Übung zur Kosmologie (WS 2009/2010)
Vorlesung: Jun-Prof Dr. J. Becker
Übung: Jens Dreyer, Raum NB7/29, Tel: 23458

Übungsblatt III [Ausgabe: 17. Nov 2009; Abgabe: 27. Nov 2009]

Ü-Zettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/∼julia/kosmo/*

Aufgabe 1 : Die Schwarzschild Metrik (5P)

Auf dem Weg zur Berechnung der Schwarzschildmetrik ergibt sich die Form des Linienelements wie folgt:

$$ds^2 = e^\nu \, dt^2 - e^\lambda \, dr^2 - r^2 \, d\Omega \tag{1}$$

mit $\nu = \nu(r, t)$ und $\lambda = \lambda(r, t)$.

a) Wie lauten der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ und seine duale Form $g^{\mu\nu}$?

b) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole $\Gamma^\rho_{\kappa\nu}$ bezüglich der Metrik.

c) Bestimmen Sie das Element G^0_1 des Einsteinschen Feldtensors unter der Verwendung dass

$$G^\mu_\nu = G_{\nu\kappa} \cdot g^{\kappa\mu} \tag{2}$$

und

$$G_{\nu\kappa} = -R_{\nu\kappa} + \frac{1}{2} \cdot g_{\nu\kappa} \cdot R \, . \tag{3}$$

Aufgabe 2 : Gravitationsfeld der Sonne (5P)

a) Gravitationsrotverschiebung
Schätzen Sie die Gravitationsrotverschiebung für Photonen ab, die von der Sonnenoberfläche emittiert werden. Nehmen Sie dabei das Gravitationsfeld der Sonne als nicht relativistisch an, außerdem soll sich der Beobachter im Unendlichen befinden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem relativistischen Dopplereffekt, der sich aus der Relativbewegung der Erde um die Sonne ergeben würde (dieser tritt jedoch nicht bei der Beobachtung der Sonne auf, allerdings bei der Beobachtung von Sternen).

b) Durchquerung des Schwarzschildradius
Nehmen Sie nun an, dass die Sonne ein schwarzes Loch, komprimiert auf den Schwarzschildradius, ist[1]. Berechnen Sie die Differenzbeschleunigung zwischen Kopf und Fuß, die ein 2 m großer Astronaut beim Durchqueren des Schwarzschildradius dieses schwarzen Lochs erdulden muss.

[1] Anmerkung: Real wird die Sonne nie ein schwarzes Loch werden - allerdings kann es andere schwarze Löcher von der Größenordnung einer Sonnenmasse geben.

Aufgabe 3 : Freier Fall ins schwarze Loch (5P)

Ein Blinklicht, welches mit der Frequenz ν_0 im Ruhesystem blinkt, befinde sich anfangs ruhend in großem Abstand von einem scharzen Loch, $r_0 >> r_s$. Das Blinklicht wird dann von einem ruhenden Beobachter in r_0 losgelassen. Von dort fällt es im freien Fall auf das schwarze Loch zu.
Die Bewegungsgleichung für ein im freien Fall befindliches Objekt in der äußeren Schwarzschildmetrik lauten

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + c^2 \cdot \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = Q^2 \tag{4}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Q}{c \cdot (1 - \frac{r_s}{r})} . \tag{5}$$

Hier ist Q eine Konstante.

a) Bestimmen Sie Q mit hilfe der Anfangsbedingungen.

b) Zeigen Sie, dass die Zeit, die seit dem Loslassen des Blinklichts vom entfernten Beobachter aus gesehen vergangen ist, gegeben ist durch das Integral

$$\tau_\infty = (1 - \frac{r_s}{r_0})^{1/2} \cdot \int_r^{r_0} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \cdot \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_0}\right)^{-1/2} dr . \tag{6}$$

Hier bedindet sich das Blinklicht im Abstand r zum schwarzen Loch.

c) Lösen Sie das Integral (6) für den Fall, dass das Blinklicht sich bereits nahe am schwarzen Loch befindet, also $r \approx r_s$. Zeigen Sie, dass die vom weit entfernten Beobachter gesehene Frequenz des Blinklichts gegeben ist durch

$$\nu \propto \exp(-\tau_\infty / K) \tag{7}$$

und bestimmen Sie die Konstante K. Wie hängt K von der Masse M des schwarzen Lochs ab?