## Aufgabe 13: Ladungskonjugierte Dirac-Gleichung [7 Punkte]

Die Dirac-Gleichung für ein Elektron mit Kopplung an das elektroschwache Feld $A^\mu$ lautet:

$$[\mathrm{i}\hbar\gamma_\mu\partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - mc]\Psi = 0. \tag{1}$$

Die entsprechende Gleichung für das Antiteilchen des Elektrons lautet:

$$[\mathrm{i}\hbar\gamma_\mu\partial^\mu + e\gamma_\mu A^\mu - mc]\Psi^C = 0. \tag{2}$$

Weisen Sie nach, dass

$$\Psi^C = \tilde{C}\Psi = \mathrm{i}\gamma^2 K\Psi = \mathrm{i}\gamma^2\Psi^* \tag{3}$$

die Lösung von 2 ist, wobei $K$ für die komplexe Konjugation und $\Psi^*$ für die komplexe Konjugation von $\Psi$ stehen.

*Hinweis:* Wenden Sie dazu den Operator $\tilde{C}$ auf (1) an.

## Aufgabe 14: Majorana-Phase [4 Punkte]

Zeigen Sie, dass für das Majorana-Neutrino ($\Psi_M \propto \Psi_M^C$) gilt:

$$\tilde{C}\Psi_M = \lambda_C^*\Psi_M, \tag{4}$$

wobei $\lambda_C$ eine Phase $\lambda_C = \exp(\mathrm{i}\phi)$ ist.

*Hinweis:* Nutzen Sie, wie aus der Vorlesung bekannt ist, dass das Majorana-Neutrino $\Psi_M$ eine Linearkombination aus Teilchen und Antiteilchen ist:

$$\Psi_M = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi + \lambda_C\Psi^C\right). \tag{5}$$

## Aufgabe 15: Massen-Matrix im Seesaw-Modell [4 Punkte]

Im Seesaw-Modell steht im Lagrangian ein Massenterm der Gestalt

$$\left(\overline{\Psi_L}, \overline{\Psi_L^C}\right)\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_R^C \\ \Psi_R \end{pmatrix} + \text{c.c.} \tag{6}$$

Zeigen Sie unter der Annahme $m_L = 0, m_D \ll m_R$, dass die Beträge der Eigenwerte der Matrix $M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$ sich zu $m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D$ und $m_2 \approx m_R$ ergeben.