0. Vorbemerkungen

0.1 Empfohlene Literatur

Bücher zur Theoretischen Elektrodynamik:
Jackson: Klassische Elektrodynamik
D. J. Griffith: Introduction to Electrodynamics
Fließbach

Bücher für mathematische Formeln ("Grundausstattung") :
K. Rottmann, Mathematische Formelsammlung
I. N. Bronstein, K. A. Semedjajew, G. Musiol, H. Mühlig: Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch Verlag
M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards (oder Dover Publ.)
I, S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: Tabeles of Integrals, Series and Products (deutsche Übersetzung: Harri Deutsch Verlag)

Bücher für mathematische Physik ("Grundausstattung") :
G. Arfken: Mathematical Methods for Physicists, Academic Press
C. R. Wylie: Advanced Engineering Mathematics, McGraw-Hill
P. M. Morse, H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, Vol. I and II, McGraw-Hill

1. Einführung

1.1 Vier Bereiche der Mechanik

In Bezug auf die Geschwindigkeit und die Größe von physikalischen Objekten, kann man, wie in Tabelle 1 skizziert, die Mechanik in vier Bereiche aufteilen.

Tabelle 1 : Bereiche der Mecahnik

	$\Longrightarrow$	kleinere Abstände
$\Downarrow$ höhere	klassische Mechanik (Newton)	Quantenmechanik (Schrödinger, Heisenberg, Bohr u.a.)
Geschwin-digkeit	Relativistische Mechanik (Einstein)	Quantenfeldtheorie (Dirac, Pauli, Schwinger, Feynman u.a.)

Die Newtonsche Mechanik funktioniert gut im "alltäglichen Leben", versagt aber zum einen für Objekte, die sich mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen, deren Dynamik mit der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden muß. Zum anderen versagt die Newtonsche Mechanik auch bei der Anwendung auf sehr kleine Objekte auf der atomaren Größenskala, die mit der Quantenmechanik beschrieben werden müssen. Für Objekte, die klein *und* schnell sind, gilt die Quantenfeldtheorie, an deren Ausarbeitung seit 1930 gearbeitet wird. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir vorwiegend im Bereich der klassischen Mechanik bleiben.

1.2 Vier Grundkräfte der Natur

Es ist die Aufgabe der Mechanik, das Verhalten von physikalischen Systemen unter Einwirkung einer gegebenen *Kraft* zu beschreiben. Man unterscheidet heute zwischen vier Grundkräften, die nach abnehmender Stärke als
1) Starke Kraft
2) Elektromagnetische Kraft
3) Schwache Kraft
4) Gravitationskraft
bezeichnet werden.

Von diesen haben die starke und die schwache Kraft nur sehr geringe Reichweiten auf der Größenskala von Elementarteilchen und lassen sich daher nicht klassisch behandeln. Die Theorie des Gravitationsfeldes gehört zur klassischen Feldtheorie, wird aber umfassend in gesonderten Vorlesungen zur allgemeinen Relativitätstheorie behandelt. Damit verbleibt für die klassische Beschreibung nur das elektromagnetische Feld, das weitreichend über

makroskopische Abstände wirkt.
Die obige Einteilung in nur vier unterschiedliche Kräfte erscheint kurz. Es ist aber zu bedenken, daß die elektromagnetischen Kräfte auch Reibungskräfte und sämtliche Arten von chemischen Kräften, die die Moleküle zusammenhalten, umfassen. Damit sind die elektromagnetischen Kräfte die dominierenden Kräfte des täglichen Lebens und die einzigen, die vollständig verstanden sind. Die Theorie der elektromagnetischen Kräfte war und ist Vorbild für die Theorie der schwachen Wechselwirkung und für die Theorie der starken Wechselwirkung ("Chromodynamik"). Es fehlt uns heute noch, trotz umfangreicher Bemühungen, eine quantenmechanische Theorie der Gravitation, obwohl die klassische Theorie der Gravitation (Newton) und deren relativistische Verallgemeinerung (Einstein) vorliegen.

1.3 Historische Entwicklung der Elektrodynamik

Anfänglich waren *Elektrizität* (Katzenfell, Batterien, Ströme, Elektrolyse, Blitze u. ä.) und *Magnetismus* (Stabmagneten, Kompaßnadel, Nordpol u. ä.) getrennten Diszipline. 1820 aber entdeckte Oersted, daß elektrische Ströme magnetische Kompaßnadeln beeinflussen. Kurz danach behauptete Ampere richtigerweise, daß *alle* magnetischen Phänomene auf sich bewegenden elektrischen Ladungen basieren. 1831 entdeckte Faraday, daß ein bewegter Magnet einen elektrischen Strom verursacht. Als dann Maxwell und Lorentz die endgültige Theorie formulierten, waren Elektrizität und Magnetismus eng verbunden als Elektromagnetismus.
Faraday hatte schon vermutet, daß Licht elektrischen Ursprungs ist, was durch die Gleichungen von Maxwell nach Einführung des Verschiebungsstroms theoretisch begründet wurde. Die Entwicklung der *Optik* (Untersuchung von Linsen, Spiegeln, Prismen, Interferenz und Beugung) vollzog sich dann als Teil des Elektromagnetismus. Die bahnbrechenden Versuche von Heinrich Hertz im Jahr 1888 brachten dann die entscheidende Bestätigung der Theorie. Die damaligen Hauptbetätigungsfelder der Physik (Elektrizität, Magnetismus und Optik) waren damit um das Jahr 1900 in einer einzigen Theorie vereinheitlicht.
Seit dieser Zeit träumen viele Physiker von weiteren Vereinheitlichungen, angefangen mit Einstein, der die Gravitation mit der Elektrodynamik vereinheitlichen wollte. Seit ca. 1960 existiert die elektroschwache Theorie von Glashow, Weinberg und Salam, die die schwachen und elektromagnetischen Kräfte verbindet. Über die Grand Unified Theories (schwach, elektromagnetisch und stark) seit ca. 1970 gelangte man um 1980 zur Superstring Theory, die alle vier Grundkräfte in einer einzigen Theorie für alles ("theory of everything") beschreiben möchte. Die Vereinheitlichung der Kräfte ist nachwievor ein zentrales Arbeitsgebiet der theoretischen Physik, eingeleitet durch die erfolgreich gelungene Formulierung der theoretischen Elektrodynamik.

1.4 Eigenschaften der elektrischen Ladungen

Der Elektromagnetismus behandelt die Dynamik und Wechselwirkungen von elektrischen Ladungssystemen. Es ist daher sinnvoll, sich deren Haupteigenschaften in Erinnerung zu rufen:
1)*Es gibt immer zwei Ladungsarten*: Es gibt immer zwei Arten von Ladungen, die wir als positiv (+) und negativ (−) bezeichnen, und die sich in ihren Effekten aufheben. Warum gibt es nicht 8 oder 10 verschiedene Arten?
2) *Ladung ist erhalten*: Sie kann nicht erzeugt oder vernichtet werden; was jetzt vorhanden ist, war auch schon früher da. Eine positive Ladung kann eine negative Ladung annihilieren, aber eine positive Ladung kann nicht allein verschwinden. Die gesamte Ladung des Universums ist für alle Zeiten festgelegt.
3) *Ladung ist quantisiert*: elektrische Ladungen sind immer ganzzahlige Vielfache der Elementarladung e: das Proton hat $+e$, das Elektron $-e$, das Positron $+e$, das Neutron ist ungeladen, die Pi-Mesonen haben die Ladung $+e$, 0, $-e$, der Kohlenstoffkern die Ladung $+6e$. Niemals haben wir $5.831e$ oder $e/2$. Wir wissen aber, daß Protonen und Neutronen jeweils aus drei Quarks mit den Ladungen $\pm\frac{2}{3}e$ und $\pm\frac{1}{3}e$ bestehen, allerdings scheinen *freie* Quarks nicht in der Natur zu existieren. Aber selbst dieser Befund würde an der Quantisierung der Ladungen nichts ändern: wie würden dann $(e/3)$ als Elementarladung nehmen. Da die Elementarladung sehr klein ist, braucht man diese Quantisierung bei vielen makroskopischen Anwendungen nicht zu berücksichtigen.

1.5 Einheiten

Eine Plage der Elektrodynamik sind die verschiedenen Einheitensysteme, die die Verständigung zwischen Physikern erschwert. Dies ist weitaus schlimmer als in der klassischen Mechanik, in der das zweite Newtonsche Gesetz immer $\vec{F} = m\vec{a}$ ist, egal in welchen Einheiten die Kraft $\vec{F}$, die Masse m oder die Beschleunigung $\vec{a}$ gemessen werden.
Dies ist aber nicht der Fall in der Elektrodynamik, wo je nach Einheitensystem die Gleichungen anders lauten. Betrachten wir das Coulomb-Gesetz, das die Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 im Abstand $\vec{r} = r\vec{e}_r$ angibt. Im Gauß-System (CGS) gilt

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_R \quad \text{CGS}$$

Im SI-System (MKS) gilt

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_R \quad \text{SI}$$

und im Heaviside-Lorentz-System der Elementarteilchenphysik

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_R \quad \text{HL}$$

Das CGS-System hat theoretische Vorteile und wird deshalb auch im Folgenden benutzt. Das SI-System verwendet gebräuchliche Einheiten aus dem täglichen Leben wie Volt, Ampere und Watt. Auch die Lehrbücher verfahren hier nicht einheitlich, also Vorsicht bei der Konsultation anderer Literatur!

2. Mathematische Vorüberlegungen

Hinsichtlich der Definition von Skalaren und Vektoren, den Vektoroperationen wie Addition, Subtraktion und Multiplikationen insbesondere Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt verweise ich auf das Kap. 1 des Mechanik-Skripts. Ich setze dessen Inhalt im folgenden voraus und wiederhole hier die für die Elektrodynamik wichtigen Aspekte.

2.1 Differentiation und Integration von Vektoren

2.1.1 Differentiation von Vektoren

Der Vektor $\vec{A}$ kann eine Funktion des skalaren Parameters u sein, d.h. $\vec{A} = \vec{A}(u)$. In Komponentenschreibweise gilt dann

$$\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{e}_1 + A_y(u)\vec{e}_2 + A_z(u)\vec{e}_3 \tag{2.1.1}$$

Da die kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ nicht variabel sind, definiert man das **Differential** des Vektors als

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \Big[\frac{A_x(u+\Delta u) - A_x(u)}{\Delta u}\vec{e}_1 + \frac{A_y(u+\Delta u) - A_y(u)}{\Delta u}\vec{e}_2 + \frac{A_z(u+\Delta u) - A_z(u)}{\Delta u}\vec{e}_3 \Big] \tag{2.1.2}$$

sodaß

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_x(u)}{du}\vec{e}_1 + \frac{dA_y(u)}{du}\vec{e}_2 + \frac{dA_z(u)}{du}\vec{e}_3 \tag{2.1.3}$$

Analog ergeben sich höhere Ableitungen zu

$$\frac{d^n\vec{A}(u)}{du^n} = \frac{d^nA_x(u)}{du^n}\vec{e}_1 + \frac{d^nA_y(u)}{du^n}\vec{e}_2 + \frac{d^nA_z(u)}{du^n}\vec{e}_3 \tag{2.1.4}$$

Es gelten folgende Regeln, die man leicht über die Komponentendarstellung (2.1.1) beweist:

(a)

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \tag{2.1.5}$$

(b)

$$\frac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \tag{2.1.6}$$

(c)

$$\frac{d}{du}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} \tag{2.1.7}$$

(d) Falls $\Phi(u)$ eine skalare Funktion bezeichnet gilt

$$\frac{d}{du}(\Phi\vec{A}) = \Phi\frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\Phi}{du}\vec{A} \tag{2.1.8}$$

Wichtige physikalische Vektoren, die als Ableitungen von Vektoren definiert sind, sind die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \tag{2.1.9}$$

als Zeitableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ eines Punktteilchens und die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) \tag{2.1.10}$$

als Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{r}(t)$ und somit als zweite zeitliche Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

2.1.2 Integration von Vektoren

Analog zur Definition der Ableitung (2.1.2) eines Vektors definiert man das Integral eines Vektors $\vec{A}(u)$ über die Integrale seiner Komponenten

$$\begin{aligned}\int du\, \vec{A}(u) \equiv \int du \left[A_x(u)\vec{e}_1 + A_y(u)\vec{e}_2 + A_z(u)\vec{e}_3\right] = \\ \int du\, A_x(u)\, \vec{e}_1 + \int du\, A_y(u)\, \vec{e}_2 + \int du\, A_z(u)\, \vec{e}_3\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Als **Beispiel** betrachten wir den Vektor $\vec{A}(u) = (3u^2 - 1, 2u - 3, 6u^2 - 4u)$ und berechnen das Integral $\int_0^2 du\, \vec{A}(u)$. Entsprechend der Definition (1.7.2.1) ergibt sich

$$\int_0^2 du\, \vec{A}(u) = \int_0^2 du\, (3u^2 - 1, 2u - 3, 6u^2 - 4u) = [u^3 - u, u^2 - 3u, 2u^3 - 2u^2]_0^2 = (6, -2, 8) \tag{2.1.12}$$

2.2 Koordinatensysteme

Wir beginnen mit den **kartesischen Koordinaten** x, y, z. x, y, z eines Punktes P sind definiert als die Projektionen des Ortsvektors $\vec{r} = \overline{OP}$ auf die Achsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, d.h.

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad \text{mit } |\vec{e}_i| = 1, \;\; i = 1, 2, 3 \tag{2.2.1}$$

Wir betrachten jetzt zusätzlich **neue Koordinatensysteme** q_1, q_2, q_3 mit den Transformationsgleichungen

$$q_1 = q_1(x, y, z), \;\; q_2 = q_2(x, y, z), \;\; q_3 = q_3(x, y, z) \tag{2.2.2}$$

und der Umkehrtrabsformation

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \tag{2.2.3}$$

Der Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes P kann dann mittels Gleichung (2.2.3) als Funktion der krummlinigen Koordianten q_i aufgefaßt werden:

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3) = (x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)) \tag{2.2.4}$$

2.2.1 Koordinatenlinien und Koordinatenflächen

Hält man zwei dieser drei neuen Koordinaten konstant und variiert man nur die dritte neue Koordiante, so erhält man drei **Koordinatenlinien**:

$$
\begin{aligned}
L_1: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2 = c_2, q_3 = c_3)\\
L_2: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1 = c_1, q_2, q_3 = c_3)\\
L_3: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1 = c_1, q_2 = c_2, q_3)
\end{aligned}
$$

Ist eine dieser Koordinatenlinien keine Gerade, so spricht man von **krummlinigen Koordianten**.

Hält man nur eine neue Koordinate fest und variiert jeweils die beiden anderen, so erhält man **Koordinatenflächen**:

$$
\begin{aligned}
F_1: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1 = c_1, q_2, q_3)\\
F_2: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2 = c_2, q_3)\\
F_3: &\quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3 = c_3)
\end{aligned}
$$

Die Koordinatenlinien L_i entstehen jeweils durch Schnitt jeweils zwei dieser Koordinatenflächen.

2.2.2 Festlegung von Einheitsvektoren

Als normierten Basisvektor oder Einheitsvektor $\vec{e}_{q_1}$ im Punkt P wählen wir einen Vektor vom Betrag 1 tangential zur Koordinatenlinie L_1 ($q_2 = c_2$, $q_3 = c_3$) im Punkt P. Seine Richtung soll dem Durchlaufsinn der Koordinatenlinie bei wachsendem q_1 entsprechen:

$$\vec{e}_{q_1} \equiv \frac{\partial\vec{r}/\partial q_1}{|\partial\vec{r}/\partial q_1|} \tag{2.2.2.1}$$

oder für $i = 1, 2, 3$

$$\partial\vec{r}/\partial q_i = h_i \vec{e}_{q_i} \tag{2.2.2.2}$$

mit dem Skalenfaktor

$$h_i = |\partial\vec{r}/\partial q_i| \tag{2.2.2.3}$$

Dies führen wir am Beispiel der Zylinderkoordinaten vor.

2.2.3 Beispiel: Zylinderkoordinaten

Gemäß Abbildung 2.1 werden als neue Koordinaten gewählt:

ϕ: der Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors auf die $x-y$-Ebene und der x-Achse,

ρ: der Abstand des Punktes P von der $z-$Achse,

z : die Länge der Projektion des Ortsvektors auf die z-Achse.

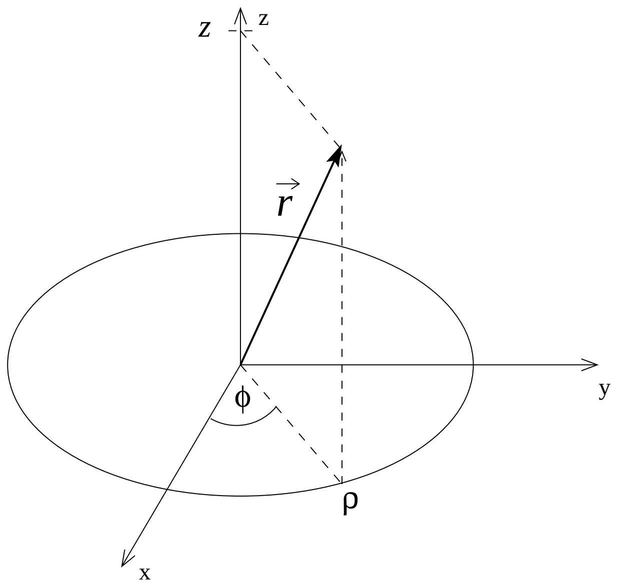

Abb. 2.1: Zur Einführung der Zylinderkoordinaten.

Aus Abbildung 2.1 erhalten wir als Transformationsgleichungen

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan(y/x), \quad z = z \tag{2.2.3.1}$$

und als Umkehrtransformation

$$x = \rho \cos \phi, \;\; y = \rho \sin \phi, \;\; z = z \tag{2.2.3.2}$$

mit den Einschränkungen $\rho \geq 0$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Man erkennt, daß jedem Tripel (ρ, ϕ, z) exakt nur ein Raumpunkt zugeordnet ist.

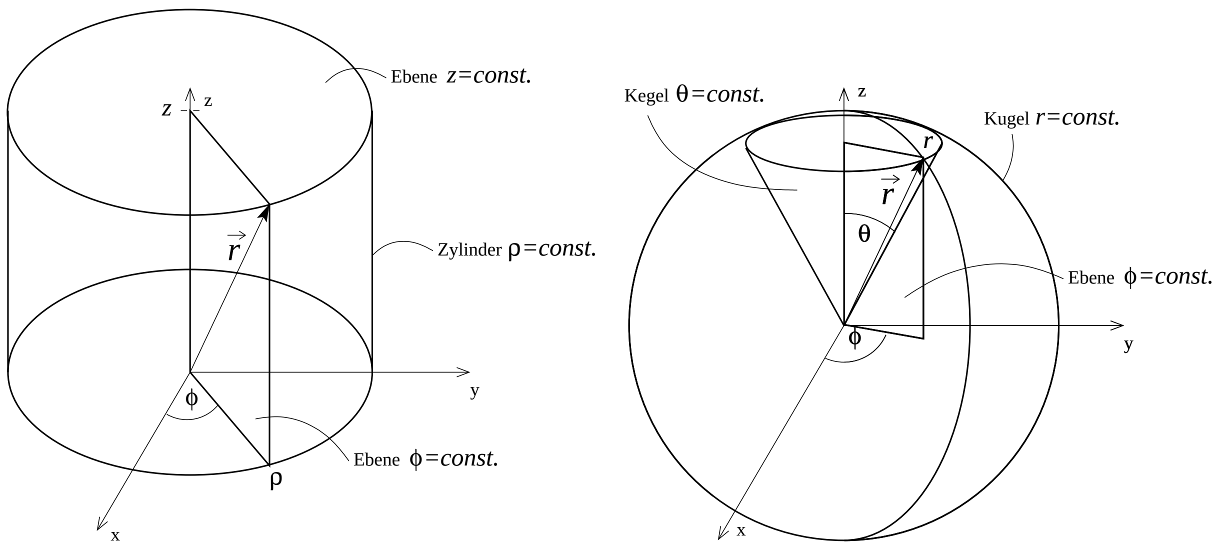

Abb. 2.2: Koordinatenflächen und Koordinatenlinien für Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten.

Abbildung 2.2 zeigt, daß die Koordinatenfläche für $\rho = const.$ einem Kreiszylinder um die z-Achse entspricht. Die Koordinatenfläche für $\phi = const.$ ergibt eine Halbebene, die die z-Achse enthält, während die Koordinatenfläche für $z = const.$ eine Ebene parallel zur $x-y$-Ebene ergibt.
Gemäß der Definition (2.2.2.2) erhalten wir mit $\vec{r} = (x, y, z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$ für die drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}/\partial\rho}{|\partial\vec{r}/\partial\rho|} = (\cos\phi, \sin\phi, 0) \tag{2.2.3.3}$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial\vec{r}/\partial\phi}{|\partial\vec{r}/\partial\phi|} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \tag{2.2.3.4}$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial\vec{r}/\partial z}{|\partial\vec{r}/\partial z|} = (0, 0, 1) \tag{2.2.3.5}$$

Offensichtlich ist $\vec{e}_\rho$ parallel zur $x-y$-Ebene und zeigt weg von der z-Achse; $\vec{e}_\phi$ ist ebenfalls parallel zur $x-y$-Ebene und ist die Tangente an den Kreis $z = const.$ und $\rho = const.$; $\vec{e}_z$ entspricht dem kartesischen Einheitsvektor $\vec{e}_3$.
Aus den Beziehungen (2.2.3.3)-(2.2.3.4) erhält man

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho\cos\phi - \vec{e}_\phi\sin\phi, \;\; \vec{e}_2 = \vec{e}_\rho\sin\phi + \vec{e}_\phi\cos\phi \tag{2.2.3.6}$$

Durch Berechnung des Spatprodukts

$$\vec{e}_\rho\cdot(\vec{e}_\phi\times\vec{e}_z) = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

läßt sich sofort überprüfen, daß die Zylinderkoordinaten ein orthogonales Koordinatensystem mit variablen Einheitsvektoren bilden.
Aufgrund der Variabilität der Einheitsvektoren folgt für die totalen zeitlichen Ableitungen

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\phi}\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 + (-\sin\phi, \cos\phi)\dot{\phi} + 0 = \dot{\phi}\vec{e}_\phi \;\;, \tag{2.2.2.7}$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = 0 + (-\cos\phi, -\sin\phi)\dot{\phi} + 0 = -\dot{\phi}\vec{e}_\rho \tag{2.2.3.8}$$

$$\frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0 \tag{2.2.3.9}$$

Gleichungen (2.2.3.7)-(2.2.3.9) stimmen mit dem allgemeinen Ergebis

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} \perp \vec{e}_j \tag{2.2.3.10}$$

überein, das sofort aus $\vec{e}_j\cdot\vec{e}_j = const.$ durch Differentiation nach t folgt:

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt}\cdot\vec{e}_j = 0 \tag{2.2.3.11}$$

Übungsaufgabe:
A2.2.1) Berechnen Sie die Einheitsvektoren sowie den Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor in Kugelkoordinaten $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Drücken Sie $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ als Funktion der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ aus.
Verifizieren Sie dabei folgende Ergebnisse:

$$\vec{e}_r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{2.2.3.12}$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \tag{2.2.3.13}$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \tag{2.2.3.14}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi \tag{2.2.3.15}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + [\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2]\vec{e}_\theta +$$

$$[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi})]\vec{e}_\phi \tag{2.2.3.16}$$

2.3 Vektorielle Differentialoperatoren

2.3.1 Gradient

Wir definieren zunächst skalare Felder und vektorielle Felder.
Definition: Skalare Felder : Unter einem skalaren Feld versteht man eine skalare Funktion $\psi(x, y, z)$, die jedem Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ den skalaren Wert $\psi(x_0, y_0, z_0)$ zuordnet, wie z. B. Temperaturfelder, Massendichte und Ladungsdichte.
Definition: Vektorielle Felder : Unter einem vektoriellen Feld versteht man eine Vektorfunktion $\vec{A}(x, y, z)$, die jedem Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ den Vektor $\vec{A}(x_0, y_0, z_0)$ zuordnet, wie z.B. Geschwindigkeitsfelder in Flüssigkeiten und Feldstärkevektoren $\vec{E}$, $\vec{H}$ in der Elektrodynamik.
Gegeben seien nun ein Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ und ein Skalarfeld $\psi(x, y, z)$.
Definition: Gradient: grad $\psi(x_0, y_0, z_0) = \vec{\nabla}\psi(x_0, y_0, z_0)$ ist der Vektor, der in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion ψ zeigt und dessen Betrag die Änderung von ψ pro Wegstrecke in Richtung des stärksten Anstiegs im Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ ist. (Beispiel: Höhenlinien auf Wanderkarten)

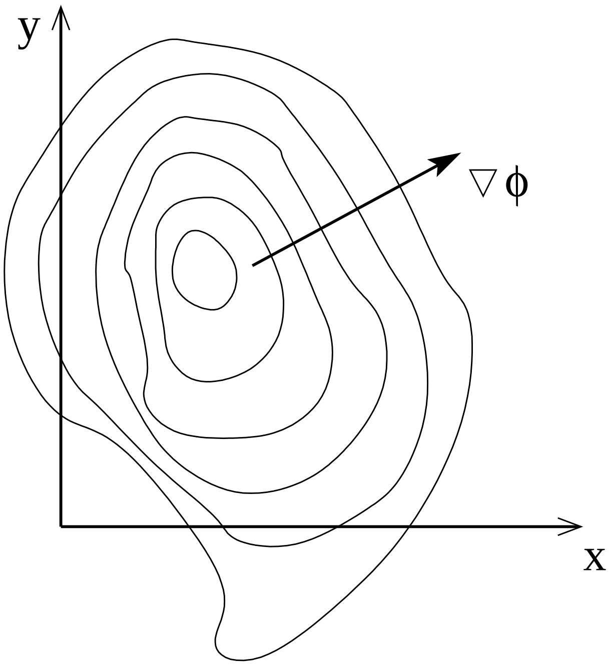

Abb. 2.3: Gradient in einer Höhenlinienkarte.

Jedem Punkt eines Skalarfeldes ordnet man so einen Gradientenvektor zu. Die Gesamtheit aller Gradientenvektoren bildet ein dem Skalarfeld zugeordnetes Vektorfeld, daß sich mathematisch durch

$$\vec{A}(x,y,z) = \text{grad } \psi(x,y,z) = \vec{\nabla}\psi(x,y,z) = \vec{e}_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{2.3.1.1}$$

darstellen läßt. Wir können also den Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ schreiben als

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.3.1.2}$$

Beweis : Zum Beweis der Beziehungen (2.3.1.1) und (2.3.1.2) berechnen wir das totale Differential der Funktion ψ, daß sich durch Taylor-Entwicklung der Funktion $\psi(x+dx, y+dy, z+dz)$ bis zur ersten Ordnung ergibt:

$$d\psi = \psi(x+dx, y+dy, z+dz) - \psi(x,y,z) \simeq \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz$$

Mit $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ läßt sich $d\psi$ auch als Skalarprodukt schreiben

$$d\psi = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r} = (\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}) \cdot (dx, dy, dz) = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz \tag{2.3.1.3}$$

womit die Behauptungen bewiesen sind. Q.E.D.
Definition: Äquipotentialfläche : Flächen, auf denen $\psi(x,y,z) = const.$ ist, werden als Äquipotentialflächen bezeichnet.

$\psi(x,y,z) = const.$ ist äquivalent zu einem verschwindendem totalen Differential ($d\psi = 0$), sodaß mit Gleichung (2.3.1.3) für Äquipotentialflächen folgt

$$d\psi = 0 = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}_{AF} \tag{2.3.1.4}$$

Es folgt der für die klassische Mechanik wichtige Satz: **Der Gradient von ψ steht stets senkrecht auf den Äquipotentialflächen von ψ :**

$$\vec{\nabla}\psi \perp d\vec{r}_{AF} \tag{2.3.1.5}$$

Der Gradientenvektor $\vec{\nabla}\psi$ zeigt immer in Richtung des stärksten Zuwachses von ψ, weil dann der Zuwachs $d\psi$ parallel zu $d\vec{r}$ ist, sodaß das Skalarprodukt $\vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}$ maximal ist.
Bildet man das Skalarprodukt des Gradientenvektor mit einem beliebigen zweiten Vektor $\vec{B}$, so erhält man den neuen Operator

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.3.1.6}$$

Angewandt auf ein Skalarfeld Φ erhält man das skalare Feld $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)$:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\Phi = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\Phi) \tag{2.3.1.7}$$

Angewandt auf den Vektor $\vec{C}$ erhält man

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{C} = (\sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial C_1}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial C_2}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial C_3}{\partial x_i}) \tag{2.3.1.8}$$

eine neuen Vektor.
Bei der Rechnung (2.3.1.8) ist die Reihenfolge wichtig:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} \neq \vec{C}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})$$

Der Ausdruck $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\vec{C})$ ist nicht definiert.
Neben der skalaren Verknüpfung (2.3.1.6) können wir auch das Kreuzprodukt bilden:

$$(\vec{B} \times \vec{\nabla})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.3.1.9}$$

Die Anwendung dieses Operators auf ein Skalarfeld Φ ergibt

$$[(\vec{B} \times \vec{\nabla})\Phi]_i = [(\vec{B} \times (\vec{\nabla}\Phi)]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \tag{2.3.1.10}$$

Die Zweifachanwendung des Gradienten-Operators

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \equiv \nabla^2 \equiv \Delta \tag{2.3.1.11}$$

ergibt den skalaren sogenannten **Laplace-Operator** Δ, der sowohl auf Skalare als auch auf Vektoren angewandt werden kann:

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} \quad , \tag{2.3.1.12}$$

$$\Delta\vec{B} = \nabla^2\vec{B} = (\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 B_2}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 B_3}{\partial x_i^2}) \tag{2.3.1.13}$$

2.3.2 Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$

Der Vektor-Operator (2.3.1.2)

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

erhält Bedeutung, wenn er auf irgendetwas wirken kann. $\vec{\nabla}T$ ist kein Produkt, sondern eine Vorschrift zur Ableitung des Skalars $T(\vec{r})$, d.h. **$\vec{\nabla}$ ist ein Vektor-Operator, der auf T wirkt.** $\vec{\nabla}$ verhält sich dann wie ein normaler Vektor, wenn wir "Produkt" mit "wirkt auf" ersetzen.
Es existieren drei Möglichkeiten der Multiplikation einen Vektors $\vec{a}$:
1) Produkt mit einem Skalar p: $p\vec{a}$,
2) Skalarprodukt mit einem anderen Vektor $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b}$,
3) Kreuzprodukt mit einem anderen Vektor $\vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b}$.
Entsprechend kann der Nabla-Operator auf drei Weisen wirken:
1) auf eine skalare Funktion $T(\vec{r})$: $\vec{\nabla}T(\vec{r})$ ("Gradient"),
2) auf eine Vektorfunktion $\vec{A}$ über das Skalarprodukt: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ("Divergenz"),
3) auf eine Vektorfunktion $\vec{v}$ über das Kreuzprodukt: $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ("Rotation").
Der Gradient wurde bereits ausführlich diskutiert, sodaß wir nun die Divergenz und die Rotation näher untersuchen.

2.3.3 Divergenz

Sei das Vektorfeld $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$ gegeben.
Definition: Divergenz : Als div $\vec{A}$ bezeichnet man das Skalarprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektor $\vec{A}$:

$$\text{div } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \tag{2.3.3.1}$$

Es folgt sofort mit Gleichung (2.3.1.11), daß man den Laplace-Operator als

$$\Delta = \text{div grad } = \text{div } \vec{\nabla} \tag{2.3.3.2}$$

darstellen kann.

Physikalisch interpretieren kann man die Divergenz eines Vektorfeldes als den Fluß eines Vektorfeldes durch ein Volumenelement dV. $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ repräsentiere die Flußrate (pro Einheitsfläche) einer Strömung durch eine Seitenfläche (siehe Abbildung 2.4).

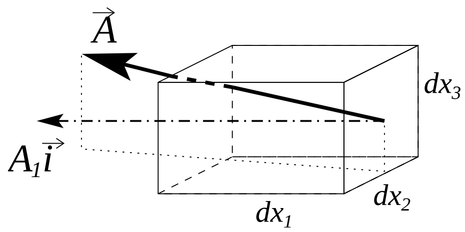

Abb. 2.4: Zur physikalischen Deutung der Divergenz.

Wir betrachten die Flußrate in x-Richtung durch den infinitesimal kleinen Quader mit den Seitenlängen dx_1,dx_2 und dx_3, die gegeben ist aus dem Produkt aus A_1 und der Seitenfläche dx_2dx_3. Am Ort x_1 ist die Flußrate gleich $A_1dx_2dx_3$ und am Ort $x_1 + dx_1$ gleich

$$(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_1}dx_1)dx_2dx_3$$

. Der Nettofluß ergibt sich als Differenz der beiden Flußraten zu

$$(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_1}dx_1)dx_2dx_3 - A_1dx_2dx_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}dV$$

Analog berechnet man den Nettofluß in y- und z-Richtung und nach Addition findet man für den Gesamtfluß durch den Quader

$$dV(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}dV = (\text{div } \vec{A})dV$$

Das Volumenelement dV stellt eine "Quelle" des Vektorfeldes dar falls div $\vec{A} > 0$; es stellt eine "Senke" des Vektorfeldes dar falls div $\vec{A} < 0$.
Geometrisch kann man die Divergenz als Maß für das Auseinanderlaufen eines Vektors an einem Punkt P interpretieren. Betrachten wir als erstes Beispiel die Vektorfunktion

$$\vec{A}_1 = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad , \tag{2.3.3.3}$$

die in Abbildung 2.5a schematisch dargestellt ist. Wir erhalten sofort einen relativ hohen Wert für die Divergenz,

$$\text{div } \vec{A}_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

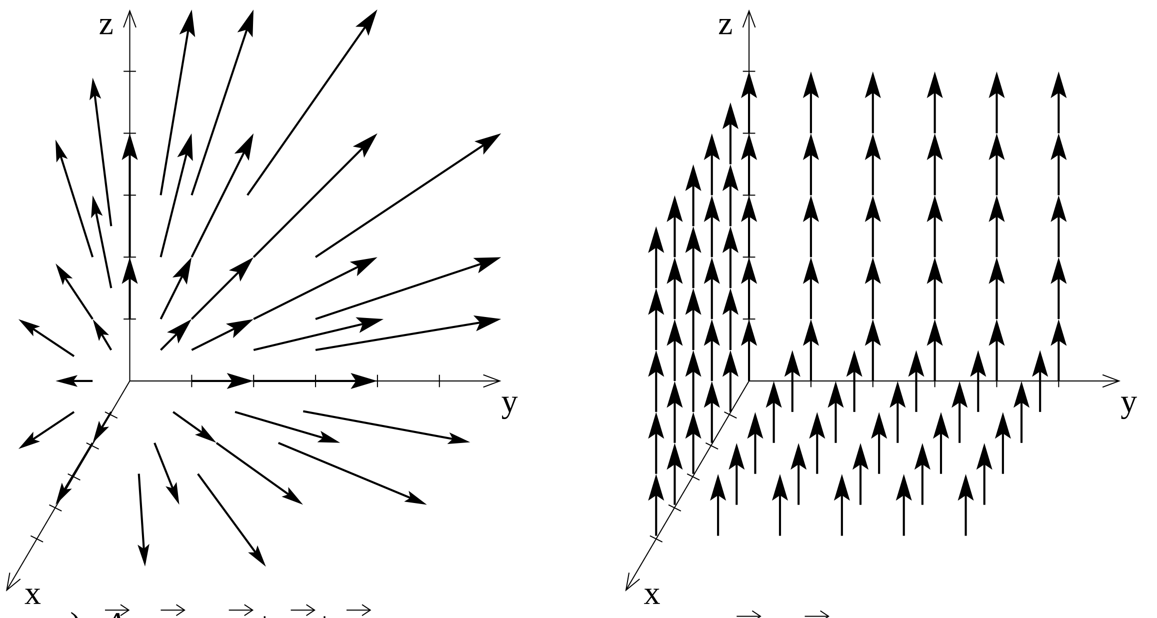

Abb. 2.5: Divergenz zweier spezieller Vektorfunktionen.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Einheitsvektor in z-Richtung:

$$\vec{A}_2 = 1\vec{e}_3 \quad , \tag{2.3.3.3}$$

die in Abbildung 2.5b schematisch dargestellt ist. Hier verschwindet die Divergenz

$$\text{div } \vec{A}_2 = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0$$

2.3.4 Rotation

Sei wieder das Vektorfeld $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$ gegeben.
Definition: Rotation : Als rot $\vec{A}$ (in englischer Literatur auch oft curl $\vec{A}$) bezeichnet man das Kreuzprodukt zwischen dem Nabla-Operaor und dem Vektor $\vec{A}$:

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2.3.4.1}$$

sodaß für die $i-$Komponente des resultierenden Vektors

$$[\text{rot } \vec{A}]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \tag{2.3.4.2}$$

wobei beim letzten Schritt die Summenkonvention benutzt wurde.
Mit Gleichung (2.3.4.2) schreibt sich Gleichung (2.3.4.1) als

$$\text{rot } \vec{A} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{2.3.4.3}$$

Die Rotation läßt sich geometrisch als ein Maß für die Wirbelstärke (Rotation) eines Vektorfeldes $\vec{A}$ im Punkt P interpretieren. Betrachten wir als Beispiel die Vektorfunktion

$$\vec{A}_3 = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2,$$

die in Abbildung 2.6 schematisch skizziert ist.

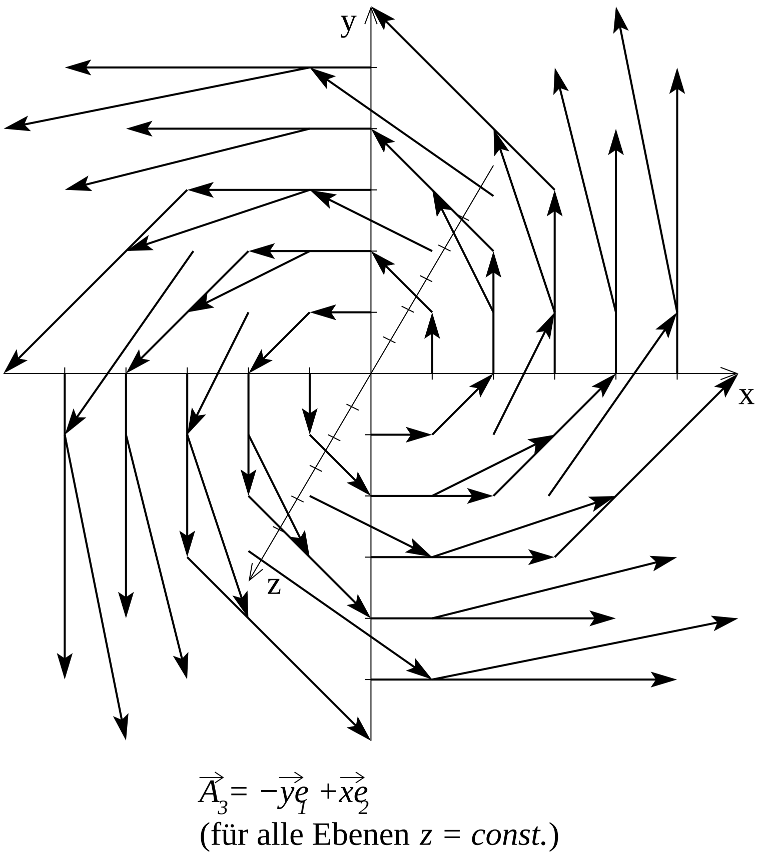

Abb. 2.6: Rotation einer speziellen Vektorfunktion.

Nach Gleichung (2.3.4.3) erhalten wir für die Rotation dieses Vektorfeldes

$$\text{rot } \vec{A}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_3$$

Ebenso weist man leicht nach, daß für die Beispiele (2.3.3.3) und (2.3.3.4) die Rotation jeweils verschwindet.

Übungsaufgabe:

A2.3.1) Zeigen Sie, daß die Definition (2.3.4.1) äquivalent ist zur Darstellung

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta F} \quad , \tag{2.3.4.4}$$

wobei $\vec{n}$ den Einheits-Normalenvektor bezeichnet, der senkrecht auf der von der Kurve s umrandeten Fläche ΔF steht.

A2.3.2) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{g} = 3x^2y\vec{e}_1 + \ yz^2\vec{e}_2 - \ xz\vec{e}_3$$

2.4 Rechenregeln für vektorielle Differentialoperatoren

2.4.1 Summenregeln

Aus den Definitionen der vektoriellen Differentialoperatoren folgen die Summenregeln

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \ \vec{\nabla}g$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \ \vec{\nabla}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\nabla}\times\vec{a} + \ \vec{\nabla}\times\vec{b}$$

2.4.2 Produktregeln

Hier ist zu bedenken, daß es zwei Arten von Skalaren aus dem Produkt fg zweier Skalare und aus dem Produkt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ zweier Vektoren geben kann. Ebenso kann es zwei Arten von Vektoren aus den Produkten $f\vec{a}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ geben. Daher existieren sechs verschiedene Produktregeln: jeweils zwei für Gradienten, Divergenzen und Rotationen:

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + \ g\vec{\nabla}f \tag{2.4.2.1}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} \tag{2.4.2.2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{a}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + \ \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}f) \tag{2.4.2.3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b}) \tag{2.4.2.4}$$

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{a}) = f(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \ \vec{a}\times(\vec{\nabla}f) \tag{2.4.2.5}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}) - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) \tag{2.4.2.6}$$

Diese Regeln lassen sich leicht mit dem Komponentendarstellung der Vektoren beweisen.

2.4.3 Quotientenregeln

Mit Hilfe der Produktregeln erhalten wir

$$\vec{\nabla}(\frac{f}{g}) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2} \tag{2.4.3.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{\vec{a}}{g}) = \frac{g(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}g)}{g^2} \tag{2.4.3.2}$$

$$\vec{\nabla}\times(\frac{\vec{a}}{g}) = \frac{g(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\vec{\nabla}g)}{g^2} \tag{2.4.3.3}$$

2.4.4 Kombination verschiedener vektorieller Differentialoperatoren

$\vec{\nabla}\Phi$ ist ein Vektor. Von diesem Vektor können wir die Divergenz div $\vec{\nabla}\Phi$ und die Rotation rot $\vec{\nabla}\Phi$ berechnen.
$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ist ein Skalar, dessen Gradient wir bilden können.
$\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ist ein Vektor, dessen Divergenz div $(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ und Rotation rot $(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ wir berechnen können.
Mehr Kombinationsmöglichkeiten gibt es nicht! Aber nicht alle ergeben etwas Neues, wie wir jetzt zeigen werden.
Für die Kombination verschiedener vektorielle Differentialoperatoren beweisen wir die folgenden wichtigen Rechenregeln:
(a) Wir wiederholen Gleichung (2.3.2.2):

$$\text{div grad } \Phi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Phi) = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi \tag{2.4.4.1}$$

(b) Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei:

$$\text{rot grad } \Phi = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.4.4.2}$$

(c) Ein Rotationsfeld besitzt keine Quellen und Senken, denn unter Ausnutzung von Gleichung (2.4.1) gilt

$$\text{div rot } \vec{g} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{g}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z}] - \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z}] + \frac{\partial}{\partial z}[\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}] = 0 \tag{2.4.4.3}$$

(d) Unter Ausnutzung des dreifachen Kreuzprodukts gilt

$$\text{rot (rot } \vec{g}) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{g}) = \text{grad (div } \vec{g}) - \Delta\vec{g} \tag{2.4.4.4}$$

(e)

$$\text{div } (\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\text{rot } \vec{B}) - \vec{B}\cdot(\text{rot } \vec{C}) \tag{2.4.4.5}$$

Beweis : Es ist

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \frac{\partial}{\partial x}(B_yC_z - B_zC_y) + \frac{\partial}{\partial y}(B_zC_x - B_xC_z) + \frac{\partial}{\partial z}(B_xC_y - B_yC_x) =$$

$$C_x(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}) + C_y(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}) + C_z(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}) - B_x(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z})$$

$$-B_y(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x}) - B_z(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}) = \vec{C}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{C})$$

Q.E.D.

2.5 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

2.5.1 Grundgleichungen

Neben den kartesischen Koordinaten $x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ betrachten wir die allgemeinen krummlinigen Koordianten $q_i = (q_1, q_2, q_3)$. Nach Kap. (2.2.2) bilden wir die neuen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_{q_i} = \frac{1}{h_i}\partial\vec{r}/\partial q_i \tag{2.5.1.1}$$

mit dem Skalenfaktor

$$h_i = |\partial\vec{r}/\partial q_i| \tag{2.5.1.2}$$

Wir nehmen an, daß die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}_{q_1}$, $\vec{e}_{q_2}$ und $\vec{e}_{q_3}$ ein rechtshändiges orthogonales Koordinatensystem bilden , d.h.

$$\vec{e}_{q_\nu}\cdot\vec{e}_{q_\mu} = \delta_{\nu\mu}, \quad \mu,\nu = 1,2,3 \tag{2.5.1.3}$$

Aus $\vec{r} = \vec{r}(q_i)$ folgt mit Gleichung (2.2.2.2)

$$d\vec{r} = (\partial\vec{r}/\partial q_1)dq_1 + (\partial\vec{r}/\partial q_2)dq_2 + (\partial\vec{r}/\partial q_3)dq_3 =$$

$$h_1dq_1\vec{e}_{q_1} + h_2dq_2\vec{e}_{q_2} + h_3dq_3\vec{e}_{q_3} = \sum_{i=1}^{3} h_idq_i\vec{e}_{q_i} \tag{2.5.1.4}$$

Für das Quadrat der Bogenlänge erhalten wir dann unter Ausnutzung von Gleichung (2.5.1.3)

$$(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} h_\nu h_\mu dq_\nu dq_\mu \vec{e}_{q_\nu}\cdot\vec{e}_{q_\mu} = \sum_{\mu=1}^{3} h_\mu^2 dq_\mu^2 = h_1^2dq_1^2 + h_2^2dq_2^2 + h_3^2dq_3^2 \quad (2.5.1.5),$$

während für das Volumenelement gilt

$$dV = d^3r = |h_1dq_1\vec{e}_{q_1}\cdot[h_2dq_2\vec{e}_{q_2}\times h_3dq_3\vec{e}_{q_3}]| = h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3|\vec{e}_{q_1}\cdot(\vec{e}_{q_2}\times\vec{e}_{q_3})| =$$

$$h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3 \tag{2.5.1.6}$$

2.5.2 Gradient

Gemäß Gleichung (2.3.1.3) gilt

$$d\psi = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial\psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}dq_3 \qquad (2.5.2.1)$$

Nach Gleichung (2.5.1.4) gilt

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_{q_1} + h_2 dq_2 \vec{e}_{q_2} + h_3 dq_3 \vec{e}_{q_3} \qquad (2.5.2.2)$$

Wir setzen als Ansatz an

$$\vec{\nabla}\psi = \lambda_1 \vec{e}_{q_1} + \lambda_2 \vec{e}_{q_2} + \lambda_3 \vec{e}_{q_3} \qquad (2.5.2.3)$$

und bestimmen die Werte der λ_i durch Einsetzen von (2.5.2.2) und (2.5.2.3) in die Beziehung (2.5.2.1):

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}dq_3 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h_1 dq_1\\ h_2 dq_2\\ h_3 dq_3\end{pmatrix} = h_1\lambda_1 dq_1 + h_2\lambda_2 dq_2 + h_3\lambda_3 dq_3$$

Der Koeffizientenvergleich in dieser Gleichung ergibt

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (2.5.2.4)$$

und somit für die Ansatzgleichung (2.5.2.3):

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{e}_{q_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}$$

Wir finden also für den Gradienten in den krummlinigen Koordinaten die Darstellung

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_{q_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \qquad (2.5.2.5)$$

Angewandt auf die speziellen Skalare q_1,q_2 und q_3 folgt

$$\vec{\nabla}q_1 = \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1}, \quad \vec{\nabla}q_2 = \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2}, \quad \vec{\nabla}q_n = \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \quad , \qquad (2.5.2.6)$$

wobei für den Betrag gilt

$$|\vec{\nabla}q_\nu| = \frac{1}{h_\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3 \qquad (2.5.2.7)$$

Weiterhin gilt

$$\vec{e}_{q_1} = h_2 h_3 \vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3, \quad \vec{e}_{q_2} = h_3 h_1 \vec{\nabla}q_3 \times \vec{\nabla}q_1, \quad \vec{e}_{q_3} = h_1 h_2 \vec{\nabla}q_1 \times \vec{\nabla}q_2 \qquad (2.5.2.8)$$

Beweis : Zum Beweis von (2.5.2.8) nutzen wir Gleichungen (2.5.2.6) aus:

$$h_2 h_3 \vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3 = h_2 h_3 (\frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \times \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3}) = \vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_3} = \vec{e}_{q_1}$$

Q.E.D.

2.5.3 Divergenz
Zur Berechnung von

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (A_1\vec{e}_{q_1} + A_2\vec{e}_{q_2} + A_3\vec{e}_{q_3}) = \vec{\nabla} \cdot (A_1\vec{e}_{q_1}) + \vec{\nabla} \cdot (A_2\vec{e}_{q_2}) + \vec{\nabla} \cdot (A_3\vec{e}_{q_3})$$

benutzen wir die Darstellungen (2.5.2.8). Wir erhalten für

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1\vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \cdot (A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3)$$

Mit der Produktregel (2.4.2.3) folgt

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1\vec{e}_{q_1}) = [\vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)] \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) + A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3)$$

Der zweite Term in dieser Gleichung verschwindet, denn nach Anwendung der Produktregel (2.4.2.4) gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) = \vec{\nabla} q_3 \cdot \text{rot grad } q_2 - \vec{\nabla} q_2 \cdot \text{rot grad } q_3 = 0$$

gemäß Gleichung (2.4.4.2). Es verbleibt unter Ausnutzung von (2.5.2.6)

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1\vec{e}_{q_1}) = [\vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)] \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) = [\vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)] \cdot (\frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \times \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3}) = [\vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)] \cdot \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3}$$

Jetzt benutzen wir die Darstellung (2.5.2.5) für grad $(A_1 h_2 h_3)$ und erhalten aufgrund der Orthogonalitätsrelation (2.5.1.3)

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1\vec{e}_{q_1}) = [\vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_2} +$$

$$\vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_3}] \cdot \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) \tag{2.5.3.1}$$

Ebenso berechnen wir

$$\vec{\nabla} \cdot (A_2\vec{e}_{q_2}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3)$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot (A_3\vec{e}_{q_3}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2),$$

sodaß

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2)] \tag{2.5.3.2}$$

2.5.4 Rotation

Zur Berechnung von

$$\text{rot}\ \vec{A} = \vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1} + A_2\vec{e}_{q_2} + A_3\vec{e}_{q_3}) = \vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1}) + \vec{\nabla} \times (A_2\vec{e}_{q_2}) + \vec{\nabla} \times (A_3\vec{e}_{q_3})$$

benutzen wir die Darstellungen (2.5.2.6). Wir erhalten für

$$\vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \times (A_1 h_1 \vec{\nabla} q_1) = \vec{\nabla}(A_1 h_1) \times \vec{\nabla} q_1 + \ a_1 h_1 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} q_1$$

wobei wir die Produktregel (2.4.2.5) nutzen. Der zweite Term in dieser Gleichung verschwindet gemäß Gleichung (2.4.4.2) und mit Gleichung (2.5.2.6) folgt

$$\vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla}(A_1 h_1) \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1}$$

Jetzt benutzen wir die Darstellung (2.5.2.5) für grad $(A_1 h_1)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (A_1\vec{e}_{q_1}) &= [\vec{e}_{q_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial q_2} + \\ \vec{e}_{q_3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial q_3}] \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} &= \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_1h_3}\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial q_3} - \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1h_2}\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial q_2}\end{aligned} \tag{2.5.4.1}$$

Ebenso verfahren wir mit $\vec{\nabla} \times (A_2\vec{e}_{q_2})$ und $\vec{\nabla} \times (A_3\vec{e}_{q_3})$ und erhalten

$$\begin{aligned}\text{rot}\ \vec{A} &= \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2h_3}\Big[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\Big] + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_1h_3}\Big[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3h_3)\Big] + \\ \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1h_2}\Big[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_1h_1)\Big] &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_{q_1} & h_2\vec{e}_{q_2} & h_3\vec{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{2.5.4.2}$$

2.5.5 Laplace-Operator

Mit Gleichung (2.4.4.1) und der Gradientendarstellung (2.5.2.5) gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta\psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla} \cdot (\frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}) \tag{2.5.5.1}$$

Die Anwendung der Divergenzdarstellung (2.5.3.2) für

$$A_\nu = \frac{1}{h_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial q_\nu}$$

ergibt dann

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3})] \tag{2.5.5.2}$$

Nach diesen allgemeinen Herleitungen betrachten wir nun als Beispiel Kugelkoordinaten.

2.5.6 Beispiel: Kugelkoordinaten

Mit Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) gilt für den Ortsvektor

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = r\sin\theta\cos\phi\vec{e}_1 + r\sin\theta\sin\phi\vec{e}_2 + r\cos\theta\vec{e}_3 = \vec{r}(r, \theta, \phi) \qquad (2.5.6.1)$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Als neue Koordinaten wählen wir also $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ und $q_3 = \phi$.

Zur Berechnung der neuen Einheitsvektoren (2.5.1.1) und Skalenfaktoren (2.5.1.2) benötigen wir

$$\partial\vec{r}/\partial r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

$$\partial\vec{r}/\partial\theta = r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$

und

$$\partial\vec{r}/\partial\phi = r(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0),$$

sodaß

$$h_1 = h_r = |\partial\vec{r}/\partial r| = 1, \quad h_2 = h_\theta = |\partial\vec{r}/\partial\theta| = r, \quad h_3 = h_\phi = |\partial\vec{r}/\partial\phi| = r\sin\theta \qquad (2.5.6.2)$$

und

$$\vec{e}_{q_1} = \vec{e}_r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \quad \vec{e}_{q_2} = \vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta),$$

$$\vec{e}_{q_3} = \vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \qquad (2.5.6.3)$$

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in den allgemeinen Ausdruck (2.5.2.5) erhalten wir für den Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi \qquad (2.5.6.4)$$

Gemäß Gleichung (2.5.3.2) ergibt sich für die Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi r)] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi)\ , \qquad (2.5.6.5)\end{aligned}$$

während Gleichung (2.5.4.2) für die Rotation in Kugelkoordinaten auf

$$\mathrm{rot}\ \vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & A_\theta r & A_\phi r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\Big[(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi r \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta r))\vec{e}_r + \ (\frac{\partial}{\partial\phi}(A_r) - \frac{\partial}{\partial r}(A_\phi r \sin\theta))r\vec{e}_\theta$$
$$+(\frac{\partial}{\partial r}(A_\theta r) - \frac{\partial}{\partial\theta}(A_r))r\sin\theta\vec{e}_\phi\Big] \qquad (2.5.6.6)$$

führt.
Gemäß Gleichung (2.5.5.2) erhalten wir für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \ \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \ \frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi})]$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \qquad (2.5.6.7)$$

Übungsaufgaben:
A2.5.1) Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten.
A2.5.2) Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in parabolischen Zylinderkoordinaten.

2.6 Integralrechnung mit Vektoren

Für skalare stetige Funktionen gilt, daß das Integral einer Ableitung über das Intervall $[a, b]$ durch den Wert der Funktion an den Endpunkten gegeben ist:

$$\int_a^b (\frac{df}{dx})dx = f(b) - f(a) \qquad (2.6.1)$$

Bei Vektoren gibt es, wie angesprochen, drei Arten von Ableitungen (Gradient, Divergenz und Rotation) und jede hat seine eigene Integrationsvorschrift.

2.6.1 Integration von Gradienten

Wir betrachten die skalare Funktion $T(x, y, z)$ in den drei Variablen x, y und z. Wir beginnen am Punkt $a = (a_x, a_y, a_z)$ und bewegen uns eine kleine Strecke $d\vec{l}_1$ von ihm weg in Richtung zum Punkt $b = (b_x, b_y, b_z)$. Gemäß Gleichung (2.3.1.3) ist der Zuwachs dann durch $dT = (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l}_1$ gegeben. Gehen wir ein kleines Stück $d\vec{l}_2$ weiter, ergibt sich der Zuwachs zu $dT = (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l}_2$. Wir fahren fort, bis wir den Punkt b erreicht haben. Für die gesamte Änderung der Funktion T auf dem Weg von a nach b erhalten wir dann

$$\int_{Weg\ a}^b (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l} = T(b) - T(a) \qquad (2.6.2)$$

Weil der Wert der rechte Seite dieser Gleichung unabhängig vom eingeschlagenen Weg ist, folgt
(1) $\int_a^b (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l}$ ist unabhängig vom Weg von a nach b
und

(2)

$$\oint (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l} = 0 \tag{2.6.3}$$

bei geschlossenem Weg, weil die Endpunkte gleich sind $T(b) - T(a) = 0$.
Als *Beispiel* betrachten wir die Funktion $T = xy^2$ und die Punkte $a = (0,0,0)$ und $b = (2,1,0)$. Obwohl das Integral wegunabhängig ist, müssen wir einen Integrationsweg festlegen. Wie in Abbildung 2.7 skizziert, gehen wir zunächst entlang der x-Achse (1. Schritt) und dann parallel zur y-Achse (2. Schritt). Nun ist $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Desweiteren ist für unser Beispiel $\vec{\nabla} T = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j}$.

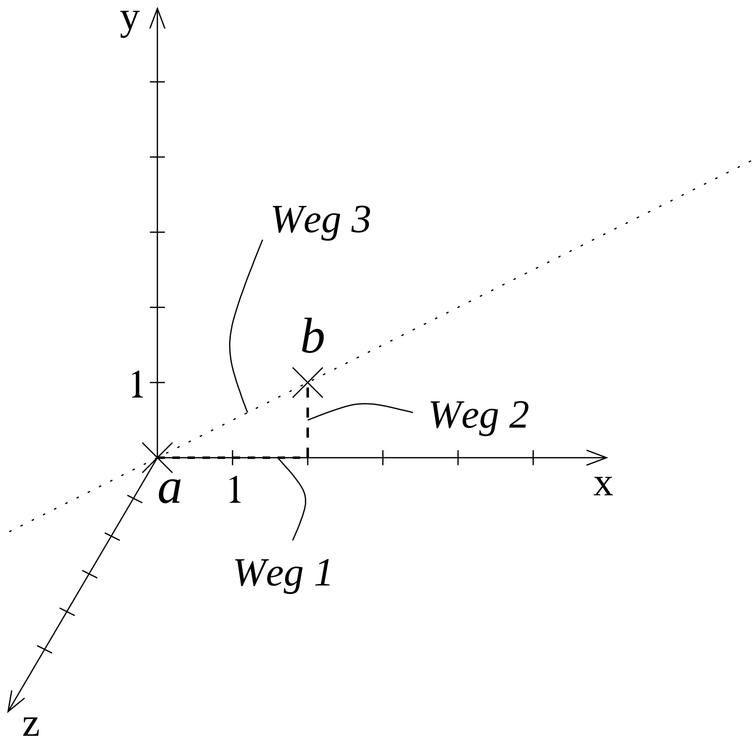

Abb. 2.7: Zur Integration von $\vec{\nabla} T$.

Im 1. Schritt verändert sich x von $0 \to 2$, während $y = 0$ bleibt, sodaß $dy = dz = 0$. Damit folgt $\vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = y^2 dx = 0$ wegen $y = 0$ auf diesem Abschnitt, und $\int_1 \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = 0$.
Im 2. Schritt verändert sich y von $0 \to 1$, während $x = 2$ bleibt, sodaß $dx = dz = 0$. Damit folgt $\vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = 2xydy = 4ydy$ weil $x = 2$ auf diesem Abschnitt, und $\int_2 \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = \int_0^1 4ydy = [2y^2]_0^1 = 2$.
Addieren wir beide Integrale auf, so folgt

$$\int_a^b \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = 2 Approximation Approximation$$

Das Ergebnis stimmt überein mit $T(b) - T(a) = 2 - 0 = 2$.
Um die Wegunabhängigkeit zu illustrieren, integrieren wir entlang des Wegs 3 in Abbildung 2.7, der der geraden Linie $y = x/2$ von a nach b entspricht. Dabei ändert sich x von $0 \to 2$

und y gemäß der Ableitung $dy = dx/2$, sodaß

$$\vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = y^2dx + 2xydy = \frac{1}{4}x^2dx + 2x(x/2)(\frac{1}{2}dx) = \frac{3}{4}x^2dx$$

sodaß

$$\int_3 \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2dx = [\frac{1}{4}x^3]_0^2 = 2$$

Ebenso hätten wir auch $x = 2y$ als Funktion von y ausdrücken können, um dann über die Variable y zu integrieren.

2.6.2 Integration von Divergenzen

Das *Gauß*-Theorem für die Volumen-Integration von Divergenzen lautet

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a} \tag{2.6.4}$$

Das Integral einer Ableitung (hier die Divergenz) über ein Gebiet (hier ein Volumen) ist gleich dem Wert der Funktion am Rand des Gebiets (hier die Oberfläche des Volumens). Dabei ist $d\tau = dxdydz$ unApproximationd

$$\int_V d\tau = \int dx \int dy \int dz$$

Anders als vorher ist der Randterm sebst ein Integral, hier speziell das Oberflächenintegral

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a} \tag{2.6.5}$$

So wie der Rand eines Weges durch die beiden Endpunkte des Wegs bestimmt ist, ist hier der Rand des Volumens die ganze Oberfläche des Volumens. $d\vec{a}$ repräsentiert ein infinitesimales Element der Oberfläche: $d\vec{a}$ ist der Vektor mit dem Absolutwert gleich dem infinitesimalen Flächenelement da und der Richtung *normal* zur Oberfläche nach außen.
Dies illustrieren wir am Beispiel des in Abb. 2.8 gezeigten Einheitsquaders mit dem Volumenelement $d\tau = dxdydz$. Für die Vorderseite des Quaders gilt $d\vec{a}_1 = (dydz)\vec{i}$, für die rechte Seite $d\vec{a}_2 = (dxdz)\vec{j}$, und für den Boden $d\vec{a}_3 = (dydz)(-\vec{k})$.

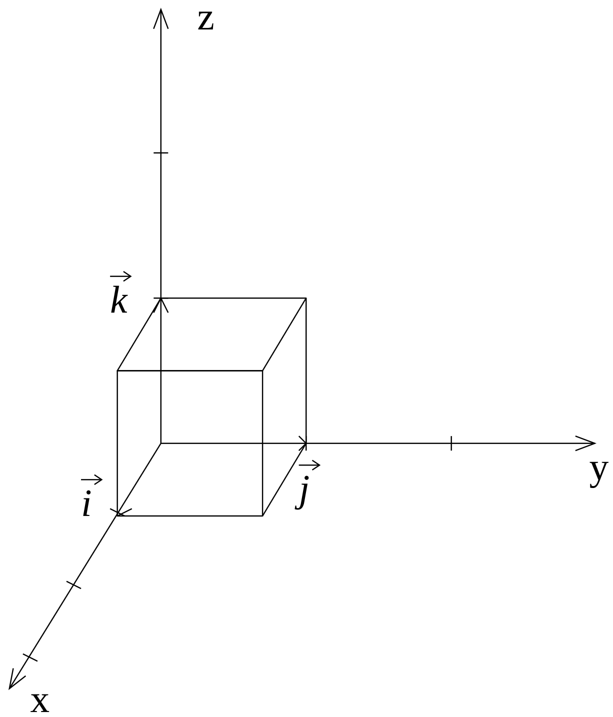

Abb. 2.8: Der Einheitsquader.

Das Integral (2.6.5) enthält die Normalkomponente des Vektors $\vec{v}$ integriert über eine Oberfläche (das Skalarprodukt "pickt" die Normalkomponente heraus) und wird als ApproximationFluß von $\vec{v}$ durch diese Oberfläche bezeichnet. Sei $\vec{v}$ etwa die Geschwindigkeit einer Strömung, dann ist der Fluß von $\vec{v}$ einfach die gesamte Menge der Strömung, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche fließt. Die Divergenz wurde als Maß für das "Auseinanderfließen" eines Vektors interpretiert. Je divergenter (d.h. je stärker der Vektor auseinanderfließt) desto größer ist der Fluß durch die Oberfläche.

Beispiel: Wir überprüfen den Gaußschen Satz für die Funktion

$$\vec{v} = y^2\vec{i} + \ (2xy + z^2)\vec{j} + \ 2yz\vec{k}$$

im Einheitsquader. In diesem Fall ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 2x + 2y = 2(x + y),$$

sodaß

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\tau = 2\int_0^1 dz \int_0^1 dy [\int_0^1 dx(x + y)] =$$
$$2\int_0^1 dz \int_0^1 dy [\frac{1}{2} + y] = 2\int_0^1 dz [\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}]_0^1 = 2[z]_0^1 = 2 \qquad (2.6.6)$$

Um das Oberflächenintegral gemäß der rechten Seite von Gleichung (2.6.4) zu bestimmen, betrachten wir getrennt alle sechs Seiten des Einheitsquaders (Abbildung 2.8):

(i) Auf der Vorderseite gilt $d\vec{a} = dydz\vec{i}$ und $x = 1$, sodaß $\vec{v} \cdot d\vec{a} = y^2 dydz$ und wir erhalten

$$\int_{(i)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_0^1 dz \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}$$

(ii) Auf der Rückseite gilt $d\vec{a} = -dydz\vec{i}$ und $x = 0$, sodaß $\vec{v} \cdot d\vec{a} = -y^2 dydz$ und wir erhalten

$$\int_{(ii)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = -\int_0^1 dz \int_0^1 y^2 dy = -\frac{1}{3}$$

(iii) Auf der rechten Seite gilt $d\vec{a} = dxdz\vec{j}$ und $y = 1$, sodaß $\vec{v} \cdot d\vec{a} = (2xy + z^2)dxdz|_{y=1} = (2z + z^2)dxdz$ und wir erhalten

$$\int_{(iii)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_0^1 dz \int_0^1 dx(2x + z^2) = \int_0^1 dz[x^2 + z^2 x]_0^1 = \int_0^1 dz[1 + z^2] = [z + \frac{z^3}{3}]_0^1 = \frac{4}{3}$$

(iv) Auf der linken Seite gilt $d\vec{a} = -dxdz\vec{j}$ und $y = 0$, sodaß $\vec{v} \cdot d\vec{a} = -(2xy + z^2)dxdz|_{y=0} = -z^2 dxdz$ und wir erhalten

$$\int_{(iv)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = -\int_0^1 dz \int_0^1 dxz^2 = -[\frac{z^3}{3}]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

(v) Auf dem Deckel gilt $d\vec{a} = dxdy\vec{k}$ und $z = 1$, sodaß $\vec{v} \cdot d\vec{a} = 2yzdxdy|_{z=1} = 2ydxdy$ und wir erhalten

$$\int_{(v)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = 2\int_0^1 dx \int_0^1 dyy = 2[\frac{y^2}{2}]_0^1 = 1$$

(vi) Auf dem Boden gilt $d\vec{a} = -dxdy\vec{k}$ und $z = 0$, sodaß $\vec{v} \cdot d\vec{a} = 2yzdxdy|_{z=0} = 0$ und wir erhalten

$$\int_{(vi)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = 0$$

Für den Gesamtfluß durch die Oberfläche erhalten wir dann

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 - 0 = 2,$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (2.6.6).

Übungsaufgabe:

A2.6.1) Prüfen Sie den Gaußschen Satz für die Funktion $\vec{v} = (xy)\vec{i} + (2yz)\vec{j} + (3zx)\vec{k}$ für einen Quader mit den Seitenlängen 2.

2.6.3 Integration von Rotationen

Das *Stokes*-Theorem für die Oberflächen-Integration von Rotationen lautet

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_R \vec{v} \cdot d\vec{l} \tag{2.6.7}$$

Das Integral einer Ableitung (hier die Rotation) über einen Bereich (hier einen Teil der Oberfläche) ist gleich dem Wert der Funktion am Rand (hier die Begrenzung des Oberflächenteils). Wie im Fall des Divergenz-Theorems ist der Randterm wieder ein Integral, speziell ein geschlossenes Linienintegral. Für die Richtungswahl des geschlossenen Wegs über den Rand gilt die Rechte-Hand-Regel (Abbildung 2.9): Zeigen die Finger in Richtung des Linienintegrals, dann zeigt der Daumen in Richtung von $d\vec{a}$.).

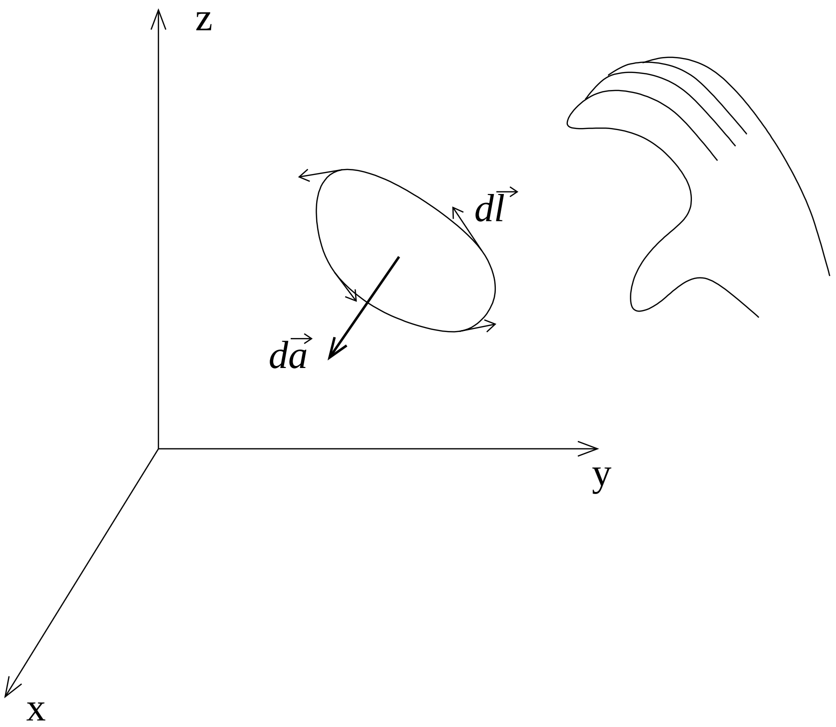

Abb. 2.9: Wahl des Integrationsweges bei geschossenen Linienintegralen nach der Rechte-Hand-Regel.

Beispiel: Wir überprüfen den Stokesschen Satz für die Funktion

$$\vec{v} = (2xz + 3y^2)\vec{j} + \ (4yz^2)\vec{k}$$

und der in Abbildung 2.10 gezeigten Einheitsfläche. Hier gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & (2xz + 3y^2) & (4yz^2) \end{vmatrix} = \vec{i}(4z^2 - 2x) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(2z) = (4z^2 - 2x)\vec{i} + 2z\vec{k}$$

und $d\vec{a} = dydz\vec{i}$, womit die Integrationsrichtung als im Gegenuhrzeigersinn festgelegt ist (Rechte-Hand-Regel). Auf der Integrationsoberfläche gilt $x = 0$, sodaß

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) d\vec{a} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz (4z^2 - 2x)|_{x=0} = 4 \int_0^1 dy \int_0^1 dz z^2 = \frac{4}{3} \qquad (2.6.8)$$

Das Wegintegral auf der rechten Seite von Gleichung (2.6.6) besteht aus den in Abbildung 2.10 gezeigten vier Anteilen (i) - (iv), die wir getrennt berechnen:

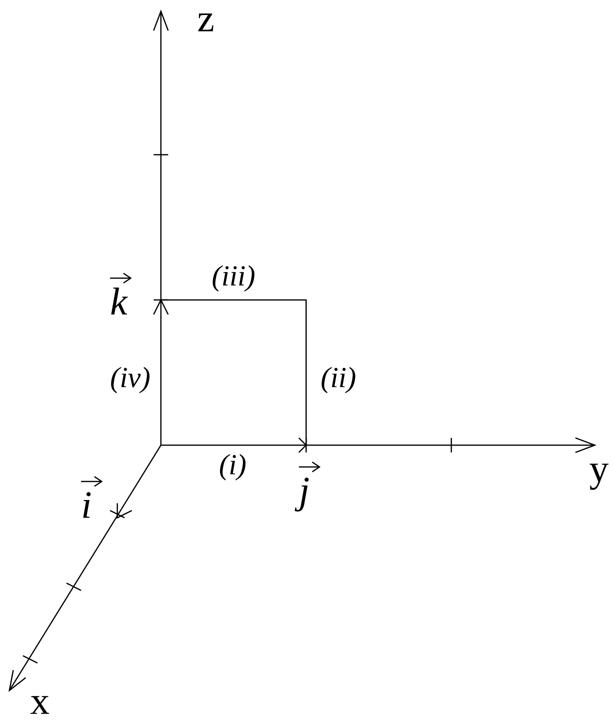

Abb. 2.10: Die y-z-Einheitsfläche.

(i) Auf diesem Wegstück gilt $x = 0$ und $z = 0$, während $y : 0 \to 1$ von 0 bis 1 läuft, wobei $dl = dy$ ist. Folglich ist hier $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_y dy|_{x=0,z=0} = 3y^2 dy$ und wir erhalten

$$\int_{(i)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 dy 3y^2 = 1$$

(ii) Auf diesem Wegstück gilt $x = 0$ und $y = 1$, während $z : 0 \to 1$ von 0 bis 1 läuft, wobei $dl = dz$ ist. Folglich ist hier $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_z dz|_{x=0,y=1} = 4yz^2 dz|_{x=0,y=1} = 4z^2 dz$ und wir erhalten

$$\int_{(ii)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 dz 4z^2 = \frac{4}{3}$$

(iii) Auf diesem Wegstück gilt $x = 0$ und $z = 1$, während $y : 1 \to 0$ von 1 bis 0 läuft, wobei $dl = dy$ ist. Folglich ist hier $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_y dy|_{x=0,z=1} = (2xz + 3y^2)|_{x=0,z=1} dy = 3y^2 dy$ und wir erhalten

$$\int_{(iii)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_1^0 dy 3y^2 = -1$$

(iv) Auf diesem Wegstück gilt $x = 0$ und $y = 0$, während $z : 1 \to 0$ von 1 bis 0 läuft, wobei $dl = dz$ ist. Folglich ist hier $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_z dz|_{x=0,y=0} = 4yz^2 dz|_{x=0,y=0} = 0$ und wir erhalten

$$\int_{(iv)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

Für den gesamte Wegintegral erhalten wir dann

$$\oint_R \vec{v} \cdot d\vec{l} = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{4}{3},$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (2.6.8).

Übungsaufgabe:

A2.6.2) Prüfen Sie den Stokesschen Satz für die Funktion $\vec{v} = (xy)\vec{i} + (2yz)\vec{j} + (3zx)\vec{k}$ auf der in Abbildung 11 gezeigten dreieckigen Oberfläche.

2.6.5 Sätze von Green

Die beiden Greenschen Sätze folgen aus dem Gauß-Theorem (2.6.4). Seien u and v zwei skalare Funktionen. Es gilt nach Gleichung (2.4.2.3)

$$\vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v) = u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) + \ (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v) \tag{2.6.9}$$

Wir integrieren diese Gleichung über das Volumen V und wenden den Gaußschen Satz (2.6.4) an:

$$\begin{aligned}\int_V dV \vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v) = \int_F d\vec{F} \cdot (u\vec{\nabla}v) &= \int_V dV[u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) + \ (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] \\ &= \int_V dV[u\Delta v + \ (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] \ ,\end{aligned}$$

wobei der Lapalace-Operator (2.4.4.1) eingeführt wurde. Es ergibt sich also der *1. Greensche Satz* zu

$$\int_F d\vec{F} \cdot (u\vec{\nabla}v) = \int_V dV[u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) + \ (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] = \int_V dV[u\Delta v + \ (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] \tag{2.6.10}$$

Vertauschen wir u und v in Gleichung (2.6.9), so erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot (v\vec{\nabla}u) = v\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}u) + \ (\vec{\nabla}v) \cdot (\vec{\nabla}u) \tag{2.6.11}$$

Für die Differenz aus Gleichung (2.6.9) und Gleichung (2.6.11) folgt dann

$$\vec{\nabla} \cdot [u\vec{\nabla}v - \ v\vec{\nabla}u] = u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) - \ v\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}u)$$

Integrieren wir diese Gleichung über das Volumen V und wenden den Gaußsatz (2.6.4) an, so folgt der *2. Greensche Satz*:

$$\int_V dV[u\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}v) - \ v\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}u)] = \int_V dV[u\Delta v - \ v\Delta u] = \int_F d\vec{F}\cdot[u\vec{\nabla}v - \ v\vec{\nabla}u] \quad (2.6.12)$$

2.7 Diracs Delta-Funktion

2.7.1 Divergenz von $\vec{e}_r/r^2$

Wir betrachten die spezielle Vektorfunktion $\vec{v} = \vec{e}_r/r^2$, wobei $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ den Einheitsvektor in r-Richtung kennzeichnet. Nach der Skizze in Abbildung 2.11 sollte diese Funktion eine sehr große positive Divergenz haben, da sie an allen Punkten radial nach außen auseinanderfließt.

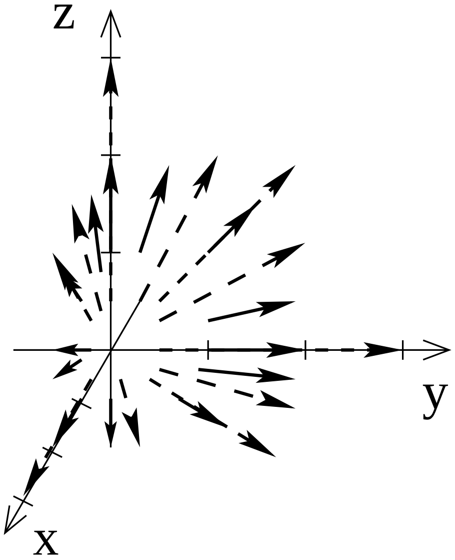

Abb. 2.11: Die Funktion $\vec{v} = \vec{e}_r/r^2$.

Berechnet man diese aber mit Gleichung (2.5.6.5) der Divergenz in Kugelkoordinaten, so folgt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{1}{r^2}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0 \quad (2.7.1)$$

Mit dem Gauß-Theorem (2.6.4) erhalten wir für das Oberflächenintegral der Kugel mit dem Radius R um den Ursprung

$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{a} = \int (\frac{1}{R^2}\vec{e}_r)\cdot(R^2\sin\theta d\theta d\phi\vec{e}_r) = \int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^\pi d\phi = 4\pi \ , \quad (2.7.2)$$

während das Volumenintegral mit (2.7.1)

$$\int_V dV\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

ergibt. Was ist hier falsch? Das Problem ist der Punkt $r = 0$, wo die Funktion $\vec{v}$ divergiert, und wo wir in (2.7.1) durch Null geteilt haben.
Der Wert des Oberflächenintegrals (2.7.2) ist unabhängig vom Wert des Kugelradius R; nach dem Gauß-Theorem sollten wir für jeden Wert von R

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 4\pi$$

erhalten. Offensichtlich kommt der ganze Beitrag durch den Punkt $r = 0$ zustande! $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ hat die bizarre Eigenschaft überall außer bei einem Punkt zu verschwinden, und daß das Integral über jedes Volumen, das diesen Punkt enthält, gleich 4π ist. Keine normale Funktion verhält sich so! Andererseits gibt es eine physikalische Größe, die sich ebenso verhält: die Dichte (Masse pro Einheitsvolumen) eines Punktteilchens. Sie ist Null außer am exakten Ort des Teilchens, und ihr Integral ist endlich und gerade gleich der Masse des Teilchens.
Um dieses Phänomen zu erfassen, benötigen wir den mathematischen Begriff der Dirac-schen Delta-Funktion. Diese können wir als die Verallgemeinerung des Kronecker-Symbols $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ für kontinuierliche Systeme verstehen.

2.7.2 Die eindimensionale Delta-Funktion $\delta(x - x_0)$

Die δ-Funktion ist eine kurze Schreibweise für einen komplizierten Grenzwert-Prozess. Die δ-Funktion hat nur eine Bedeutung, wenn sie in einem Integral auftaucht mit folgendem Effekt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x) = f(0) \quad , \tag{2.7.3}$$

wobei $f(x)$ stetig bei $x = 0$ ist. Speziell für $f(x) = 1$ folgt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) = 1 \quad . \tag{2.7.4}$$

Liegt der singuläre Punkt beim Wert x, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ f(x')\delta(x' - x) = f(x) \quad . \tag{2.7.5}$$

Man kann sich die eindimensionale δ-Funktion vorstellen als unendlich hohe, unendlich schmale Spitze mit der Fläche 1 (siehe Abbildung 2.12), d.h.

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq a \\ \infty & \text{für } x = a \end{cases} \tag{2.7.6}$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$$

Dies kann aber keine Funktion im üblichen Sinn sein; sie hat nur Bedeutung unterhalb eines Integrals mit der Eigenschaft (2.7.5). Mathematisch spricht man von einer *Distribution* oder einer *verallgemeinerten Funktion*.
Man kann die eindimensionale Delta-Funktion mit Funktionen $\delta_n(x)$ approximieren durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta_n(x) \qquad (2.7.7)$$

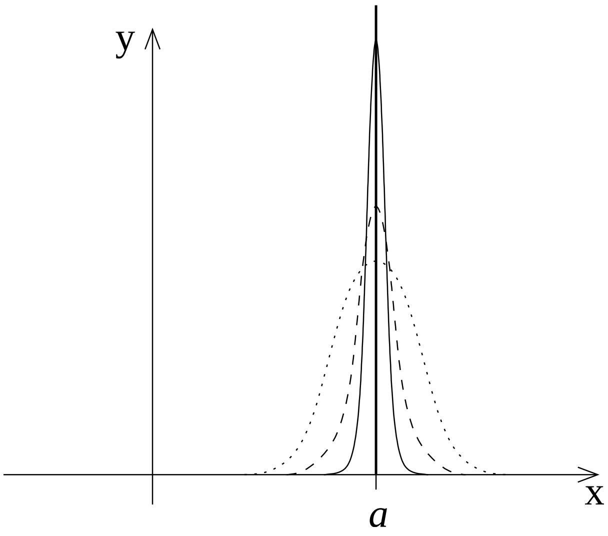

Abb. 2.12: Approximation der Diracschen δ-Funktion.

Als Darstellungen bieten sich an

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le -\frac{1}{2n} \\ n & \text{für } -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{für } x \ge \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad (2.7.8)$$

oder

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \qquad (2.7.9)$$

Beweis der Darstellung (2.7.8):
Zunächst gilt $\forall x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = 0$$

Weiterhin erhalten wir $\forall n$

$$\int_{\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) = n \int_{-1/2n}^{1/2n} dx = 1,$$

d.h. die Funktion $\delta_n(x)$ ist definiert $\forall n \neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\infty}^{\infty} dx\delta_n(x) = 1$$

ist definiert und gleich 1.
Weiterhin gilt mit $c = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\int_{-1/2n}^{1/2n} dx\ f(x) = \lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\int_{-c/2}^{c/2} dx\ f(x) \tag{2.7.10}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe Einschub 2.7.3) ist

$$\int_{-c/2}^{c/2} dx\ f(x) = f(\xi c)\int_{-c/2}^{c/2} dx = cf(\xi c) \tag{2.7.11}$$

mit $-1/2 \leq \xi \leq 1/2$. Setzen wir dieses Ergebnis auf der rechten Seite von Gleichung (2.7.10) ein, so folgt für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta_n(x) = \lim_{c\to 0} f(\xi c) = f(0)$$

womit nach Gleichung (2.7.3) die Darstellung (2.7.8) bewiesen ist.

2.7.3 Einschub: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Für jede beliebige stetige Funktion $F(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ existiert ein Punkt t mit $a \leq t \leq b$ derart, daß

$$F^{'}(t) = \frac{dF}{dx}|_{x=t} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \tag{2.7.12}$$

Ist nun $F(x) = \int^x f(s)ds$ die Stammfunktion von $f(x)$, so ist $F^{'}(t) = f(t)$ und $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Aus Gleichung (2.7.12) folgt dann

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Setzen wir in dieser Gleichung $a = -c/2$, $b = c/2$ und $t = c\xi$, so folgt

$$f(c\xi) = \frac{1}{c}\int_{-c/2}^{c/2} f(x)dx$$

oder

$$\int_{-c/2}^{c/2} f(x)dx = cf(c\xi)\quad ,$$

die in Gleichung (2.7.11) benutzte Identität, mit $-(c/2) \leq c\xi \leq (c/2)$, d.h. $-(1/2) \leq \xi \leq (1/2)$.

Übungsaufgabe:
A2.7.1) Beweisen Sie, daß $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2x^2)$ eine Darstellung der eindimensionalen Delta-Funktion ist.

2.7.4 Eigenschaften der δ-Funktion

(a) Symmetrie: Offensichtlich gilt

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{2.7.13}$$

(b) Ableitung: Mit partieller Integration erhalten wir Approximation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta^{'}(x-a) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{df(x)}{dx}\delta(x-a) = -\frac{df(x)}{dx}|_{x=a} = -f^{'}(a) \tag{2.7.14}$$

(c) Integral: Für das Integral der δ-Funktion

$$\int_{-\infty}^{x} dt\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1 & \text{für } x > a \end{cases} = H[x-a] \tag{2.7.15}$$

ergibt sich gerade die Sprungfunktion von Heaviside. Umgekehrt dürfen wir im Distributionssinn die δ-Funktion als Ableitung der Sprungfunktion auffassen:

$$\delta(x-a) = H^{'}[x-a] \tag{2.7.16}$$

auffassen.
(d) Fourier-Transformation: Die eindimensionale Fourier-Transformation $g(k)$ einer beliebigen Funktion $f(x)$ ist durch

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) \exp(-\imath kx) \tag{2.7.17}$$

definiert. Für die Umkehrtransformation gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ g(k) \exp(\imath kx) \tag{2.7.18}$$

Setzen wir $g(k)$ nach Gleichung (2.7.17) in Gleichung (2.7.18) ein und benutzen wir die Darstellung (2.7.5) für $f(x)$ durch die δ-Funktion, so folgt mit Gleichung (2.7.13)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\ f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \ \exp(\imath k(x-x_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\ f(x_0)\delta(x-x_0)$$

oder

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \ \exp(\imath k(x-x_0)) \tag{2.7.19}$$

Speziell für $x_0 = 0$ gilt dann

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \exp(\imath kx)\ , \tag{2.7.20}$$

d.h. durch Vergleich mit (2.7.18) folgt, daß $g(k) = (2\pi)^{-1/2}$ die Fouriertransformierte der eindimensionalen Delta-Funktion ist.

(e) Delta-Funktion mit allgemeinerem Argument: Ohne Beweis vermerken wir, daß für eine beliebige Funktion $h(x)$ im Argument der Delta-Funktion gilt

$$\delta[h(x)] = \frac{\sum_n \delta(x-x_n)}{|\frac{dh}{dx}|} = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|\frac{dh}{dx}(x=x_n)|}\ , \tag{2.7.21}$$

wobei die x_n durch die Nullstellen $h(x_n) = 0$ der Funktion $h(x)$ gegeben sind.

Als Spezialfälle folgen sofort die Beziehungen

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

und

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$$

2.7.5 Die dreidimensionale Delta-Funktion

Wir verallgemeinern die eindimensionale auf die dreidimensionale Delta-Funktion durch

$$\delta^3(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)\ , \tag{2.7.22}$$

wobei $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ der Ortsvektor vom Ursprung $(0,0,0)$ zum Punkt $P(x,y,z)$ ist. Die dreidimensionale Delta-Funktion $\delta^3(\vec{r})$ ist überall gleich Null außer im Ursprung $(0,0,0)$. Das Volumenintegral über den gesamten Raum ist

$$\int_{\text{Gesamter Raum}} dV\ \delta^3(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\delta(x)\delta(y)\delta(z) = 1 \tag{2.7.23}$$

In Verallgemeinerung von Gleichung (2.7.5) gilt für den festen Punkt $\vec{r}_0$

$$\int_{\text{Gesamter Raum}} dV\ f(\vec{r})(\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) = f(\vec{r}_0) \tag{2.7.24}$$

Jetzt können wir auch die Diskrepanz bei der Berechnung der Divergenz von $\vec{e}_r/r^2$ (siehe Kap. 2.7.1) auflösen: Es war (1) div $(\vec{e}_r/r^2)$ gleich Null überall außer am Ursprung und (2) das Integral über jedes Volumen, das den Ursprung enthielt, war gleich der Konstanten 4π. **Das sind genau die Eigenschaften der dreidimensionalen Delta-Funktion**, multipliziert mit dem Faktor 4π, also

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\delta^3(\vec{r})\ , \tag{2.7.25}$$

oder allgemeiner mit $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0$, $\hat{\vec{R}} = \vec{R}/|\vec{R}|$

$$\vec{\nabla}_r \cdot \frac{\hat{\vec{R}}}{|\vec{R}|^2} = \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} = \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = 4\pi\delta^3(\vec{R}) \quad , \tag{2.7.26}$$

wobei sich der Gradient auf die Ableitung nach $\vec{r}$ bezieht.
Benutzen wir Beziehung (2.5.6.4) für $\psi = 1/R$, d.h.

$$\vec{\nabla}_r(\frac{1}{R}) = \vec{\nabla}_r(\frac{1}{r - r_0}) = -\frac{\hat{\vec{R}}}{(r - r_0)^2} = -\frac{\vec{R}}{R^3} \quad , \tag{2.7.27}$$

so folgt

$$\vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\vec{R}) \quad . \tag{2.7.28}$$

2.8 Helmholtz-Theorem

Ist durch Festlegung der Divergenz und der Rotation eines Vektorfeldes dieses eindeutig bestimmt?
Sei z.B: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D$ und sei $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{C}$ mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$. Können wir damit das Vektorfeld $\vec{F}$ eindeutig festlegen, d.h. existiert eine Lösung und ist sie eindeutig?
Der Beweis der Existenz geschieht durch Konstruktion der Lösung durch

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \ \vec{\nabla} \times \vec{W} \tag{2.8.1}$$

mit der skalaren Funktion

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \, \frac{D(\vec{r'})}{R} \tag{2.8.2}$$

und der Vektorfunktion

$$\vec{W}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \, \frac{\vec{C}(\vec{r'})}{R} \tag{2.8.3}$$

mit

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \tag{2.8.4}$$

Damit erhalten wir unter Benutzung von Gleichung (2.7.28)

$$\vec{\nabla}_r \cdot \vec{F} = -\vec{\nabla}_r^2 U = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \, D(\vec{r'}) \vec{\nabla}_r^2 (\frac{1}{R}) = +\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \, D(\vec{r'}) 4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = D(\vec{r}) \quad ,$$

d.h. die Anwendung der Divergenz auf die konstruierte Lösung (2.8.1) ergibt das richtige Ergebnis.

Ebenso berechnen wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{W}) = 0 + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{W}) \quad ,$$

weil rot div $U = 0$ nach Beziehung (2.4.4.2). Mit Beziehung (2.4.4.4), rot rot = grad div$-$ Δ folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla}^2 \vec{W} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) \tag{2.8.5}$$

Mit der Lösung (2.8.1) folgt für den 1. Term

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{W} = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \vec{C}(\vec{r'}) \vec{\nabla}_r^2 (\frac{1}{R}) = \int_V dV' \vec{C}(\vec{r'}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \vec{C}(\vec{r}) \quad ,$$

d.h. die Anwendung der Rotation auf die konstruierte Lösung (2.8.1) ergibt das richtige Ergebnis, wenn wir zeigen können, daß der 2. Term in Gleichung (2.8.5) verschwindet. Betrachten wir diesen genauer. Mit Gleichung (2.8.3) gilt

$$4\pi \vec{\nabla}_r \cdot \vec{W} = \int_V dV' \vec{C}(\vec{r'}) \cdot \vec{\nabla}_r (\frac{1}{r - r'}) = -\int_V dV' \vec{C}(\vec{r'}) \cdot \vec{\nabla}_{r'} (\frac{1}{r - r'}) \quad , \tag{2.8.6}$$

wobei wir $\vec{\nabla}_r(\frac{1}{r-r'}) = -\vec{\nabla}_{r'}(\frac{1}{r-r'})$ benutzen. Den verbleibenden Ausdruck integrieren wir partiell. Gemäß Beziehung (2.4.2.2) gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) \quad ,$$

sodaß unter Verwendung des Gauß-Theorems

$$-\int_V dV \; \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) = \int_V dV \; f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \int_V dV \; \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \int_V dV \; f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \oint_S f\vec{A} \cdot d\vec{a} \tag{2.8.7}$$

Setzen wir $\vec{A} = \vec{C}$, $f = 1/(r - r')$ und $dV = dV'$, so gilt nach (2.8.7)

$$-\int_V dV' \vec{C}(\vec{r'}) \cdot \vec{\nabla}_{r'} (\frac{1}{r - r'}) = \int_V dV' \; \frac{1}{r - r'} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{C}(\vec{r'}) - \oint_{S'} \frac{1}{r - r'} \vec{C} \cdot d\vec{a}$$

und nach Einsetzen in Gleichung (2.8.5)

$$4\pi \vec{\nabla}_r \cdot \vec{W} = \int_V dV' \; \frac{1}{r - r'} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{C}(\vec{r'}) - \oint_{S'} \frac{1}{r - r'} \vec{C} \cdot d\vec{a} = 0,$$

denn der 1. Term verschwindet nach Annahme wegen $\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{C} = 0$. Das Oberflächenintegral verschwindet wegen des Faktors $\frac{1}{r-r'}$, wenn die Integration bei genügend großem Abstand (Integration über den gesamten Raum) ausgeführt wird und $\vec{C}$ genügend stark für große Abstände abfällt. Q.E.D.

Abschließend noch zwei Anmerkungen:

1) Der Beweis nimmt an, daß die Integrale (2.8.2) und (2.8.3) existieren; sonst würden die Funktionen U und $\vec{W}$ nicht existieren. Für große Werte von r' ist $R \simeq r'$ und beide Integrale sind von der Art (mit $dV' = 4\pi(r')^2 dr'$)

$$\int^{\infty} dr' \, \frac{X(r')}{r'}(r')^2 = \int^{\infty} dr' \, X(r')r',$$

wobei X für die Komponenten von $\vec{C}$ und die Funktion D steht. Damit diese Integrale existieren, müssen die Funktionen $X(r')$ stärker als $1/(r')^2$ abfallen.
2) Hinsichtlich der Eindeutigkeit der Lösung (2.8.1) ist anzumerken, daß diese zunächst nicht eindeutig erscheint, da wir auf der rechten Seite von (2.8.1) jede Vektorfunktion dazuaddieren können, deren Divergenz und Rotation verschwindet. Dann ist immer noch $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{C}$. **Aber**: es existiert keine Vektorfunktion mit verschwindender Divergenz und Rotation, die bei ∞ gegen Null strebt.
Wenn wir also zusätzlich fordern, daß $\vec{F} \to 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$, dann ist die Lösung (2.8.1) eindeutig und es gilt der Satz von Helmholtz.
Helmholtzscher Satz: Sind die Divergenz $D(\vec{r})$ und die Rotation $\vec{C}(\vec{r})$ einer Vektorfunktion $\vec{F}(\vec{r})$ bekannt, gehen beide stärker als $(1/r^2)$ gegen Null für $r \to \infty$, und geht $\vec{F}(\vec{r}) \to 0$ für $r \to \infty$, dann ist $\vec{F}(\vec{r})$ eindeutig durch Gleichung (2.8.1) gegeben.
Folgerung: Jede (differenzierbare) Vektorfunktion $\vec{F}(\vec{r})$, die stärker als $(1/r)$ gegen Null strebt für $r \to \infty$, kann als Gradient eines Skalars plus der Rotation eines Vektors dargestellt werden:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi}\int_V dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}'(\vec{r'})}{R}\right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi}\int_V dV' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}'(\vec{r'})}{R}\right) \tag{2.8.8}$$

2.8.1 Skalare Potentiale und Vektorpotentiale

Unser bisheriges Wissen können wir in zwei Theoreme zusammenfassen.
Satz 1 über rotationsfreie Felder: Folgende Bedingungen sind zueinander äquivalent:
(a) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ überall.
(b) $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$ ist unabhängig vom Weg für alle gegebenen Anfangs- und Endpunkte.
(c) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ für jeden geschlossenen Weg.
(d) $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ ist der Gradient einer skalaren Funktion U. U heißt *skalares Potential* von $\vec{F}$, ist aber nicht eindeutig, da wir jede Konstante dazuaddieren können.

Satz 2 über divergenzfreie Felder: Folgende Bedingungen sind zueinander äquivalent:
(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ überall.
(b) $\int_{\text{Oberfläche}} \vec{F} \cdot d\vec{a}$ ist unabhängig vom der Oberfläche für jede gegebene Randlinie.
(c) $\oint_{\text{Oberfläche}} \vec{F} \cdot d\vec{a} = 0$ für jede geschlossene Oberfläche.
(d) $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{W}$ ist die Rotation eines Vektors $\vec{W}$. $\vec{W}$ heißt *Vektorpotential* des Feldes $\vec{F}$, ist aber nicht eindeutig, da wir den Gradienten $\vec{\nabla}m$ einer beliebigen Funktion m dazuaddieren

können.

2.8.2 Die Maxwellschen Gleichungen

Gemäß der Aussage des Helmholtz-Theorems müssen wir zur vollständigen Bestimmung des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und des magnetischen Feldes $\vec{B}$ die vier Funktionen $\mathrm{div}\vec{E}$, $\mathrm{rot}\vec{E}$, $\mathrm{div}\vec{B}$ und $\mathrm{rot}\vec{B}$ kennen. Dazu benötigen wir mindestens vier unabhängige experimentelle Befunde.