Übung Einführung in die Neutrinoastrophysik
Jun.-Prof. Dr. Julia Becker
Übungen: Matthias Mandelartz, Florian Schuppan (NB 7/172)
Seminarbetreuung: Michaela Voth (NB 7/69) WS 11/12
Übungsblatt III *Abgabe:* 06.12.2011

Aufgabe 6: Transformationsverhalten unter Parität [4 Punkte]

Der Paritätsoperator $\hat{P}$ transformiert einen Spinor wie folgt:

$$\hat{P}\psi = \gamma^0 \psi.$$

Bestimmen sie die Paritätstransformationen folgender Ausdrücke und geben sie an, ob es sich um Skalar, Pseudoskalar, Vektor oder Pseudovektor handelt:

(a) $\bar{\psi}\psi$.

(b) $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

(c) $\bar{\psi}\gamma^5\psi$.

(d) $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$.

Aufgabe 7: Helizität und Pionenzerfall [6 Punkte]

(a) In der Vorlesung haben sie den Begriff der Helizität kennen gelernt.

  (i) Was versteht man unter Helizität?

  (ii) Welche Helizität hat ein Neutrino? Welche Helizität hat ein Antineutrino?

(b) Ein Pion zerfällt in diesem Fall nach dem Schema $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_1$. Das Myon zerfällt weiterhin nach folgendem Schema: $\mu^+ \to e^+ + \nu_2 + \bar{\nu}_3$.

  (i) Wenn das Pion den Impuls p_π hat, welchen Impuls hat dann das Myon, falls $m_\nu = 0$? Geben Sie den Gesamtimpuls des Myons in Abhängigkeit des Impulses des Pions, p_π, und der Massen m_μ und m_π im Laborsystem an, wobei anzunehmen ist, dass $p_\pi \gg m_\pi c, m_\mu c$.
  Hinweis: Führen Sie Rechnungen im Schwerpunktssystem nicht vektoriell aus.

  (ii) Wenn das Neutrino im Pionen-Zerfall eine negative Helizität hat, welche Helizität hat dann das Myon?

  (iii) Angenommen ν_2 und $\bar{\nu}_3$ haben negative und positive Helizitäten und das Myon die Helizität aus (ii), welche Helizität hat dann das Positron?

  (iv) Welche Quantenzahlen zeigen, dass ν_1 und $\bar{\nu}_3(\nu_2)$ mit dem Myon (Positron) zu assoziieren sind?

Aufgabe 8: Chirale-Darstellung [5 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass der Helizitätsoperator mit $\gamma^\mu p_\mu \pm mc$ kommutiert.
Hinweis: Der Helizitätsoperator ist definiert als:

$$\mathfrak{H} = \frac{\hat{\sigma}^k \cdot \hat{p}_k}{|\hat{p}|}.$$

(b) Was ist der Unterschied zwischen Helizität und Chiralität?
Hinweis: Der Chiralitätsoperator ist γ^5.

(c) Da wir wissen, dass die Dirac-Gleichung mit dem Helizitätsoperator und erst recht mit dem Chiralitätsoperator kommutiert bietet es sich an diese bezüglich einer gemeinsamen Basis zu schreiben, in der der Chiralitätsoperator diagonal ist. Diese Darstellung nennt man dann Chirale-Darstellung

oder Weyl-Darstellung.
Dieses geschieht mittels einer Hauptachsentransformation deren orthogonale Transformationsmatrix U sich aus den Eigenvektoren von γ^5 ergibt, die Transformationsmatrix lautet:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann nun Wellenfunktionen aus der alten Basis mittels

$$\psi_{\mathrm{Ch}} = U\psi_{Ch}$$

in die Chirale-Darstellung transformieren. Dieses geht mit Operatoren und Matrizen dann wie folgt:

$$\gamma_{\mu\mathrm{Ch}} = U^\dagger \gamma_\mu U.$$

Zeigen Sie folgende Relationen:

(i) $\gamma^0_{\mathrm{Ch}} = -\gamma^5$.

(ii) $\gamma^k_{\mathrm{Ch}} = \gamma^k$.

(iii) $\gamma^5_{\mathrm{Ch}} = \gamma^0$.

(iv) $\sigma^{0k}_{\mathrm{Ch}} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^0_{\mathrm{Ch}}, \gamma^k_{\mathrm{Ch}}] = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^k & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^k \end{pmatrix}$.

(v) $\sigma^{ij}_{\mathrm{Ch}} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^i_{\mathrm{Ch}}, \gamma^j_{\mathrm{Ch}}] = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$, für $i \neq j$.

Aufgabe 9: Prozesse der schwachen Wechselwirkung [Bonus, 2 Punkte]

Welche der folgenden Prozesse kann stattfinden? Wenn der Prozess nicht stattfinden kann, warum nicht?

(a) $\bar{\nu}_\mu p \to \mu^+ n$.

(b) $\bar{\nu}_\mu p \to e^+ n$.

(c) $\nu_e p \to e^+ \Lambda^0 K^0$.

(d) $\nu_e p \to e^- \Sigma^+ K^+$.

(e) $p \to e^+ n \nu_e$.

(f) $n \to e^- p \bar{\nu}_e$.