Übung Einführung in die Neutrinoastrophysik
Jun.-Prof. Dr. Julia Becker
Übungen: Matthias Mandelartz, Florian Schuppan (NB 7/172)
Seminarbetreuung: Michaela Voth (NB 7/69) WS 11/12
Übungsblatt II *Abgabe:* 22.11.2011

Aufgabe 4: Das Goldhaber-Experiment [8 Punkte]

Im Experiment von Goldhaber et al. [1] zur Messung der ν_e-Helizität wurde die zirkulare Polarisation der bei der Zerfallskaskade

$$^{152}\mathrm{Eu} + e_K^- \to {}^{152}\mathrm{Sm}^* + \nu_e, \quad {}^{152}\mathrm{Sm}^* \to {}^{152}\mathrm{Sm} + \gamma$$

entstehenden γ-Quanten ausgenutzt. Dabei ist e_K^- ein in der K-Schale eingefangenes Elektron.

(a) Wie groß ist die kinetische Energie des $^{152}\mathrm{Sm}^*$-Kerns, wenn der Impuls des Elektronneutrinos nach dem K-Einfang 0.95 MeV beträgt?

(b) Welche Strecke legt der $^{152}\mathrm{Sm}^*$-Kern während seiner Lebensdauer von $\tau = 3 \times 10^{-14}$ s zurück? Könnte innerhalb dieser Zeit der Kern mit einem anderen Kern des Kristalls in Wechselwirkung treten?
Hinweis: Die Gitterkonstante des Kristalls beträgt $1.08 - 1.09 \times 10^{-9}$ m.

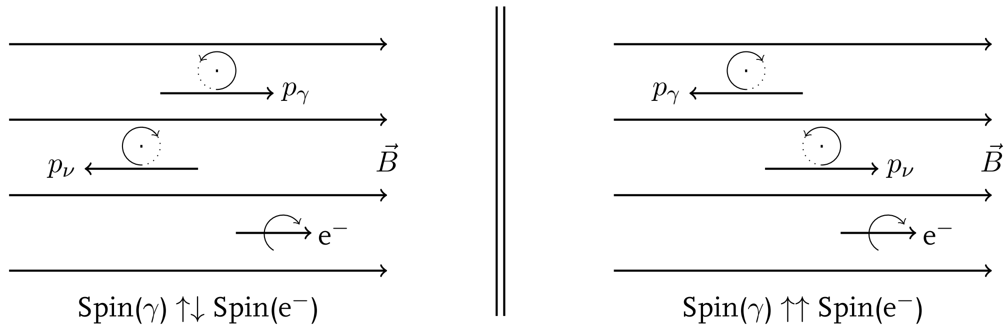
(c) Wie groß ist die kinetische Energie des $^{152}\mathrm{Sm}$-Kerns aufgrund der Emission des γ-Quants der Energie $E_\gamma = 0.961$ MeV? Vergleichen Sie diesen Wert mit der natürlichen Linienbreite $\Gamma \equiv \frac{\hbar}{\tau}$ des $^{152}\mathrm{Sm}^*$-Zustands und der Rückstoßenergie aus (a). Welche Bedingung muss die Emissionsrichtung des ν_e erfüllen, damit das Photon von einem anderen $^{152}\mathrm{Sm}$-Kern resonant absorbiert werden kann?
Hinweis: Für Resonanzabsorption dürfen die Energie des zu absorbierenden Photons und die kinetische Energie des absorbierenden $^{152}\mathrm{Sm}$-Kerns zusammen von der Energiedifferenz zum angeregten Zustand höchstens um die natürliche Linienbreite abweichen.

Der Absorptionskoeffizient μ für zirkular polarisierte Photonen in magnetisierter Materie ist gegeben durch:

(Fall A) $\mu = \mu_0 + \mu_p$, falls $\vec{p}(\gamma) \uparrow\uparrow \vec{B}$ und γ rechts zirkular polarisiert ist, oder falls $\vec{p}(\gamma) \uparrow\downarrow \vec{B}$ und γ links zirkular polarisiert ist.

(Fall B) $\mu = \mu_0 - \mu_p$, falls $\vec{p}(\gamma) \uparrow\uparrow \vec{B}$ und γ links zirkular polarisiert ist, oder falls $\vec{p}(\gamma) \uparrow\downarrow \vec{B}$ und γ rechts zirkular polarisiert ist.

Der Beitrag μ_0 ist polarisationsunabhängig, während μ_p polarisationsabhängig ist.



Die Elektronen in der Abbildung sind die freien Elektronen in der magnetisierten Materie. Man erkennt, dass im Fall A bei beiden Konfigurationen der Spin des Photons und der eines Elektrons antiparallel sind, während sie im Fall B für beide Konfigurationen parallel sind. In Fall A besteht deshalb die Möglichkeit der Absorption durch einen Spinflip des Elektrons, was auch als Compton-Streuung an polarisierten Elektronen bezeichnet wird. Durch diese zusätzliche Absorptionsmöglichkeit ist der Absorptionskoeffizient in Fall A höher als in Fall B. Im Fall B ist ein solcher Spinflip nicht möglich, da die beiden Spins bereits parallel sind.

(d) Im Experiment von Goldhaber et al. [1] durchquerten die Photonen aus dem $^{152}\mathrm{Sm}^*$-Zerfall zunächst ein mittels eines Elektromagneten magnetisiertes Stück Eisen der Länge L und wurden anschließend an Sm_2O_3 gestreut. Die Rate der Photonen, die von den $^{152}\mathrm{Sm}$-Kernen des Streuers noch resonant absorbiert werden konnte, wurde gemessen. Durch die Wahl der Richtung von $\vec{B}$ relativ zu $\vec{p}(\gamma)$ erhält man die Zählraten $N_{\uparrow\uparrow}$ bzw. $N_{\uparrow\downarrow}$ für $\vec{p}(\gamma) \uparrow\uparrow \vec{B}$ bzw. $\vec{p}(\gamma) \uparrow\downarrow \vec{B}$. Aus dem Vorzeichen der Größe

$$\delta \equiv 2(N_{\uparrow\uparrow} - N_{\uparrow\downarrow})/(N_{\uparrow\uparrow} + N_{\uparrow\downarrow}) \tag{1}$$

folgt die Richtung der zirkularen Polarisation das Photons und daraus die Helizität des Elektronneutrinos. Wie?

	$^{152}\mathrm{Eu}$	+	e_K^-	$\rightarrow$	$^{152}\mathrm{Sm}^*$	+	ν_e	verboten?
I	0		1/2		1		1/2	-
m_I	0		1/2		0		-1/2	nein
m_I	0		1/2		0		1/2	ja
m_I	0		-1/2		-1		1/2	nein
m_I	0		-1/2		0		-1/2	ja

Darüber hinaus sind die Photonen aus der Reaktion $^{152}\mathrm{Sm}^* \rightarrow ^{152}\mathrm{Sm} + \gamma$ transversal polarisiert $I_{z,\gamma} = \pm 1$, $I_{x,\gamma} = I_{y,\gamma} = 0$, also:

	$^{152}\mathrm{Sm}^*$	$\rightarrow$	$^{152}\mathrm{Sm}$	+	γ	Anmerkung
I	1^-		0^+		+1	E1-Strahlung
m_I	1		0		1	
m_I	0		0		± 1	verboten
m_I	-1		0		-1	

(e) Zeigen Sie, dass für links polarisierte Photonen $\delta = \tanh(\mu_p \cdot L)$ gilt. Für $E_\gamma = 0.96$ MeV gilt $4\mu_p \,/\, \mu_0 = 0.018$. Goldhaber et al. [1] konzipierten ihren Versuchsaufbau außerdem so, dass $\mu_0 \cdot L = 3$. Welchen Wert erwarten Sie für δ?

(f) Goldhaber et al. [1] fanden $\delta = 0.017(3)$. Welche bisher vernachlässigten Effekte können die Abweichung dieses Messwerts von Ihrem erwarteten Wert verursachen?

Aufgabe 5: Dirac-Matrizen [7 Punkte]

Die Klein-Gordon-Gleichung ist die relativistische Formulierung der Schrödinger-Gleichung,

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0\ , \tag{2}$$

mit $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$, die allerdings nur für spinlose Bosonen gilt. Eine Beschreibung für freie, relativistische, massive Fermionen mit $s = \frac{1}{2}$ liefert die Dirac-Gleichung,

$$(\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0\ . \tag{3}$$

Die Lösungen Ψ dieser Gleichung sind vierdimensionale Spinore. Die γ^μ sind die Dirac-Matrizen (4x4-Matrizen),

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2x2} & 0_{2x2} \\ 0_{2x2} & -\mathbb{1}_{2x2} \end{pmatrix},\ \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_{2x2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0_{2x2} \end{pmatrix}\ . \tag{4}$$

Dabei sind die σ^i die Pauli-Matrizen (für die Mathematik-affinen: Generatoren der SU(2), die eine Orthonormalbasis dieser Lie-Gruppe darstellen)

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ . \tag{5}$$

Zur Erinnerung: Diese erfüllen die Kommutatorrelation

$$[\sigma^j, \sigma^k] = 2\mathrm{i}\epsilon_{jkl}\sigma^l\ . \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \equiv \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\ .$$

(b) Die Matrix γ^5 ist definiert als $\gamma^5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Zeigen Sie:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0_{2x2} & \mathbb{1}_{2x2} \\ \mathbb{1}_{2x2} & 0_{2x2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0_{4x4}\ .$$

(c) Berechnen Sie den Tensor

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

und zeigen Sie, dass

$$[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0.$$

Literatur

[1] M. Goldhaber, L. Grodzins und A. W. Sunyar, *Helicity of Neutrinos*. Phys. Rev., 109, 1015, 1958.