(2) Variationsrechnung II – Physikalische Interpretation

Erinnerung:

Die Euler-Lagragne Gleichungen ermöglichen es ein Integral zu extremieren:

$$S[q] = \int_a^b L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big)\mathrm{d}t \text{ ist extremal } \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q(t)} L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t)} L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big)\right) = 0\,.$$

(2.1) Das Hamilton'sche Prinzip

Das Hamilton'sche Prinzip besagt, dass die Natur diejenige Kurve $q(t)$ bevorzugt, die das Wirkungsintegral $S[q]$ extremiert. Der Integrant der Wirkung ist dabei die Lagrange-Funktion:

$$L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) = T\big(\dot{q}(t)\big) - V\big(q(t),\dot{q}(t),t\big)\,.$$

Aus diesem Prinzip lassen sich die Newton'schen Axiome herleiten.

(a) Leite das zweite Newton'sche Axiom mithilfe des Hamilton'schen Prinzips her (unter der Annahme dass das Potential lediglich vom Ort des Teilchens abhängt: $V\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) = V\big(q(t)\big)$):

$$m\ddot{q}(t) = -\frac{\partial}{\partial q(t)} V\big(q(t)\big)\,.$$

(b) Bestätige weiterhin das dritte Newton'sche Axiom: *Actio = Reactio*

Tipp: Die Lagrange-Funktion besitzt nun die Information über zwei Teilchen, wobei das Potential nur von dem Abstandsvektor beider Teilchen $q_r(t) = q_1(t) - q_2(t)$ abhängt.

(2.2) Das Noether-Theorem – Erhaltungsgrößen und Symmetrien

Erhaltungsgrößen vereinfachen oft Rechnungen. Weiterhin hängen Erhaltungsgrößen direkt mit Symmetrien der Lagrange-Funktion zusammen.

(a)

Zunächst betrachten wir eine Zeittransformation: $\phi_\epsilon : t \mapsto t' = t + \epsilon$. Berechne nun die Änderung der Lagrange-Funktion unter dieser Transformation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} L\big(q(\phi_\epsilon(t)),\dot{q}(\phi_\epsilon(t)),\phi_\epsilon(t)\big)\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} L\big(q(t+\epsilon),\dot{q}(t+\epsilon),t+\epsilon\big)\Big|_{\epsilon=0}\,.$$

Tipps:

- Berechne zunächst die Totale Ableitung von L nach ϵ,
- nutze $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} f(a+b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(a+b)$ und
- verwende die Euler-Lagrange Gleichung.

Nutze weiterhin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} L\big(q(\phi_\epsilon(t)),\dot{q}(\phi_\epsilon(t)),\phi_\epsilon(t)\big)\Big|_{\epsilon=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) = 0\,,$$

um die erhaltene Größe unter Zeitinvarianz zu finden.

(b) (Bonus)

Für eine Koordinatentransformation $\Psi_\epsilon : q(t) \mapsto \tilde{q}(t,\epsilon)$, die die Zeit unbeeinflusst lässt, definiert man eine Symmetrie wie folgt:

$$\Psi_\epsilon \text{ ist eine Symmetrie } :\Leftrightarrow L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) = L\big(\tilde{q}(t,\epsilon),\dot{\tilde{q}}(t,\epsilon),t\big) + const \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} L\big(\tilde{q}(t,\epsilon),\dot{\tilde{q}}(t,\epsilon),t\big)\bigg|_{\epsilon=0} = 0\,.$$

Beweise nun:

$$\Psi_\epsilon \text{ ist eine Symmetrie} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t)} L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big)\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\tilde{q}(t,\epsilon)\bigg|_{\epsilon=0}\right] = 0\,.$$

Folglich ist $\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t)} L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big)\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\tilde{q}(t,\epsilon)\Big|_{\epsilon=0}$ eine Erhaltungsgröße.

Anmerkung:

Ein Beispiel für eine weniger intuitive Erhaltungsgröße, die die Berechnung eines Problems stark vereinfacht, ist der Runge-Lenz Vektor $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha\vec{e}_r$ für Potentiale der Art $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (Gravitation- bzw. Kepler-Potential und Coulomb-Potential). Hierbei ist m die Masse des Teilchens, $\vec{p}$ der Impuls und $\vec{L}$ der Drehimpuls, der ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist.

Man kann aus dem Skalarprodukt von $\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar\cos(\phi)$ folgern, dass

$$r(\phi) = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \epsilon\cos(\phi)}\,,$$

mit $\epsilon = A/m\alpha$, ist.

(2.3) Wirkung des harmonischen Oszillators

Berechne nun die Wirkung für eine volle Periode eines Teilchens mit Masse m im Potential des harmonischen Oszillators $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 m x^2$.

(a) Stelle die Lagrange-Funktion auf und verwende die Euler-Lagrange Gleichung.

(b) Löse die DGL mit den Anfangswerten $x(0) = h$ und $\dot{x}(0) = 0$.

(c) Bestimme die Dauer einer vollen Periode T und Berechne das Wirkungsintegral

$$S[x] = \int_0^T L\big(x(t),\dot{x}(t)\big)\mathrm{d}t\,.$$