Übung zur Kosmologie (WS 2009/2010)
Vorlesung: Jun-Prof Dr. J. Becker
Übung: Jens Dreyer, Raum NB7/29, Tel: 23458

Übungsblatt II[Ausgabe: 3. November 2009; Abgabe: 13. November 2009]

Ü-Zettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/∼julia/kosmo/*

Aufgabe 1 : Aufgabe 1: 4-dimensionale Kugelkoordinaten (5P)

Die Metrik der dreidimensionalen Hyperflächen ($R =$ konstant) für ein räumlich offenes Universium ($k = 1$) ist gegeben durch

$$dl^2 = R^2 \cdot \left[d\chi^2 + \sin^2\chi \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2) \right] \ . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass sich diese Schreibweise der Metrik aus der Form

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \tag{2}$$

herleitet, wenn der Zusammenhang zwischen den Koordinaten $(R, \chi, \theta, \phi)^t$ und $(x, y, z, w)^t$ gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \sin\chi \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \\ \sin\chi \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \\ \sin\chi \cdot \cos\theta \\ \cos\chi \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Aufgabe 2 : Dreidimensionale Hyperfläche im vierdimensionalen Raum (5P)

(a) Berechnen Sie das Volumen der 3-dimensionalen Hyperfläche im 4-dimensionalen Raum für den Fall eines sphärischen Universums ($k = 1$).
Das Integral soll hier **nicht** mit Hilfe von Computern oder Handbüchern, sondern ,,zu Fuss" berechnet werden. Tipp: Hier ist eine sinnvolle Substitution zur Lösung des Problems am besten geeignet.

(b) Zeigen Sie, dass das Volumen der 3-dimensionalen Hyperfläche im 4-dimensionalen Raum für den Fall eines hyperbolischen Universums ($k = -1$) divergiert. Auch hier soll das Integral analytisch mit nachvollziehbarem Lösungsweg gelöst werden.

Aufgabe 3 : Die Geodätengleichung (5P)

Zeigen Sie, dass die Geodätengleichung

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ik} \cdot \dot{x}^k \cdot \dot{x}^i = 0 \tag{4}$$

über den alternativen Lösungsansatz

$$\delta \int g_{ik} \cdot \dot{x}^k \cdot \dot{x}^i \, d\lambda \equiv \delta \int K \, d\lambda \tag{5}$$

erhalten werden kann. Verwenden Sie hierfür die Definition der Christoffelsymbole erster Art:

$$\Gamma_{jik} \equiv \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \cdot \dot{x}^i \cdot \dot{x}^k \tag{6}$$

und die der Christoffelsymbole zweiter Art:

$$\Gamma^m_{ik} = g^{mj} \cdot \Gamma_{jik} \, . \tag{7}$$

Verwenden Sie hier die gleiche Vorgehensweise wie in der Vorlesung. Hierbei soll jeder Schritt, von der Euler-Lagrange Gleichung bis zur Geodätengleichung, selbstständig hergeleitet und begründet werden.