Beim *äußeren Dirichlet-Problem* müssen alle Koeffizienten $A_{lm} = 0$ verschwinden, um eine endliche Lösung bei $r \to \infty$ zu erhalten. Es ergibt sich in analoger Weise

$$A_0(r \ge R, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} (\frac{r}{R})^{-(l+1)} [\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu \; Y^*_{l,m}(\mu,\phi) h(\mu,\phi)] Y_{l,m}(\mu,\phi) \quad . \tag{3.12.41}$$