Magnetische Kopplung zwischen Chromosphäre und Konvektionszone der Sonne

Diplomarbeit im Fach Physik

von **Jens Kleimann**

angefertigt am
Lehrstuhl für Theoretische Physik IV
der Ruhr–Universität Bochum

April 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**
1.1 Vorbemerkung . . . 7
1.2 Motivation . . . 8
1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit . . . 10

2 Das physikalische Szenario **11**
2.1 Innerer Aufbau der Sonne . . . 11
2.2 Die solare Atmosphäre . . . 13
2.3 Das solare Magnetfeld . . . 15
2.3.1 Stärke und Verteilung . . . 15
2.3.2 Entstehung von Flussröhren . . . 16

3 MHD–Grundgleichungen **19**
3.1 Hydrodynamik . . . 19
3.2 Die vereinfachten Maxwell–Gleichungen . . . 20
3.3 Kopplung von Feld und Materie . . . 21
3.3.1 Die Induktionskraft . . . 21
3.3.2 Das Ohm'sche Gesetz . . . 22
3.4 Zusammenfassung der MHD–Gleichungen . . . 22
3.5 Wichtige Theoreme der MHD . . . 23
3.5.1 "Eingefrorene" Feldlinien . . . 23
3.5.2 Isorotation . . . 23
3.5.3 Magnetischer Druck . . . 24

4 Die stationäre Lösung **25**
4.1 Vereinfachungen . . . 25
4.1.1 Zylindrische Flussröhre . . . 25
4.1.2 Horizontale Temperaturschichtung . . . 25

4.1.3 Stationarität . . . 26
4.1.4 Die Schwerebeschleunigung g . . . 26
4.1.5 Der Trägheitsterm . . . 27
4.1.6 Der Viskositätsterm . . . 27
4.2 Das Koordinatensystem . . . 29
4.3 Das Magnetfeld . . . 29
4.3.1 Allgemeine Form . . . 29
4.3.2 Wahl des B_z–Profils . . . 31
4.4 Das Resistivitätsprofil $\eta = \eta(z)$ . . . 35
4.4.1 Konstituenten der Plasma–Leitfähigkeit . . . 35
4.4.2 Die Saha–Gleichung . . . 36
4.4.3 Anpassung an empirische Werte . . . 36
4.5 Das Dichteprofil $\rho = \rho(z)$ . . . 38
4.6 Das Strömungsfeld . . . 40
4.6.1 Einfache Ansätze für $\mathbf{v}$ . . . 40
4.6.2 Allgemeines Geschwindigkeitsfeld . . . 41
4.6.3 Regularität entlang der Symmetrieachse . . . 43
4.6.4 Diskussion des Einströmverhaltens . . . 43
4.6.5 Qualitative Verallgemeinerung auf $B_r \neq 0$ . . . 45
4.6.6 Toroidaler Massefluss . . . 51
4.7 Der Schlupf zwischen Feld und Fluid . . . 52
4.7.1 Randbedingungen . . . 54
4.7.2 Spezialisierung auf ein (b_ϕ, b_z)–Profil . . . 54
4.7.3 Vertikale Abströmung . . . 57
4.7.4 Wirbelprofil . . . 58
4.7.5 Wirbelvorgabe . . . 60
4.8 Der minimale Röhrenradius . . . 64
4.9 Relevanz der resistiven Schicht . . . 67
4.9.1 Abschätzung der Beobachtbarkeit . . . 67
4.9.2 Quantifizierung des Feldlinienschlupfes . . . 69
4.10 Stand der Beobachtung . . . 70

5 Zusammenfassung und Ausblick 73

6 Diskussion möglicher Verfeinerungen 77
6.1 Volle Röhrengeometrie . . . 77
6.2 Variabler Röhrenquerschnitt . . . 78
6.3 Radiale Variation der Temperatur . . . 80

6.4 Zwei–Komponenten–Modelle 82

A Parität von $\mathcal{E}(x)$ **87**

B $z \mapsto R(z)$ bei poloidalem B–Feld **89**

Literaturverzeichnis **90**

Danksagung **93**

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Vorbemerkung: Einheitensystem und Notation

In dieser Arbeit wird durchweg dem MKS–Einheitensystem der Vorzug gegenüber dem GAUSS'schen cgs–System gegeben, da die verwandten Formeln dadurch geringfügig einfacher werden und das SI–System den Vergleich mit beobachteten bzw. gemessenen Größen erleichtert. Insbesondere wird die Temperatur *nicht* in Einheiten der Energie angegeben. Es finden ferner folgende Naturkonstanten Verwendung:

c	$=$	$3.0 \cdot 10^{8}$ m/s	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$ C	Elementarladung
m_{e}	$=$	$9.1 \cdot 10^{-31}$ kg	Ruhemasse des Elektrons
m_{p}	$=$	$1.7 \cdot 10^{-27}$ kg	Ruhemasse des Protons
h_{P}	$=$	$6.6 \cdot 10^{-34}$ J s	Planck–Wirkungsquantum
k_{B}	$=$	$1.4 \cdot 10^{-23}$ J/K	Boltzmannkonstante
μ_0	$=$	$1.3 \cdot 10^{-6}$ H/m	Permeabilität des Vakuums
ϵ_0	$=$	$8.8 \cdot 10^{-12}$ F/m	Dielektrizitätskonstante
G	$=$	$6.6 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2	Gravitationskonstante

Weitere Formelzeichen werden, wie allgemein üblich, am Ort ihres ersten Auftauchens definiert. Die Einheit einer skalaren Größe X bezeichnen wir im Allgemeinen mit $[X]$, z.B. $[B_z] = 1$ T(esla). Mehrere, durch Kommata getrennte Ausdrücke in eckigen Klammern stellen dagegen eine allgemeine geordnete Aufzählung dar.

Vektorielle Größen sind durch Fettdruck gekennzeichnet; ihr Absolutbetrag wird, wie andere skalare Variablen auch, kursiv gesetzt[1]:

$$B = \|\mathbf{B}\| \equiv \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}} \ . \tag{1.1}$$

In der Darstellung als Zeilen– oder Spaltenvektoren werden die Komponenten in Zylinderkoordinaten in der Reihenfolge $[r, \phi, z]$ notiert, z.B.

$$\mathbf{B} = (B_r, B_\phi, B_z) = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\phi \\ B_z \end{pmatrix} ; \tag{1.2}$$

die entsprechenden Einheitsvektoren werden im Bedarfsfall mit $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ bezeichnet.
Gelegentlich wird bei partiellen Ableitungen eine der abkürzenden Schreibweisen

$$\partial_a b \equiv \partial_a b(\ldots, a, \ldots) \equiv \frac{\partial b(\ldots, a, \ldots)}{\partial a} \equiv \frac{\partial b}{\partial a} \tag{1.3}$$

verwendet, wenn dies übersichtlichere Formeln ergibt.

1.2 Motivation

Eine der herausragenden Erkenntnisse der Sonnenphysik des 20. Jahrhunderts war die Feststellung, dass praktisch alle solaren Aktivitäten (d.h. die Gesamtheit aller zeitlich begrenzten Abweichungen vom Ruhezustand der Sonne), angefangen von den seit Jahrhunderten bekannten[2] Sonnenflecken bis hin zu Flares und Koronalen Bögen, durch starke, räumlich hochkonzentrierte Magnetfelder verursacht werden. Während aber etwa die Existenz derartiger Felder in Sonnenflecken schon seit Längerem bekannt war — erste Messungen wurden bereits 1909 von Hale durchgeführt —, hatten Ansätze zu ihrer theoretischen Beschreibung erst mit dem Aufkommen der Magnetohydrodynamik (kurz MHD) in den 1930er Jahren Erfolg.
Im Bestreben, die mannigfaltigen Erscheinungsformen solarer Aktivität auf

[1] Einzige Ausnahme hiervon ist der Ortsvektor $\mathbf{x}$. Dessen Betrag wird ggf. einfach mit $\|\mathbf{x}\|$ bezeichnet, da das Symbol x ab Abschnitt 4.3.2 für eine dimensionslose Radialkoordinate verwendet werden soll.

[2] Wenn man einer von Priest [1] gegebenen Zeittafel glauben darf, beobachtete bereits Theophrastus von Athen um 350 v. Chr. Sonnenflecken mit dem bloßen Auge!

wenige Grundszenarien zurückzuführen, hat sich das Konzept der *magnetischen Flussröhre* als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Man stellt sich dabei eine schlauchförmige Magnetfeldstruktur vor, welche von konvektiven Plasmaströmungen an die Oberfläche der Sonne getragen wird, diese an zwei Stellen durchbricht und so eine bogenförmige Verbindung zwischen den beiden Durchstoßpunkten[3] herstellt. Im Falle hinreichend ausgedehnter Flussröhren bildet sich an diesen Durchstoßpunkten ein Sonnenfleckenpaar, ansonsten können durch die Wechselwirkung mit dem umgebenden Plasma verschiedenste morphologische Strukturen entstehen.
Die (im Allgemeinen räumlich variable) Resistivität η des Plasmas geht als wesentlicher Parameter in die magnetohydrodynamischen Gleichungen ein und gestattet eine Unterscheidung in ideale ($\eta = 0$) und nichtideale oder resistive ($\eta \neq 0$) MHD. Die Stärke der Kopplung zwischen Magnetfeld und Plasma ist wesentlich von η bzw. der damit verbundenen dimensionslosen *magnetischen Reynolds–Zahl* $R_{\mathrm{M}} := \mu\,\mathcal{U}\mathcal{L}/\eta$ anhängig[4]: Während im idealen Fall die Magnetfeldlinien den Bewegungen des Plasmas exakt folgen (sog. "Eingefrorenheit"[5] des Magnetfeldes), wird diese Kopplung mit wachsendem η immer weniger strikt und gestattet einen zunehmenden Schlupf zwischen den Feldlinien des Magnet– und des Strömungsfeldes. Wie die Beobachtung der Sonnenoberfläche zeigt, ist diese durch ein System turbulenter Wirbel gekennzeichnet, die das Magnetfeld der Flussröhren mitnimmt und ihm so eine zunehmende Verdrillung aufprägt.
Während nun die vereinfachende Annahme idealer MHD in der Mehrzahl der astrophysikalischen Szenarien (Sonneninneres, Korona, Interstellares Medium, ...) gerechtfertigt ist, macht im Falle der unteren solaren Atmosphäre die Existenz einer relativ kühlen und deshalb nur zu einem Bruchteil ($\leq$ 0.1 %) ionisierten Schicht diese Annahme fraglich. Eine Klärung der Wirkung dieser Schicht auf die magnetische Kopplung zwischen den darüber– und darunterliegenden Zonen ist um so wichtiger, da die überwiegende Zahl solarer Phänomene einerseits weit in den supersolaren Raum hineinreichen, andererseits aber als in den tieferen Schichten jenseits der sichtbaren Oberfläche verankert gedacht werden und daher zwangsläufig diesen hochgradig nichtidealen Bereich passieren müssen.

[3] In Anbetracht der im Folgenden nicht zu vernachlässigenden Querschnittsfläche der Flussröhre wäre der Begriff "Durchstoß*flächen*" angebrachter.

[4] $\mathcal{U}$ und $\mathcal{L}$ bezeichnen die für das System charakteristischen Geschwindigkeits– und Längenskalen und μ die magnetische Permeabilität.

[5] Diese Terminologie wird in Abschnitt 3.5.1 präzisiert.

1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, den Einfluss der resistiven Schicht auf die durch das Magnetfeld einer bogenförmigen Flussröhre induzierte Plasmaströmung zu untersuchen und dabei insbesondere zu einer quantitativen Beschreibung des sich einstellenden Feldlinienschlupfes zu gelangen. Hierzu soll vereinfachend nur die (dann axialsymmetrische) Umgebung eines der Durchstoßpunkte betrachtet werden. Wird nun das Plasma im oberen Röhrenbereich festgehalten und an einem der beiden Fußpunkte eine Konvektionsbewegung in Form eines stationären Wirbels vorgegeben, so werden die Magnetfeldlinien von diesem Wirbel mitgenommen und entsprechend "aufgewickelt". Die im Wirbel bereitgestellte (und ständig nachzuliefernde) kinetische Energie wird dabei zunächst in magnetische Feldenergie und schließlich in Joule'sche Wärme umgewandelt. Der (nur im nichtidealen Fall existierende) stationäre Endzustand ist dann erreicht, wenn die Feldstärke[6] so groß geworden ist, dass die Ohm'sche Verlustleistung ($\propto \eta \|\nabla \times \mathbf{B}\|^2$) gleich der zugeführten kinetischen Leistung wird.
Um die Selbstkonsistenz des Modells zu wahren, muss der volle Satz der resistiven Grundgleichungen simultan gelöst werden; lediglich die Modellierung der resistiven Schicht selbst in Form der Funktion $\eta = \eta(z)$ wird vorgegeben. Die dabei zum Tragen kommende Philosophie ist die, dass zunächst alle Möglichkeiten einer *einfachen* Beschreibung auszuschöpfen sind, bevor an konzeptionelle Erweiterungen des Modells gedacht wird.
Nachdem im ersten Kapitel eine Einführung in das Thema und die zu bearbeitende Fragestellung gegeben wurde, stellt Kapitel 2 das astrophysikalische Umfeld vor, indem es kurz den Aufbau der Sonne, ihrer Atmosphäre und ihres Magnetfeldes schildert und einige der relevanten Zusammenhänge beleuchtet. In Kapitel 3 werden die Grundzüge der zu lösenden MHD–Grundgleichungen rekapituliert und einige Theoreme genannt, die sich als nützlich für ein intuitives Verständnis der Feld–Fluid–Wechselwirkung erwiesen haben. Kapitel 4 beschreibt und diskutiert die gewählten Randbedingungen und Vereinfachungen, stellt in einiger Ausführlichkeit den Lösungsweg dar und diskutiert die Ergebnisse, insbesondere auch im Hinblick auf ihre beobachtungstechnische Relevanz. Abschließend wird in Kapitel 6 ein Ausblick auf denkbare Erweiterungen der vorgelegten Betrachtungen gegeben und in Ansätzen über die damit möglicherweise erreichbaren Resultate spekuliert.

[6] Die Begriffe "Feldstärke" und "Flussdichte" werden beide synonym für $\|\mathbf{B}\|$ benutzt.

Kapitel 2

Das physikalische Szenario

Dieses Kapitel hat zum Ziel, das Leser in die physikalischen Gegebenheiten des Systems Konvektionszone – Photosphäre – Chromosphäre einzuführen und ihn mit der dabei verwendeten Terminologie vertraut zu machen.

2.1 Innerer Aufbau der Sonne

Das 1869 von Lane vorgeschlagene Gaskugel–Modell darf als eines der ersten Sonnenmodelle betrachtet werden, das trotz seiner Einfachheit zu einer in wesentlichen Punkten korrekten Vorstellung vom inneren Aufbau der Sonne führt. In ihm wird die Sonne als sphärisch–symmetrische Gasmasse — im Wesentlichen Wasserstoff — modelliert, die durch ihre eigene Gravitationskraft zusammengehalten wird. Ist $m(r)$ die in einer Kugel mit Radius r eingeschlossene Gesamtmasse und

$$g(r) := \frac{Gm(r)}{r^2} \tag{2.1}$$

die Schwerebeschleunigung auf der Oberfläche dieser gedachten Kugel, so kann aus zweien der vier Grundgleichungen des Sternaufbaus[1],

$$\frac{dP(r)}{dr} = -g(r)\ \rho(r) \tag{2.2}$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2\ \rho(r)\ , \tag{2.3}$$

[1]Die anderen beiden Gleichungen betreffen die Variation von Temperatur $T(r)$ und Luminosität $L(r)$ (Strahlungsleistung); siehe dazu die jeweiligen ersten Kapitel von [1] oder [4].

welche die radiale Abhängigkeit von Druck P und Dichte ρ bestimmen, nach einem Variablenwechsel

$$m = m(r) \rightarrow r = r(m)$$

die Differentialgleichung

$$\frac{dP(m)}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi\ r^4(m)} \tag{2.4}$$

hergeleitet werden. Integration von (2.4) liefert mit $r(m) \leq R_\odot$ einen Wert von

$$P_{\text{min}} := \frac{G(M_\odot)^2}{8\pi\ (R_\odot)^4} \approx 4 \cdot 10^{13}\ \text{Pa} \tag{2.5}$$

als untere Grenze für den Gasdruck im Zentrum der Sonne; hierbei ist $M_\odot = 2.0 \cdot 10^{30}$ kg die Masse der Sonne und $R_\odot = 7.0 \cdot 10^8$ m ihr (Photosphären–) Radius. Analoge Überlegungen weisen auf eine Kerndichte von

$$\rho_{\text{c}} \approx 1.6 \cdot 10^5\ \text{kg/m}^3 \tag{2.6}$$

und — in Verbindung mit der Zustandsgleichung $P = (k_{\text{B}}/\bar{m})\ \rho\ T$ des idealen Gases[2] — eine Kerntemperatur von

$$T_{\text{c}} \approx \frac{G\bar{m}M_\odot}{k_{\text{B}}R_\odot} \approx 10^7\ \text{K} \tag{2.7}$$

hin.[3] Bei der unter diesen Bedingungen ablaufenden nuklearen Fusionsreaktion

$$4\ {}^1\text{H}^+ + 2e^- \ \rightarrow\ {}^4\text{He}^{2+} + 2\gamma + 2\nu_{\text{e}} \tag{2.8}$$

werden ca. 3 % der Masse der Reaktanden in Energie umgewandelt, welche dann in Form von zwei hochfrequenten Gammateilchen (je 13.1 MeV) und

[2] $\bar{m}$ bezeichnet die mittlere Teilchenmasse; für vollständig ionisiertes Wasserstoffgas ist also $\bar{m} \approx m_{\text{p}}/2$.

[3] Der Literaturwert (siehe Priest [1]) lautet $T_{\text{c}} = 1.6 \cdot 10^7$ K. Eine ausführliche Diskussion der Grundgleichungen des Sternaufbaus und ihrer Lösungen findet sich u.a. bei Kippenhahn & Weigert [4]. Dort wird insbesondere die Annahme des idealen Gases gerechtfertigt.

zwei Neutrinos (je 0.25 MeV) abgestrahlt wird.[4] Die numerische Integration der Grundgleichungen (siehe [4]) zeigt, dass die Energieerzeugung durch Fusion auf einen Kernbereich bei $r \leq R_{\mathrm{c}} \approx 0.25\ R_{\odot}$ beschränkt ist. Das darüber befindliche Material ist durch einen negativen Temperaturgradienten $\partial_r T(r) < 0$ gekennzeichnet und daher potentiell anfällig für *konvektive Instabilität*. PRIEST [1] folgend kann diese Instabilität durch ein sogenanntes *Paket–Argument* beschrieben werden und setzt ein, sobald die daraus ableitbare *Schwarzschild–Bedingung*

$$-\frac{dT(r)}{dr} > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\bar{m}\ g(r)}{k_{\mathrm{B}}} \tag{2.10}$$

erfüllt ist. γ bezeichnet dabei den Adiabaten–Exponenten des Gases und hat im Falle eines *idealen* Gases bekanntlich den Wert 5/3. Die (numerisch ermittelte) untere Grenze des Gültigkeitsbereiches von (2.10) wird von PRIEST [1] mit $r = R_{\mathrm{conv}} := 0.86\ R_{\odot}$ angegeben und trennt die auf dem Fusionskern aufsetzende *Radiative Zone* von der *Konvektionszone*; letztere erstreckt sich bis zur sichtbaren Oberfläche der Sonne, der *Photosphäre* bei $r = R_{\odot}$. Fotografische Aufnahmen dieser Oberfläche zeigen ein Netzwerk aus Plasmaballen (sog. Granulations– und Supergranulationszellen von einigen 10^4 bzw. 10^5 km Durchmesser), die in der turbulenten Konvektionszone aufsteigen und — nach erfolgter Abkühlung — wieder absinken.

2.2 Die solare Atmosphäre

Während Dichte und Temperatur im Inneren der Sonne nach außen monoton abfallen, und dies im Falle der Dichte auch für $r > R_{\odot}$ richtig bleibt, erreicht die Temperatur bei etwa $r \approx R_{\odot} +$ 500 km ein Minimum von ca. $T_{\mathrm{min}} \approx 4170$ K und steigt dann wieder an, zuletzt bis auf ca. 10^6 K in der *Korona*. Obwohl

[4] Frühere Erklärungsversuche die Energieproduktion der Sonne betreffend, basierend etwa auf Meteoriteneinfang, Kernspaltung oder Schrumpfung wurden verworfen, da sie unter anderem nicht in der Lage waren, die über $\Delta\tau \approx 10^9$ a konstante Leuchtkraft von $L_{\odot} \approx 3.9 \cdot 10^{26}$ W zu erklären. KELVIN und HELMHOLTZ etwa argumentierten, dass die in der Sonne gespeicherte Gravitationsenergie

$$W_{\mathrm{grav}} \approx \frac{3}{5} \frac{G(M_{\odot})^2}{R_{\odot}} \tag{2.9}$$

maximal für einen Zeitraum von etwa $\Delta\tau_{\mathrm{grav}} := W_{\mathrm{grav}}/L_{\odot} \approx 2 \cdot 10^7$ a reichen würde.

dieses Phänomen seit mehreren Jahrzehnten bekannt ist, konnte bisher keine allgemein akzeptierte Theorie zu seiner Erklärung vorgebracht werden.
Anhand des in Abbildung 2.1 dargestellten Temperaturprofils wird die solare

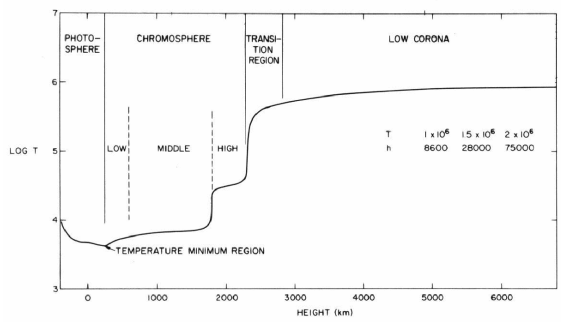

Abbildung 2.1: Temperaturprofil der solaren Atmosphäre, nach Priest [1].

Atmosphäre in drei Bereiche eingeteilt:

- Die *Photosphäre* beginnt definitionsgemäß an der sichtbaren Oberfläche der Sonne, genauer gesagt in derjenigen Entfernung vom solaren Zentrum, in der die optische Tiefe τ für Licht der Wellenlänge 500 nm gleich eins wird, und endet am Temperaturminimum.[5] Sie hat damit eine Dicke von nur 500 km und ist die dichteste und kühlste der drei Schichten. Das Gas der Photosphäre liegt weitgehend in neutraler Form vor.[6]

- Die darüber befindliche *Chromosphäre* zeigt (bei weiter abfallender Dichte) wiederum eine höhere Temperatur und dadurch eine zunehmende, zuletzt fast vollständige Ionisierung.

- Etwa 2000 km oberhalb der Photosphäre steigt die Temperatur innerhalb einer nur 500 km dicken Übergangszone (*"transition region"*) von unter 10^4 K auf etwa 10^6 K an und definiert[7] so den Übergang in

[5] Gelegentlich wird die Photosphäre auch definiert als die Zone, aus der der größte Teil des sichtbaren Lichtes emittiert wird; in diesem Fall ist sie nur 100 km dick und zentriert auf $\tau = 1$.

[6] Der von Priest [1] gezeigte Ionisationsgrad $n_{\mathrm{H}^+}/n_{\mathrm{H}}$ variiert zwischen 10^{-3} und 10^{-6}.

[7] Golub & Pasachoff [2] geben allerdings zu bedenken, dass eine derartige (strikt horizontale) Abgrenzung an Hand von Höhe und Temperatur nur für die *ruhige* Sonne wirklich sinnvoll ist, während die tatsächliche lokale Temperaturschichtung nicht notwendi-

die *Korona*, welche als der Wirkungsbereich des Sonnenwindes gesehen werden darf und sich bis weit jenseits der Erdbahn erstreckt.

2.3 Das solare Magnetfeld

2.3.1 Stärke und Verteilung

Im Gegensatz zu den Magnetfeldern tellurischer Himmelskörper wie der Erde, bei denen es sich im Wesentlichen um vom Sonnenwind deformierte Dipole handelt, kann das Magnetfeld der Sonne begrifflich in zwei Anteile zerlegt werden:

- zum einen das vergleichsweise schwache *Hintergrundfeld* der Größenordnung $\bar{B} \approx 10^{-4}$ T, dessen Komponenten auf Längen im Bereich des Sonnenradius variieren,

- zum anderen einzelne, räumlich eng lokalisierte Orte hoher Flussdichten ($\bar{B} \approx 0.1$ ... 0.2 T), die im Allgemeinen mit Erscheinungen wie Sonnenflecken, Koronalen Bögen, Flares, Spiculae, o.ä. verbunden sind. Wie man heute zu wissen glaubt, beruhen praktisch *alle* Ausprägungen solarer Aktivität auf der Existenz dieser Magnetfelder.

Beobachtungen legen nahe, dass die Mehrzahl dieser starken, kurzskaligen Felder die Gestalt langgestreckter, schlauchartiger Gebilde haben, welche senkrecht aus der Photosphäre hervortreten und als *Flussröhren* (im engeren Sinne[8]) bezeichnet werden. Wie in Abbildung 2.2 angedeutet treten Flussröhren mit Radien von einigen 100 km bevorzugt an den Rändern der Supergranulationszellen auf, an denen abgekühlte Plasmaballen nach unten absinken.

---

gerweise horizontal — gelegentlich sogar *vertikal* — verläuft und die inhomogene Struktur der Korona eher nach einer *phänomenologischen* Abgrenzung verlangt.

[8]Die Theorie der Vektorfelder definiert eine Flussröhre (im weiteren Sinne) als das Volumen, welches von denjenigen Feldlinien begrenzt wird, die eine gegebene, einfach geschlossene Kurve schneiden. Hierbei werden keine weiteren Forderungen an die Form oder Stärke des Feldes gestellt, und so können Flussröhren dieser allgemeinen Art für jedes nichtverschwindende Vektorfeld definiert werden.

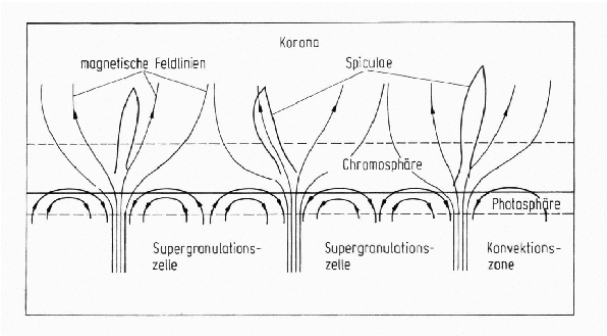

Abbildung 2.2: B–Feld–Struktur und Supergranulaton, nach SCHEFFLER [8]

2.3.2 Entstehung von Flussröhren

Die Frage der Entstehung des solaren Magnetfeldes und seiner Aufrechterhaltung gegen Dissipation ist unter dem Stichwort "Dynamo–Problem" bekannt und derzeit noch weitgehend ungelöst. Problematisch ist insbesondere die Bedingung konstanter, hoher Leitfähigkeit[9], die von COWLING 1934 gezeigte Nichtexistenz (axial–) symmetrischer Lösungen (*"Anti–Dynamo–Theorem"*) sowie das weitgehende Fehlen experimenteller Daten. Es wird vermutet, dass Flussröhren durch "Aufwickeln" eines schwachen Saatfeldes am unteren Rand der Konvektionszone entstehen. Da ihr Feld im Plasma "eingefroren" ist[10], können sie durch konvektive Materieströmungen bis zur Oberfläche getragen werden und diese durchbrechen. Die Aufwärtsbewegung wird außerdem begünstigt durch den Effekt des *magnetischen Auftriebs*: Da der Druck in ihrem Inneren um den Betrag des magnetischen Druckes[11] $P_{\mathrm{mag}} = B^2/(2\mu)$ über dem Gasdruck des feldfreien Außenraumes liegt, liegt im Inneren (bei Annahme des thermodynamischen Gleichgewichtes) eine um

$$\Delta\rho := \frac{\bar{m}\, P_{\mathrm{mag}}}{k_{\mathrm{B}}\, T} \tag{2.11}$$

[9] Lässt man variable Leitfähigkeit, insbesondere elektrische Leiter und Nichtleiter zu, so können einfachste Anordnungen angegeben werden, die sehr starke B-Felder erzeugen und aufrechterhalten.

[10] Zur Erläuterung siehe Abschnitt 3.5.1.

[11] Zur Erläuterung siehe Abschnitt 3.5.3.

geringere Gasdichte vor, und die gesamte Konfiguration erfährt eine entsprechende Auftriebskraft.[12]

[12]Dies ist nur eine obere Grenze für $\Delta\rho$, da man den Anteil $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}/\mu$ der Induktionskraft vernachlässigt, also von *geraden* Feldlinien ausgeht. Es genügt aber anzunehmen, dass zumindest in einigen Fällen ein Teil der Flussröhre bis zur Sonnenoberfläche gelangt. Wegen der Eingefrorenheit des Feldes in das sehr dichte Plasma der Konvektionszone könnte dies notfalls auch durch die Konvektion allein bewerkstelligt werden.

Kapitel 3

MHD–Grundgleichungen

Die Theorie der Magnetohydrodynamik bemüht sich um eine selbstkonsistente Beschreibung des Verhaltens elektrisch leitfähiger Gase oder Flüssigkeiten und deren Wechselwirkungen mit elektromagnetischen Feldern, welche entweder externer Natur sein können oder aber durch die Dynamik des Fluides[1] selbst erzeugt werden. Grundlegend ist hierbei die Annahme, dass der Einzelteilchen-Charakter dieses Fluids außer Acht gelassen werden kann und somit eine makroskopische Beschreibung durch wenige kontinuierliche Variablen möglich und sinnvoll ist.
Das allgemeine Vorgehen bei der Herleitung des fundamentalen Gleichungssystems, welches die Dynamik von Fluid und Feldern bestimmt, ist bereits in zahlreichen Arbeiten dargestellt (etwa Mitchner & Kruger [7] oder Kegel [6]) und soll hier nur kurz zusammengefasst werden.

3.1 Hydrodynamik

Die MHD–Theorie bildet die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Hydrodynamik auf den Fall elektrisch leitfähiger Fluide (und reduziert sich im Fall der Abwesenheit elektromagnetischer Felder und Ladungen auch wieder auf diese). In ihr sind die wesentlichen[2] charakteristischen Größen des Fluids, nämlich

[1] In Ermangelung eines entsprechenden deutschen Begriffes steht das englische Wort "Fluid" sowohl für Gase als auch für Flüssigkeiten.

[2] Gegebenenfalls können z.B. auch thermodynamische Größen wie Temperatur $T(\mathbf{x})$ o.ä. hinzugenommen werden.

- die lokale Massendichte $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ und
- die lokale Massengeschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

am Ort $\mathbf{x}$ zur Zeit t miteinander verknüpft durch

1. die Kontinuitätsgleichung des Masseflusses

$$\partial_t \ \rho + \nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) = 0 \quad \text{und} \tag{3.1}$$

2. die Impulsbilanz

$$\rho \ \partial_t \ \mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{f}_i \ . \tag{3.2}$$

Auf der linken Seite der Impulsbilanz werden alle Kraftdichten $\mathbf{f}_i$ notiert, die den Impuls des Fluidelementes ändern können. Dies sind je nach Anwendung z.B.

- die Dichte der Druckkraft $-\nabla P$,
- die Gravitationsdichte $\rho \ \mathbf{g}$ oder
- der Viskositätsterm[3] $\rho \ \nu \nabla^2 \mathbf{v}$.

Gegebenenfalls kann das Gleichungssystem durch eine Energiegleichung und eine Zustandsgleichung $P = P(\rho, T)$ geschlossen werden.

3.2 Die vereinfachten Maxwell–Gleichungen

Von den vier Maxwell–Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \ \sigma \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \tag{3.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \ \mathbf{j} + c^{-2} \ \partial_t \mathbf{E} \tag{3.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \tag{3.6}$$

welche die Kopplung des elektrischen und magnetischen Feldes $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{B}$ untereinander sowie an die Stromdichte $\mathbf{j}$ und die Ladungsdichte σ beschreiben, kann Gleichung (3.3) zunächst fortgelassen werden, da σ in keiner der

[3] ν kennzeichnet den Koeffizienten der kinematischen Viskosität. Eine (grobe) Abschätzung der Relevanz dieses Terms findet sich in Abschnitt 4.1.6.

anderen Gleichungen auftaucht. Ferner ist es im Sinne einer vereinfachenden Spezialisierung auf die *magnetischen* Teil der Feld–Fluid–Wechselwirkung erforderlich, sich zu beschränken auf

- langsam veränderliche Systeme, deren typische Phasengeschwindigkeit[4] $\mathcal{V} \equiv \mathcal{L}/\mathcal{T}$ klein ist gegen c und
- gut leitende Fluide, in denen lokale Anhäufungen elektrischer Ladung so klein bleiben, dass stets $O(\mathbf{E}) \ll \mathcal{V}\, O(\mathbf{B})$ gilt.

Wie etwa in Kap. II von [5] gezeigt ist, kann in diesem Limes der Verschiebungsstrom $\partial_t \mathbf{E}/c^2$ in (3.5) vernachlässigt werden. Darüber hinaus vereinfachen sich die Transformationsgleichungen der Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ für den Übergang vom Ruhesystem K' des Fluidelementes in ein mit $\mathbf{v}$ bewegtes Bezugssystem K zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ bzw.} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}\,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

und die elektromagnetischen Felder werden somit (wie auch die hydrodynamischen Gleichungen aus 3.1) *Galilei*–invariant.

3.3 Kopplung von Feld und Materie

3.3.1 Die Induktionskraft

Die bisher gewonnenen Gleichungen sind innerhalb des in 3.2 vorgestellten Limes exakt. Um aber die von den Feldern auf jedes Teilchen der Ladung q ausgeübte elektromagnetische Lorentzkraft $\mathbf{F}_{\mathrm{L}} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ins Fluidbild zu übertragen, bedarf es einer Reihe von vereinfachenden Annahmen, wie etwa

- Beschränkung auf Magnetfelder, deren Elektronen–Gyrationsfrequenz

$$\Omega_{\mathrm{G}} := \frac{e\, m_{\mathrm{e}}}{B} \tag{3.8}$$

  klein ist gegen die Elektronen–Ionen–Stoßfrequenz ν_{ei}
- Beschränkung auf Zeitskalen $\mathcal{T} \gg 1/\nu_{\mathrm{ei}}$

[4] $\mathcal{L}$ und $\mathcal{T}$ kennzeichnen die dem betrachteten System eigenen charakteristischen Längen– und Zeitskalen.

- Vernachlässigung aller Terme $\sim \mathcal{O}\left(\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\right) \approx \mathcal{O}\left(\frac{1}{1800}\right) \ll 1$.

Nach einigen länglichen Umformungen (die etwa in Kapitel 4 von [6] oder Kapitel IV.8 von [7] nachgelesen werden können), kann die der Lorentzkraft entsprechende Kraftdichte

$$\mathbf{f}_\mathrm{L} := \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{3.9}$$

hergeleitet werden, die der rechten Seite der Impulsbilanz (3.2) zuzuschlagen ist.

3.3.2 Das Ohm'sche Gesetz

Im mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegten Ruhesystem des Fluidelementes lautet das Ohm'sche Gesetz

$$\eta\, \mathbf{j}' = \mathbf{E}' \ , \tag{3.10}$$

im Laborsystem also wegen (3.7):

$$\eta\, \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \ , \tag{3.11}$$

da die Resistivität η als Materialkonstante höchstens vom Ort, nicht aber vom Bezugssystem abhängen kann. Es sollte erwähnt werden, dass auch bei der Herleitung von (3.10) ausgiebig von den im letzten Absatz zitierten Näherungen Gebrauch gemacht wird.

3.4 Zusammenfassung der MHD–Gleichungen

Der zu verwendende magnetohydrodynamische Gleichungsatz kann damit wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
\rho\, \partial_t \mathbf{v} + \rho\, (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho\, \nu\, \nabla^2 \mathbf{v} + \rho\, \mathbf{g} && (3.12)\\
\partial_t\, \rho + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{v}) &= 0 && (3.13)\\
\eta\, \mathbf{j} &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} && (3.14)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t\, \mathbf{B} && (3.15)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu\, \mathbf{j} && (3.16)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\ . && (3.17)
\end{aligned}$$

3.5 Wichtige Theoreme der MHD

Es sollen nun kurz einige Theoreme vorgestellt werden, die für das konzeptionelle Verständnis der vorgelegten Arbeit wesentlich sind, und die es ferner gestatten, eine gewisse intuitive Vorstellung von der Wechselwirkung zwischen Feld und Materie zu erhalten, wie sie die Magnetohydrodynamik vermittelt.

3.5.1 "Eingefrorene" Feldlinien

Einer der nützlichsten Sätze über das Verhalten von Magnetfeldern in gut leitenden Medien ist das Theorem eingefrorener Feldlinien, welches wir hier aus Platzgründen nur ohne Beweis angeben.
Gegeben sei ein Fluid der Resistivität $\eta(\mathbf{x})$ mit Feldern $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$. Sei ferner G eine mit $\mathbf{v}$ mitbewegte[5] Fläche mit dem lokalen Normalenvektor $\mathbf{n}_G$ und

$$\Psi_G := \int_G \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_G \, dA \tag{3.18}$$

der Fluss von $\mathbf{B}$ durch G. Dann kann gezeigt werden, dass

$$\frac{d\Psi_G}{dt} \propto \int_{\partial G} \eta \, \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} \tag{3.19}$$

gilt, so dass Ψ_G im Falle $\eta \to 0$ konstant wird. Da an G keine weiteren Bedingungen gestellt wurden, bedeutet dies, dass die Feldlinien von der Materie mitgenommen werden, sie sind "eingefroren". Ob die Dynamik durch $\mathbf{v}$ oder durch $\mathbf{B}$ bestimmt wird, hängt von ihrer relativen Stärke ab; ein nützliches Kriterium ist der Vergleich der Energiedichten:

$$S := \frac{w_{\text{mag}}}{w_{\text{mech}}} \equiv \frac{B^2/2\mu}{\rho v^2/2} \begin{cases} \ll 1 & : \text{ Fluid nimmt Feld mit} \\ \gg 1 & : \text{ Feld hält Fluid fest} \end{cases} . \tag{3.20}$$

3.5.2 Isorotation

Wir betrachten ein von einem Magnetfeld durchdrungenes Plasma unendlicher Leitfähigkeit. Im stationären Zustand müssen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{B}$ der Beziehung

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \tag{3.21}$$

[5] Damit ist gemeint, dass die Fluidelemente, aus denen G besteht, für alle Zeit dieselben sind.

genügen, welche man durch Anwenden von $\nabla\times$ auf (3.11) erhält.[6]
Ferrano untersuchte 1937, welche Geschwindigkeitsfelder der Form

$$\mathbf{v} = \Big(0, r\ \Omega(r,z), 0\Big) \tag{3.22}$$

mit (3.21) verträglich sind und fand nach kurzer Rechnung[7]

$$\mathbf{B} \times \nabla\Omega = \mathbf{0} \tag{3.23}$$

als notwendige Bedingung. Ω muss also entlang einzelner Feldlinien konstant sein, d.h. jede Feldlinie rotiert starr, aber nicht alle Feldlinien tun dies mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit. Den Fall (3.23) bezeichnet man als *Isorotation*.

3.5.3 Magnetischer Druck

Die Impulsbilanz enthält im Allgemeinen den Gradienten ∇P des Gasdruckes und die Induktionskraft $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Wegen

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla\left(\frac{B^2}{2\mu}\right) \tag{3.24}$$

ist es naheliegend, durch

$$P_{\text{mag}} := \frac{B^2}{2\mu} \tag{3.25}$$

einen *magnetischen Druck* zu definieren, welcher bildhaft als gegenseitige *Abstoßung* der Feldlinien begriffen werden kann. Insbesondere kann er in gewissen Situationen in der Lage sein, einen entsprechend gerichteten Gasdruck zu balancieren.
Der zweite Term $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ dagegen entspricht einer *Zugwirkung entlang* der Feldlinien, die versucht, etwaige Krümmungen und Deformationen "glattzuziehen". In der Tat verschwindet dieser Term bei parallel orientierten Feldlinien.

[6] Man beachte $\eta \equiv 0$.

[7] Diese kann – wie auch der Beweis zu (3.19) — z.B. bei Kippenhahn [5] nachgelesen werden.

Kapitel 4

Die stationäre Lösung

4.1 Vereinfachungen

4.1.1 Zylindrische Flussröhre

Wie eingangs dargelegt stellt der "sichbare" (d.h. oberhalb der Konvektionszone befindliche) Teil der Flußröhre ein bogenförmiges Gebilde dar, welches sich zunächst bis weit über die Grenzen der Photosphäre erhebt, um sich dann wieder zur Sonnenoberfläche zurückzukrümmen. Sicherlich wäre es wünschenswert, schon von Anfang an mit der vollen Geometrie der in etwa halbtorusförmigen Struktur zu rechnen. Um aber einen Kompromiss zwischen einer möglichst hohen Realitätstreue des Modells und der damit zwangsläufig steigenden Komplexität der entstehenden Gleichungen zu erzielen, soll zunächst vereinfachend nur ein gerades Segment der Röhre betrachtet werden, welches die drei Bereiche Konvektionszone, Photosphäre und Chromosphäre senkrecht durchdringt.

4.1.2 Horizontale Temperaturschichtung

Eine weitere, nicht minder weitreichende Vereinfachung besteht in der Annahme, dass die Temperaturschichtung im Inneren der Röhre derjenigen in ihrem Außenraum entspreche, es also keinen Temperaturgradienten in radialer Richtung (d.h. senkrecht zur Symmetrieachse der Flussröhre) geben möge. Dies bedeutet einerseits — insbesondere zufolge der Implikation einer

ebenfalls horizontalen Schichtung bezüglich $\eta(\mathbf{x})$[1] — eine dramatische Vereinfachung des zu lösenden Gleichungssystems, andererseits aber auch einen nicht minder dramatischen Verlust an Selbstkonsistenz, da die Temperatur nun als äußere Randbedingung vorgegeben wird, anstatt sich als Lösung einer entsprechenden Energiegleichung zu ergeben. Die gennante Annahme ist also in diesem Sinne unter dem eher pragmatischen Gesichtspunkt der analytischen Einfachheit zu sehen; eine Diskussion dieser Problematik im Hinblick auf die beobachtbaren Verhältnisse realer photosphärischer Konfigurationen findet sich in Abschnitt 6.3.

4.1.3 Stationarität

Die folgenden Untersuchungen sollen sämtlich der Suche nach *stationären* Lösungen dienen, d.h. alle zeitlichen Differentiationen verschwinden: $\partial_t = 0$. In diesem Fall lautet (3.15) einfach $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, und es gibt eine Darstellung

$$\mathbf{E} =: -\nabla\Phi \tag{4.1}$$

von $\mathbf{E}$ als Gradient eines elektrischen Potentials $\Phi(\mathbf{x})$; insbesondere ist $\mathbf{E}$ damit poloidal auf Grund der in 4.1.1 sichergestellten Symmetrie.

4.1.4 Die Schwerebeschleunigung g

Die in (3.12) eingehende Graviationsbeschleunigung $g \equiv \|\mathbf{g}\|$ zeigt strenggenommen eine leichte Abnahme mit wachsender Entfernung vom Zentrum der Sonne; die relative Abweichung in einer Höhe $z = \Delta h$ errechnet sich zu

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{g(R_\odot) - g(R_\odot + \Delta h)}{g(R_\odot)} = 1 - \frac{GM_\odot}{(R_\odot + \Delta h)^2} \Big/ \frac{GM_\odot}{(R_\odot)^2} \tag{4.2}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{\Delta h}{R_\odot}\right)^{-2} = 2\,\frac{\Delta h}{R_\odot} - \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Delta h}{R_\odot}\right)^2\right] . \tag{4.3}$$

Für die schon beachtliche Höhe von $\Delta h = 8000$ km etwa findet man $(\Delta g)/g \approx 2$ %, so dass alle Berechnungen ohne Weiteres mit dem Standardwert

$$g = g(R_\odot) = \frac{GM_\odot}{(R_\odot)^2} \approx 274 \text{ m/s}^2$$

durchgeführt werden können.

[1] Der Zusammenhang $\eta \leftrightarrow T$ wird in Abschnitt 4.4 noch genauer ausgeführt werden.

4.1.5 Der Trägheitsterm

Um einen Eindruck von der Größe der zur Impulsbilanz (3.12) beitragenden Terme zu erhalten, vergleichen wir zunächst den Trägheits– mit dem Induktionsterm, wobei jede räumliche Differentiation durch Division durch die charakteristische Längenskala $\mathcal{L}$ ersetzt wird, etwa $\nabla\times \to 1/\mathcal{L}$, ...
Dies ergibt:

$$\frac{\mathcal{O}\Big[\text{Trägheitsterm}\Big]}{\mathcal{O}\Big[\text{Induktionsterm}\Big]} = \frac{\mathcal{O}\Big[\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\Big]}{\mathcal{O}\Big[\mathbf{j}\times\mathbf{B}\Big]} = \frac{\mathcal{O}\Big[\rho v^2/\mathcal{L}\Big]}{\mathcal{O}\Big[\mu^{-1}B^2/\mathcal{L}\Big]} = \mathcal{O}\left[\left(\frac{v}{v_\mathrm{A}}\right)^2\right]. \quad (4.4)$$

Hierbei bezeichnet

$$v_\mathrm{A} := \frac{B}{\sqrt{\mu\rho}} \quad (4.5)$$

die *Alfvén*-Geschwindigkeit. Wie Priest [1] darlegt, kann die darin auftretende magnetische Permeabilität μ für das solare Plasma in guter Näherung durch ihren Vakuum–Wert μ_0 aus der in 1.1 gegebenen Aufstellung ersetzt werden. Wählt man weiterhin

$$B \approx 0.1\ \mathrm{T} \quad (4.6)$$

$$\text{und}\quad \rho \approx 10^{-6}\ \mathrm{kg/m^3} \quad (4.7)$$

als typische Werte für Magnetfeld und Massendichte innerhalb der Flussröhre, so findet man dort $v_\mathrm{A} \approx 90$ km/s. Die in der Photosphäre beobachteten Strömungsgeschwindigkeiten liegen im Allgemeinen deutlich unterhalb von 10 km/s,[2] und so scheint es gerechtfertigt, im Folgenden den Trägheitsterm zu vernachlässigen. Dies geschieht natürlich vorbehaltlich eines *a posteriori*–Vergleiches mit den noch zu berechnenden Geschwindigkeiten; siehe hierzu auch Abschnitt 4.8.

4.1.6 Der Viskositätsterm

Analog zu den Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes den Trägheitsterm betreffend, kann ebenso gefragt werden, unter welchen Umständen die Viskosität des Plasmafluids in der Impulsbilanz zu berücksichtigen ist.

[2] Kippenhahn [5] etwa nennt $v = 5$ km/s als typische Geschwindigkeit in der Photosphäre.

Priest [1] zitiert hier eine Formel von Spitzer, der zufolge für den Koeffizienten der kinematischen Viskosität ν im Falle eines *vollständig* ionisierten Wasserstoff–Plasmas der Dichte ρ gilt:

$$\rho\ \nu = \left(2.2 \cdot 10^{-16} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\ s}}\right) \frac{1}{\ln \Lambda} \left(\frac{T}{\mathrm{K}}\right)^{5/2} \approx 5.4 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\ s}} \tag{4.8}$$

bei $T = 5000$ K. (Zu Bedeutung und Wert von $\ln \Lambda$ siehe Gleichung (4.42).) Nimmt man an, dass dieser Wert auch bei unvollständig ionisiertem Plasma in etwa die richtige Größenordnung liefert, so führt der zu 4.1.5 analoge Vergleich auf

$$\frac{\mathcal{O}\Big[\text{Viskositätsterm}\Big]}{\mathcal{O}\Big[\text{Induktionsterm}\Big]} = \frac{\mathcal{O}\Big[\rho\nu(\nabla^2\mathbf{v})\Big]}{\mathcal{O}\Big[\mathbf{j}\times\mathbf{B}\Big]} = \frac{\mathcal{O}\Big[(\rho\nu)v/\mathcal{L}^2\Big]}{\mathcal{O}\Big[\mu^{-1}B^2/\mathcal{L}\Big]} = \mathcal{O}\left(\frac{\mathcal{L}_\nu}{\mathcal{L}}\right) \tag{4.9}$$

mit

$$\mathcal{L}_\nu := \frac{\mu\ v\ (\rho\ \nu)}{B^2} \approx 10^{-8}\ \mathrm{m} \left(\frac{v}{5\ \mathrm{km/s}}\right) \left(\frac{B}{0.1\ \mathrm{T}}\right)^{-2}. \tag{4.10}$$

Selbst wenn für die Werte von $(\rho\ \nu)$, v und B noch Unsicherheiten bzw. Abweichungen um mehrere Zehnerpotenzen zugelassen werden, so ist doch gewiss stets $\mathcal{L} \gg \mathcal{L}_\nu$, und der Einfluß der Viskosität kann getrost vernachlässigt werden.[3]

Insgesamt lautet die vereinfachte Version des zu lösenden Gleichungssystems also:

$$\mathbf{0} = -\nabla P + \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \rho\ \mathbf{g} \tag{4.11}$$

$$\eta\ \mathbf{j} = -\nabla\Phi + \mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{4.12}$$

$$\mu\ \mathbf{j} = \nabla\times\mathbf{B} \tag{4.13}$$

$$0 = \nabla\cdot\mathbf{B} \tag{4.14}$$

$$0 = \nabla\cdot(\rho\ \mathbf{v}) \tag{4.15}$$

[3] Stix [3] bestätigt dieses Ergebnis qualitativ; wie er in Kapitel 6 ausführt, wird allerdings gelegentlich im Rahmen von Computersimulationen eine (unrealistisch) hohe Viskostität eingeführt, um gewisse numerische Artefakte zu vermeiden. Dieser Umstand ist hier ohne Bedeutung.

4.2 Das Koordinatensystem

Die axiale Symmetrie ($\partial_\phi = 0$) der in 4.1.1 beschriebenen Konfiguration legt die Verwendung eines Koordinatensystems aus Zylinderkoordinaten $[r, \phi, z]$ nahe, wobei die ($z = 0$)–Ebene durch die Grenzschicht Konvektionszone $\leftrightarrow$ Photosphäre gegeben sei und die vom Zentrum der Sonne weg gerichtete z–Achse mit der Längsachse der Flussröhre zusammenfalle; damit ist insbesondere $\mathbf{g} = -g\ \mathbf{e}_z$. Die Nullrichtung der azimutalen Koordinate ϕ ist aus Symmetriegründen willkürlich und irrelevant.
Die damit implizit eingeführte Approximation der kugelförmigen Sonnenoberfläche durch ihre lokale Tangentialebene beinhaltet offenbar eine Beschränkung auf Phänomene mit typischen Längenausdehnungen $\mathcal{L} \ll R_\odot$, was unproblematisch erscheint im Hinblick auf eine räumliche Ausdehnung der solaren Flussröhren von ca. $3 \cdot 10^4$ km in großen Sonnenflecken (siehe dazu auch [3]) bis hinunter zur für erdgebundene Beobachtungen relevanten Auflösungsgrenze[4] von

$$\Delta l := r_\mathrm{S}\ \Delta\varphi \approx (1.5 \cdot 10^8\ \mathrm{km})\ (0.5'') \approx 380\ \mathrm{km} \tag{4.16}$$

und vermutlich noch darunter.

4.3 Das Magnetfeld

4.3.1 Allgemeine Form

Die in Abschnitt 4.1.1 eingeführte Forderung einer zylinderförmigen Röhrengeometrie bedingt ein Magnetfeld der Form

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_\phi(r,z) \\ B_z(r,z) \end{pmatrix}\ , \tag{4.17}$$

wobei wegen

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{4.18}$$

[4]Die Aussage $\Delta\varphi \geq 0.5''$ (siehe Stix [3]) ist durch das Refraktionsverhalten der in der Erdatmosphäre stets vorhandenen Turbulenzzellen (*"seeing"*) gegeben. Neuerdings können durch Verwendung spezieller Beobachtungs– und Auswertungsverfahren, z.B. der *speckle–Interometrie*, sowie im Rahmen der drei weltraumgestützten Beobachtungsplattformen *SOHO*, *Yohkoh* und *TRACE* Strukturen bis etwa $\Delta l \approx 150$ km aufgelöst werden.

die z–Komponente keine z–Abhängigkeit tragen darf. Notiert man nun die einzelnen Terme der Impulsbilanz (4.11) als Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_r P(r,z) \\ 0 \\ \partial_z P(r,z) \end{pmatrix} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho(r,z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

und betrachtet zunächst deren ϕ–Komponente, so gilt offenbar

$$0 = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\phi = B_z \, \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \Rightarrow B_\phi(r,z) \to B_\phi(r) \ . \tag{4.20}$$

Damit aber ist das gesamte Magnetfeld *unabhängig von* z! Insbesondere folgt damit aus dem Induktionsgesetz

$$\mu j_r = (\nabla \times \mathbf{B})_r = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z} = 0 \tag{4.21}$$

für Stromdichte und Induktionskraft die Form

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ j_\phi(r) \\ j_z(r) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{B} =: \begin{pmatrix} f_{\mathrm{L}}(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{4.22}$$

Die r–Komponente von (4.19) lässt sich damit sofort integrieren zu

$$P(r,z) = P_1(r) + P_2(z), \tag{4.23}$$

wobei

$$P_1(r) = \int f_{\mathrm{L}}(r) \ dr \tag{4.24}$$

gilt und $P_2(z)$ eine Integrationsfunktion darstellt. Zusammen mit der z–Komponente von (4.19) bedeutet dies:

$$\partial_z P_2(z) = \partial_z P(r,z) = -g\rho(r,z) \Rightarrow \rho(r,z) \to \rho(z). \tag{4.25}$$

Nimmt man ferner eine allgemeine Zustandsgleichung der Form $P = P(\rho, T)$ an, so kann, da ρ und T nicht von r abhängen, auch der Druck P keine r–Anhängigkeit tragen. Damit aber ist

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{0}, \tag{4.26}$$

und **B** somit ein *kraftfreies* Feld.[5]
Aufgrund der inhärenten Nichtlinearität der Gleichung (4.26) gestaltet sich deren Lösung in voller Allgemeinheit recht schwierig; hier jedoch vereinfacht sie sich aufgrund der hohen Symmetrie des Problems zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$0 = f_{\mathrm{L}}(r) = \frac{[B_\phi(r)]^2}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\Big([B_z(r)]^2 + [B_\phi(r)]^2\Big) \ , \tag{4.28}$$

so dass bei Vorgabe der ϕ– oder z–Komponente die jeweils andere Komponente ermittelt werden kann. Insbesondere läßt sich leicht zeigen, dass *jedes* Feld der Form

$$\mathbf{B}(r) = \left(0, \sqrt{-\frac{r}{2}\frac{d\mathcal{E}(r)}{dr}}, \sqrt{\frac{1}{2r}\frac{d[r^2\mathcal{E}(r)]}{dr}}\right) \tag{4.29}$$

die Gleichung (4.28) erfüllt, wenn die der Energiedichte proportionale Funktion

$$\mathcal{E}(r) := [B_\phi(r)]^2 + [B_z(r)]^2 \tag{4.30}$$

den beiden Bedingungen

$$\frac{d\mathcal{E}}{dr} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{d(r^2\mathcal{E})}{dr} > 0 \tag{4.31}$$

genügt.[6]

4.3.2 Wahl des B_z–Profils

Um die radiale Struktur einer Flussröhre nachzubilden, sind an die Form von **B** am unteren Photosphärenrand (und damit überall) zunächst folgende Bedingungen zu stellen:

- Glatter (d.h. zweimal stetig differenzierbarer) Verlauf für alle r (damit insbesondere Freiheit von Singularitäten)

[5] Diese Erkenntnis liefert sofort

$$P(r,z) = P(0,0) - g\int_0^z \rho(\zeta)\ d\zeta \tag{4.27}$$

als explizite Form von $P(r,z)$ in (4.23) durch Integration der r–Komponente von (4.19).

[6] Für einen Beweis siehe [5], Seite 125.

- Annahme eines vorzugebenden "Kernwertes" B_0 auf der Achse $r = 0$
- Monotoner Abfall innerhalb einer charakteristischen Länge R
- Für $r \to \infty$ asymptotische Annäherung an $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Im Folgenden wird eine Auswahl von Lösungen zu Gleichung (4.28) gegeben, die die genannten Bedingungen erfüllen:

$$\mathbf{B}_1(x) := B_0 \left(0, \pm\frac{x}{1+x^2}, \frac{1}{1+x^2}\right) \tag{4.32}$$

$$\mathbf{B}_2(x) := B_0 \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{(1+x^2)^{3/4}}, \frac{\sqrt{1+x^2/2}}{(1+x^2)^{3/4}}\right) \tag{4.33}$$

$$\mathbf{B}_3(x) := B_0 \left(0, \pm\sqrt{\frac{\arctan(x^2)}{x^2} + \frac{x^4+2x^2-1}{(x^4+1)^2}}, \frac{1}{1+x^4}\right) \tag{4.34}$$

$$\mathbf{B}_4(x) := B_0 \left(0, \pm\frac{\sqrt{1-(1+x^2)\ \exp(-2x)}}{x}, \exp(-x^2)\right) \tag{4.35}$$

$$\mathbf{B}_5(x) := B_0 \left(0, \pm\sqrt{\frac{1-x+e^{2x}}{x\cosh^2 x} - \frac{2\ln\left[(1+e^{2x})/2\right]}{x^2}}, \frac{1}{\cosh x}\right) \tag{4.36}$$

Die dimensionslose Koordinate $x := r/R$ bezeichnet dabei die radiale Koordinate r in Einheiten des charakteristischen Radius R. Als gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung enthält (4.28) eine freie Konstante in ihrer allgemeinen Lösung; diese wurde jeweils so gewählt, dass keine Singularitäten auftreten. Man beachte, dass mit B_ϕ stets auch $-B_\phi$ Lösung zum gleichen B_z ist, da (4.28) B_ϕ nur quadratisch enthält.
Die beiden Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen die für die Felder $\mathbf{B}_1$ bis $\mathbf{B}_5$ die beiden nicht verschwindenden Komponenten B_z und B_ϕ. Die qualitativen Unterschiede sind hier offenbar gering mit Ausnahme der Fälle $\mathbf{B}_2$ und $\mathbf{B}_3$, die sich durch einen flachen (bzw. steilen) Abfall von B_z und durch einen niedrigen (bzw. hohen) Maximalwert von B_ϕ auszeichnen.

Zur Illustration dieses Zusammenhangs denke man sich $B_z(r)/B_0$ durch die sog. *Fermi-Funktion*

$$f_k(x) := \frac{1}{1-\exp\left[k(x-1)\right]} \tag{4.37}$$

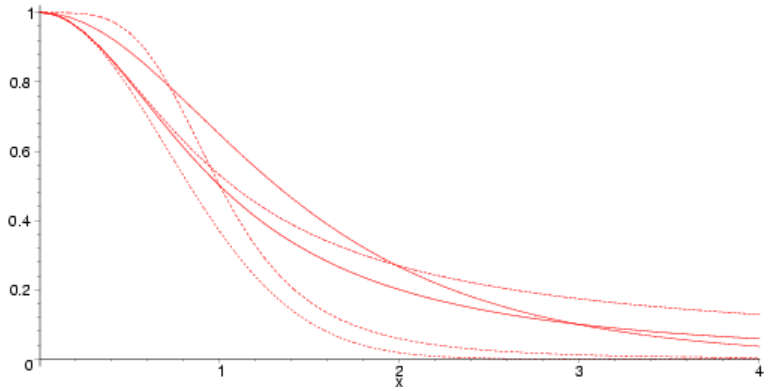

Abbildung 4.1: z–Komponenten der Felder $\mathbf{B}_1/B_0$ bis $\mathbf{B}_5/B_0$

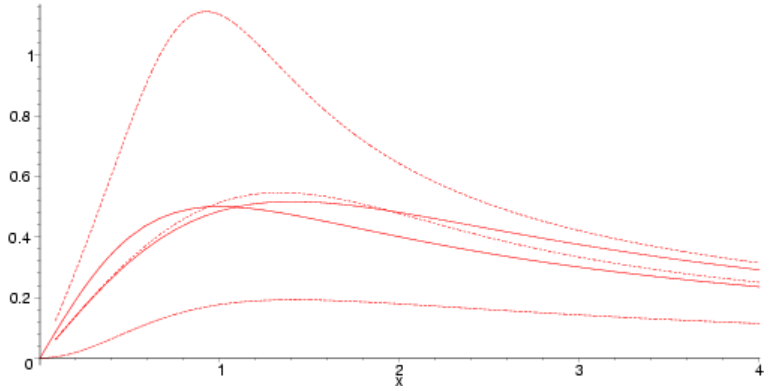

Abbildung 4.2: ϕ–Komponenten der Felder $\mathbf{B}_1/B_0$ bis $\mathbf{B}_5/B_0$

vorgegeben, deren Flankensteilheit bei $x \approx 1$ durch den Parameter k reguliert werden kann; siehe hierzu Abbildung 4.3. Die in Abbildung 4.4 gezeichneten zugehörigen B_ϕ/B_0–Komponenten zeigen in der Tat mit wachsendem k ein zunehmendes Aufsteilen im Bereich $x \approx 1$; Im Limes $k \to \infty$ entsteht das in $x = 1$ unstetige Feld

$$\Big(B_\phi(x), B_z(x)\Big) = B_0 \begin{cases} (0,1) & \text{für} \quad x < 1 \\ \left(\dfrac{1}{x}, 0\right) & \text{für} \quad x > 1 \end{cases} . \tag{4.38}$$

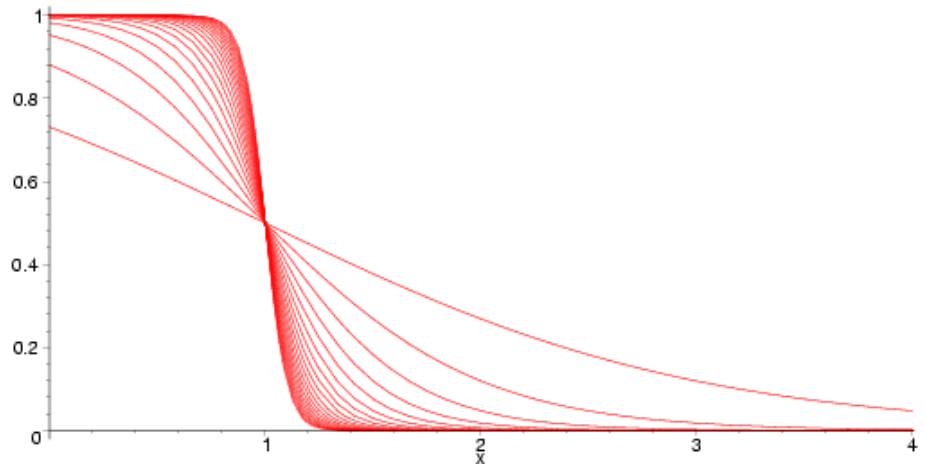

Abbildung 4.3: Profil $B_z(xR)/B_0 = f_k(x)$ für $k \in \{1, \ldots, 20\}$

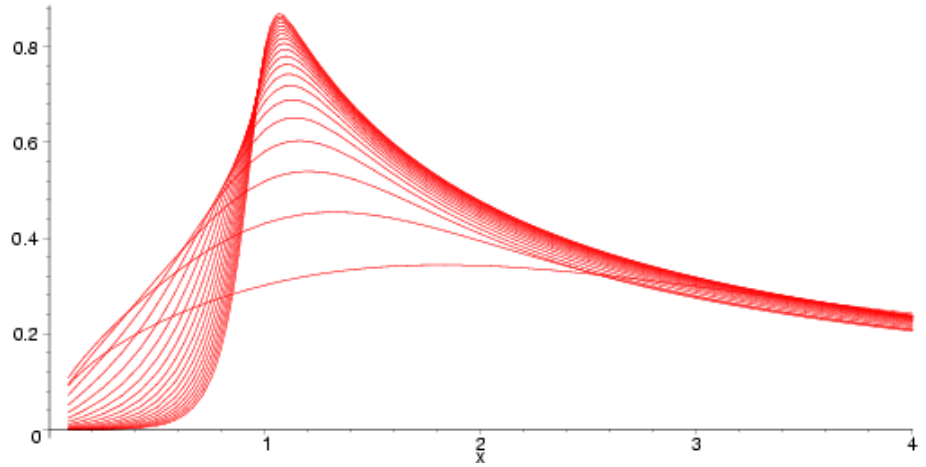

Abbildung 4.4: Zu $B_z(xR)/B_0 = f_k(x)$ gehörige ϕ–Komponenten

4.4 Das Resistivitätsprofil $\eta = \eta(z)$

In diesem Abschnitt soll — ausgehend von der Annahme einer vorgegebenen horizontalen Temperaturschichtung $T = T(z)$ — der Verlauf der zur Lösung von Gleichung (4.12) notwendigen Resistivität $\eta(z)$ ermittelt werden. Im Gegensatz zur in vielen Bereichen der Sonne realisierten Situation eines *vollionisierten* Plasmas ist im hier vorliegenden Fall gerade der Umstand eines räumlich *variablen* Ionisationsgrades von entscheidender Bedeutung.

4.4.1 Konstituenten der Plasma–Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit des Plasmas wird dominiert durch die Dynamik der freien Elektronen, da diese gegenüber den massiveren Ionen eine größere Beweglichkeit besitzen. Das dynamische Verhalten dieser Elektronen wird dabei nicht nur (wie im vollionisierten Fall) von Elektron–Ion–Kollisionen bestimmt, sondern zusätzlich durch Stöße mit den nun ebenfalls vorhandenen Neutralteilchen. Dementsprechend findet man (etwa bei Priest [1]) die Resisitivität η in der zuerst von Spitzer berechneten Form

$$\eta = \frac{m_\mathrm{e}}{e^2 n_\mathrm{e}} \left(\frac{1}{\tau_\mathrm{ei}} + \frac{1}{\tau_\mathrm{em}} \right) \tag{4.39}$$

$$\approx \frac{m_\mathrm{e}}{e^2} \left(3.7 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s} \right) \left[\frac{\ln \Lambda}{(T/\mathrm{K})^{3/2}} + \left(5.2 \cdot 10^{-11} \right) \left(\frac{n_\mathrm{n}}{n_\mathrm{e}} \right) \sqrt{\frac{T}{\mathrm{K}}} \right] \tag{4.40}$$

Hierbei bezeichnet n_e die Anzahldichte der Elektronen (oder Ionen[7]) und n_n diejenige der nicht ionisierten Teilchen. Die genannten Stoßwechselwirkungen gehen also formelmäßig durch ihre jeweiligen mittleren Stoßzeiten τ_ei (Elektron–Ion–Stöße) bzw. τ_en (Stöße der Elektronen mit Neutralteilchen) ein. Der Coulomb-Logarithmus $\ln \Lambda$ ist nur schwach von Dichte und Temperatur abhängig, so dass es hier genügt, ihn für eine mittlere Temperatur

[7] Bei gut leitfähigen Plasmen wie dem hier Betrachteten kann von *Quasi–Neutralität* ausgegangen werden, d.h. eventuell entstehende Anhäufungen elektrischer Ladung werden so schnell wieder ausgeglichen, dass für die Anzahldichten n_e und n_i von Eletronen und Ionen $n_\mathrm{e} \approx n_\mathrm{i}$ gilt, oder etwas präziser

$$\frac{|n_\mathrm{e} - n_\mathrm{i}|}{n_\mathrm{e} + n_\mathrm{i}} \ll 1 \tag{4.41}$$

bei Mittelung über die entsprechenden Längenskalen.

$\bar{T} = 5000$ K und eine mittlere Dichte $\bar{n}_\mathrm{e} = 10^{-19}$ m^{-3} auszuwerten; wir erhalten so

$$\ln \Lambda \equiv \ln \left(\frac{12\pi}{e^3} \sqrt{\frac{(\epsilon_0\ k_\mathrm{B}\ \bar{T})^3}{\bar{n}_\mathrm{e}}} \right) \approx 7.2\ . \tag{4.42}$$

4.4.2 Die Saha–Gleichung

Wie Gleichung (4.40) zeigt, ist neben dem expliziten Temperaturprofil ferner die Kenntnis des Ionisationsverhältnisses $n_\mathrm{e}/n_\mathrm{n}$ erforderlich. Das Gleichgewicht zwischen Ionisation und Rekombination wird beschrieben durch die Saha–Gleichung, welche in ihrer üblichen Form lautet:

$$\frac{n_\mathrm{e}}{n_\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{2}{n_\mathrm{n}}} \left(\frac{2\pi\ m_\mathrm{e}\ k_\mathrm{B}}{(h_\mathrm{P})^2} \right)^{3/4} T^{3/4} \exp\left(-\frac{\epsilon_\mathrm{I}}{2\ k_\mathrm{B}\ T} \right) \tag{4.43}$$

($\epsilon_\mathrm{I} = 13.6$ eV $= 2.2 \cdot 10^{-18}$ J ist die Ionisierungsenergie des Wasserstoffs.) Neben einer Reihe von Naturkonstanten gehen also auf der rechten Seite von (4.43) die absolute Anzahldichte n_n der neutralen Teilchen ein sowie — wie schon in (4.40) — wiederum die absolute Temperatur.

4.4.3 Anpassung an empirische Werte

In den beiden vorausgegangenen Abschnitten wurde dargelegt, dass die Ermittlung des gesuchten Resistivitätsprofils $\eta(z)$ die Kenntnis der Variation der folgenden beiden physikalischen Parameter mit der Höhe z erfordert:

1. Absolute Temperatur $T = T(z)$ und

2. Anzahldichte der Neutralgasteilchen $n_\mathrm{n} = n_\mathrm{H}(z)$.

Die Literatur kennt in diesem Zusammenhang eine Anzahl sogenannter *Modellatmosphären*, welche (i.A. unter der Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes) eine numerische Beschreibung des Ruhezustandes der solaren Atmosphäre liefern im Hinblick auf die vertikale Variabilität von Temperatur, Dichte, Turbulenzparameter, etc. Stix [3] nennt hier insbesondere die *Harvard Smithsonian Reference Atmosphere* aus dem Jahre 1971 sowie das etwas aktuellere *VAL-Modell* nach Vernazza et al. (1981), welches im Folgenden verwandt werden soll.

Die Abbildungen 4.5 und 4.6 zeigen einige der in [3] tabellierten Datenpunkte des VAL–Modells, jeweils um eine entsprechende interpolierende *spline*–Kurve ergänzt. Deutlich erkennbar ist das Minimum von $T_{\mathrm{min}} \approx 4170$ K in einer Höhe von etwa $z_{\mathrm{min}} \approx 500$ km, sowie das in guter Näherung als exponentiell zu bezeichnende Abklingen der Neutralgasdichte.

Aus den vorliegenden Datenpunkten $[z_i|T_i]$ und $[z_i|(n_{\mathrm{H}})_i]$ lässt sich nun je-

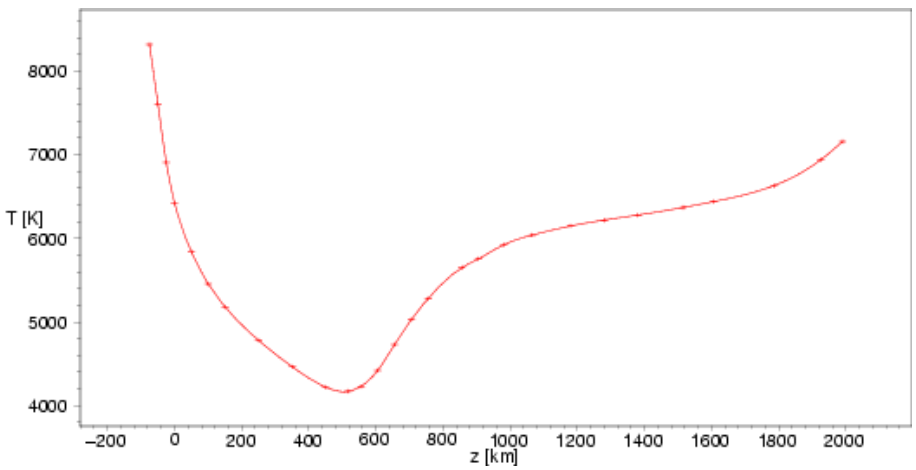

Abbildung 4.5: Verlauf der Temperatur T im VAL–Modell

weils punktweise durch Anwendung der Formeln (4.40) und (4.43) ein entsprechender Datensatz $[z_i|\eta_i]$ gewinnen; Abbildung 4.7 stellt das Ergebnis dar. Ebenfalls dort eingezeichnet ist die Funktion

$$\eta(z) := \eta_0 \exp\left[-\left(\frac{z - z_{\mathrm{m}}}{L_\eta}\right)^2\right] \tag{4.44}$$

mit

$$\eta_0 = 0.1\ \Omega\ \mathrm{m} \tag{4.45}$$
$$z_{\mathrm{m}} = 440\ \mathrm{km} \tag{4.46}$$
$$L_\eta = 140\ \mathrm{km}, \tag{4.47}$$

welche die Lage der generierten Datenpunkte offenbar mit hinreichender Präzision wiedergibt und von nun an in allen weiteren Rechnungen zu verwenden ist.

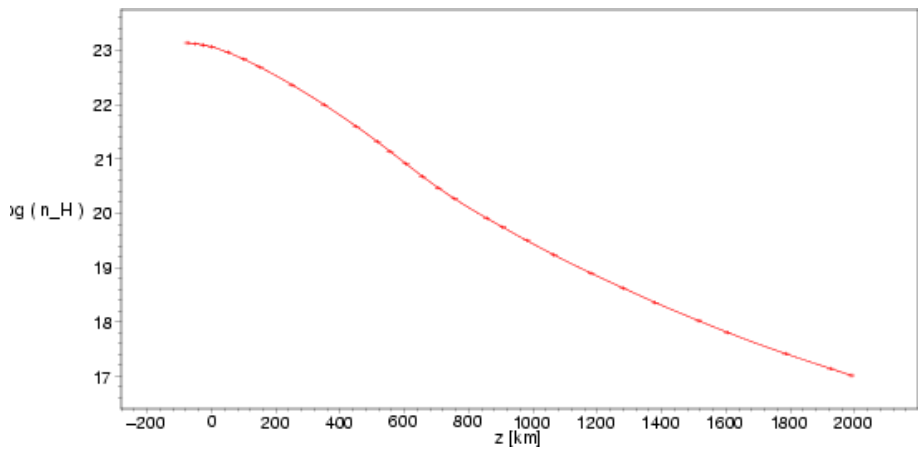

Abbildung 4.6: Verlauf der Neutralgasdichte n_{H} im VAL–Modell. Dargestellt ist $\dfrac{z}{\mathrm{km}} \mapsto \log_{10}\left(\dfrac{n_{\mathrm{H}}(z)}{\mathrm{m}^{-3}}\right)$.

4.5 Das Dichteprofil $\rho = \rho(z)$

Neben der in 4.4 bestimmten Funktion $\eta(z)$ verlangen die Gleichungen (4.11) und (4.15) nach einer Vorgabe des Profils der Massendichte $\rho(z)$. Eine realistische Ersatzfunktion ist hier deutlich leichter zu finden, da das VAL–Modell die Massendichte direkt in tabellierter Form zur Verfügung stellt.
Abbildung 4.8 zeigt eine Darstellung des entsprechenden Datensatzes in der Form

$$\left[\left(\frac{z_i}{\mathrm{km}}\right) \middle| \log_{10}\left(\frac{\rho_i}{\mathrm{kg/m^3}}\right)\right]$$

zusammen mit der Ersatzfunktion

$$\rho(z) := \rho_0 \ \exp\left(-\frac{z}{L_\rho}\right) \ ; \tag{4.48}$$

die optimalen Parameter sind

$$\rho_0 = 3 \cdot 10^{-4} \ \mathrm{kg/m^3} \tag{4.49}$$

$$\text{und } L_\rho = 120 \ \mathrm{km}. \tag{4.50}$$

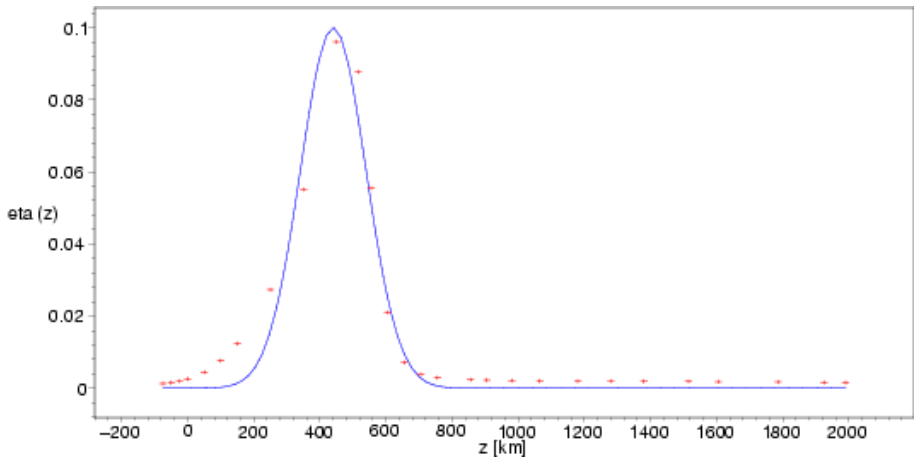

Abbildung 4.7: Datenpunkte $[z_i|\eta_i]$ und analytische Ersatzfunktion $z \mapsto \eta(z)$

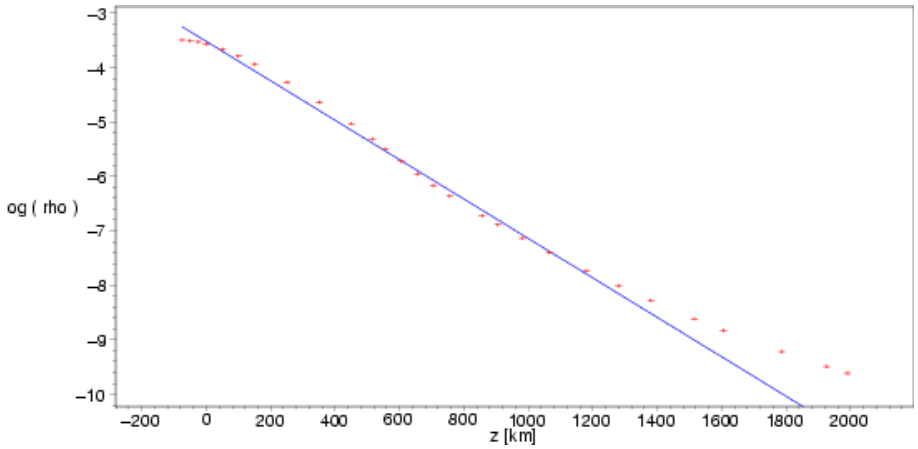

Abbildung 4.8: Datenpunkte $[z_i|\rho_i]$ des VAL–Modells und analytische Ersatzfunktion $z \mapsto \rho(z)$

4.6 Das Strömungsfeld

4.6.1 Einfache Ansätze für v

Getreu dem in der Einleitung gegebenen Prinzip "vom Einfachen zum Komplexen" soll zunächst geprüft werden, ob das in Abschnitt 4.3 abgeleitete Magnetfeld Geschwindigkeitsfelder zulässt, die gewissen vereinfachenden (und zunächst nicht physikalisch motivierten) Einschränkungen unterworfen sind, speziell: Felder, bei denen einzelne Komponenten identisch verschwinden. Hierfür kommen (wenn überhaupt) nur die r– oder die z–Komponente in Frage, da die Vorgabe eines Wirbels in der $(z = 0)$–Ebene dort eine nicht-verschwindende ϕ–Komponente voraussetzt.

4.6.1.1 Geschwindigkeitsfelder der Form $\mathbf{v} = v_\phi\ \mathbf{e}_\phi + v_z\ \mathbf{e_z}$

Liegt zunächst $\mathbf{v}$ (wie auch $\mathbf{B}$) auf koaxialen Zylindern um $r = 0$, so muss $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ *senkrecht* auf einer solchen Zylinderfläche stehen. Insbesondere folgt aus den ϕ–Komponenten von (4.12) und (4.13) jeweils:

$$\eta j_\phi = (-\nabla\Phi)_\phi + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\phi = 0 \tag{4.51}$$

$$\text{bzw.}\quad \mu j_\phi = (\nabla \times \mathbf{B})_\phi = -\frac{\partial B_z(r)}{\partial r}, \tag{4.52}$$

so dass B_z konstant und B_ϕ wegen (4.28) entweder proportional zu $1/r$ ist oder aber identisch verschwindet. Das hierdurch beschriebene Magnetfeld genügt aber offenbar den Forderungen aus 4.3.2 in mehrfacher Hinsicht nicht. Mithin bleibt festzuhalten, dass zylinderartige Plasmaströmungen nicht geeignet sind, zylinderförmige Flussröhren der hier betrachteten Form aufrecht zu erhalten.

4.6.1.2 Planares Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = v_r\ \mathbf{e}_r + v_\phi\ \mathbf{e}_\phi$

Betrachten wir nun den anderen Spezialfall $v_z \equiv 0$, in welchem die Bewegung einzelner Fluidelemente also auf die Ebenen $z =$ konst. beschränkt ist. Hier kann sofort festgestellt werden, dass sich aus (4.15)

$$0 = \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\ \rho(z)\ v_r(r,z)\Big) \tag{4.53}$$

eine r–Komponente der Form

$$v_r(r,z) = \frac{C(z)}{r} \tag{4.54}$$

ergibt[8]. Diese muss bei Forderung nach Singularitätenfreiheit offenbar identisch verschwinden, was $\mathbf{v}$ zu einem *toroidalen* Feld macht.

4.6.1.3 Toroidales Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = v_\phi\ \mathbf{e}_\phi$

In diesem Fall ist die Kontinuitätsgleichung (4.15) identisch erfüllt. Da toroidale Felder allerdings ein Spezialfall der in 4.6.1.1 diskutierten Situation sind (und in der dort verwandten Argumentation keine Aussagen über v_z eingehen), müssen mithin alle in den Abschnitten 4.6.1.1 bis 4.6.1.3 untersuchten Spezialfälle als Lösungsansätze verworfen werden.

4.6.2 Allgemeines Geschwindigkeitsfeld

Hierzu definieren wir zunächst

- das Vektorfeld des *Massestroms* $\mathbf{U}(\mathbf{x}) := \rho(z)\ \mathbf{v}(\mathbf{x})$ und
- die zum Feld $\mathbf{U}$ gehörige *Flussfunktion*

$$F_U(r,z) := -\int_0^r U_z(r',z)\ r'\ dr'\ . \tag{4.55}$$

Offenbar ist $-2\pi F_U(r,z)$ somit gleich dem Fluss von $\mathbf{U}$ durch eine in der Höhe z befindliche kreisförmige Scheibe mit Radius r.
Die Kontinuitätsgleichung (4.15) impliziert

$$0 = \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = \nabla\cdot\mathbf{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\ , \tag{4.56}$$

so dass sich $\mathbf{U}$ nun in der Form

$$(U_r, U_\phi, U_z) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_U}{\partial z}, U_\phi, -\frac{1}{r}\frac{\partial F_U}{\partial r}\right) \tag{4.57}$$

schreiben lässt und (4.15) identisch erfüllt ist.
Eine weitere wichtige Eigenschaft von F_U erschließt sich ferner durch die Tatsache, dass — wie man sofort nachrechnet — $\mathbf{U}\cdot\nabla F_U = 0$ gilt und F_U somit entlang einzelner Feldlinien konstant ist.

[8] Dies bleibt sogar richtig, wenn ein $v_z = v_z(r) \neq 0$ zugelassen wird.

Eine Auswertung der ϕ–Komponente des Ohm'schen Gesetzes (4.12) mit $\mathbf{v} = \mathbf{U}/\rho$ führt auf die partielle Differentalgleichung

$$\frac{\eta(z)}{\mu}\frac{\partial B_z(r)}{\partial r} = \frac{B_z(r)}{\rho(z)r}\frac{\partial F_U(r,z)}{\partial z} \tag{4.58}$$

für F_U mit der allgemeinen Lösung

$$F_U(r,z) = \frac{r}{\mu}\frac{B_z'(r)}{B_z(r)}\int_{z_0}^{z}\eta(\zeta)\ \rho(\zeta)\ d\zeta + f(r)\ , \tag{4.59}$$

wobei der Strich $'$ die Differentiation nach dem jeweiligen Argument bezeichnet. Im Sinne der oben beschriebenen Flussinterpretation von F_U beschreibt die Integrationsfunktion f einen eventuellen Masseein– oder –austritt durch eine Ebene[9] $z = z_0$, der dort als frei wählbare Randbedingung vorzugeben ist. Zum physikalischen Gehalt dieser Setzung siehe auch Abschnitt 4.7.
Schreibt man — wie schon oben — $r \equiv xR$ und weiter

$$b_z(x) := \frac{B_z(xR)}{B_0} \equiv \frac{B_z(r)}{B_0}\ , \tag{4.60}$$

so berechnet sich der zu F_U gehörige poloidale Anteil von $\mathbf{U}$ gemäß (4.57) zu

$$\begin{cases} U_r(x,z) &= \dfrac{1}{\mu}\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{b_z'(x)}{b_z(x)}\right)\eta(z)\ \rho(z) \\ U_z(x,z) &= \dfrac{1}{\mu}\dfrac{1}{R^2}\left[\left(\dfrac{b_z'(x)}{b_z(x)}\right)^2 - \dfrac{1}{x}\dfrac{b_z'(x)}{b_z(x)} - \dfrac{b_z''(x)}{b_z(x)}\right]\displaystyle\int_{z_0}^{z}\eta(\zeta)\ \rho(\zeta)\ d\zeta \\ & \quad +U_{z_0}(x)\ . \end{cases} \tag{4.61}$$

Der zusätzliche Term

$$U_{z_0}(x) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} =: \frac{1}{R^2}\frac{\tilde{f}'(x)}{x} \tag{4.62}$$

trägt dabei einer bei z_0 eventuell vorgegebenen Massestromkomponente der oben genannten Art Rechnung und wird der größeren Allgemeinheit wegen zunächst noch unbestimmt gelassen.

[9] Hierbei könnte es sich etwa um die Grenzschicht Konvektionszone $\leftrightarrow$ Photosphäre handeln.

4.6.3 Regularität entlang der Symmetrieachse

Untersuchen wir kurz die Implikationen der Formel (4.61) für die Menge der zur Konkurrenz zugelassenen B–Profile. Sei dazu b_z analytisch mit der Potenzreihendarstellung

$$b_z(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ . \tag{4.63}$$

Die Regularität von U_r im Ursprung verlangt dann wegen

$$\frac{b_z'(x)}{b_z(x)} = \frac{b_1}{b_0} + \mathcal{O}(x) \tag{4.64}$$

zunächst nur $b_0 \neq 0$; hingegen lauten die führenden Glieder der Laurent–Reihe des b_z–Terms in den eckigen Klammern in (4.61) bezüglich des Punktes $x = 0$:

$$\left[\left(\frac{b_z'(x)}{b_z(x)}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{b_z'(x)}{b_z(x)} - \frac{b_z''(x)}{b_z(x)}\right] = -\frac{b_1}{b_0}\frac{1}{x} - 2\frac{2b_2b_0 - b_1^2}{b_0^2} + \mathcal{O}(x) \tag{4.65}$$

und erfordern offenbar zusätzlich

$$b_1 = 0 \ . \tag{4.66}$$

Die vorzugebende Funktion $b_z(x)$ muss also in $x = 0$ eine waagerechte Tangente haben.[10] Diese Bedingung ist dem in 4.3.2 genannten Satz an Forderungen hinzuzufügen; die dort angegebenen Beispiele $\mathbf{B}_1$ bis $\mathbf{B}_5$ haben sämtlich diese Eigenschaft.

4.6.4 Diskussion des Einströmverhaltens

Ohne auf ein spezielles $\mathbf{B}$–Profil $b_z(x)$ Bezug zu nehmen, lassen sich bereits jetzt einige bemerkenswerte Eigenschaften dieses Feldes diskutieren:

- Die Bewegung des Plasmas in *radialer* Richtung (d.h. senkrecht zu den Feldlinien von $\mathbf{B}$) ist proportional zu $\eta(z)$ und daher — wie erwartet — nur im nichtidealen Bereich von Null verschieden.

[10] Diese Erkenntnis hätte man auch allein aus (4.64) zusammen mit der Bedingung $\lim_{x\to 0} U_r(x,z) \stackrel{!}{=} 0$ (Wohldefiniertheit von $\mathbf{U}\big|_{x=0}$) gewinnen können.

- Die zu U_r beitragenden physikalischen Größen sind sämtlich positiv bis auf den Ausdruck $b_z'(x)/b_z(x)$, der wegen der in 4.3.2 genannten Forderung des nach außen monotonen Absinkens der Feldstärke stets *negativ* ist. Gebiete mit $\eta(z) \neq 0$ sind also immer mit einem *Einströmen* von Materie ins Innere der Röhre verbunden.

- Die absolute Stärke B_0 des Magnetfeldes kommt in (4.61) nicht mehr vor, so dass — zumindest im Rahmen der in Abschnitt 4.1 ausgeführten Näherungen — beliebig starke oder beliebig schwache Felder den gleichen Massefluss bedingen[11]. Insbesondere ist $\mathbf{U}$ damit invariant gegen einen Richtungswechsel des Magnetfeldes $B_z \to -B_z$, was im Hinblick auf die im nächsten Punkt diskutierte Frage nach den entsprechenden Verhältnissen am anderen Ende der Flussröhre von Wichtigkeit sein wird.

- Wendet man die beiden letzten Feststellungen auf die Flussröhre als Ganzes an, so ergibt sich folgendes Bild: An den beiden Stellen, an denen die Flussröhre den nichtresistiven Bereich durchläuft, kommt es gleichermaßen zum Einstrom photosphärischen Plasmas, welches, einmal dort eingedrungen, den inneren Bereich an keiner Stelle mehr verlassen kann. Aus diesem Dilemma sind zwei Auswege denkbar:

  - Die Röhre wird durch den stetigen Nachstrom neuen Plasmas immer weiter aufgebläht. In diesem Fall gibt es offensichtlich keine Möglichkeit für einen (globalen[12]) stationären Zustand.
  - Die $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ – Kraft der magnetischen Feldlinien baut einen Gegendruck $P_{\mathbf{j}\times\mathbf{B}}$ auf, der das weitere Einströmen entweder komplett verhindert oder einen Abfluss nach unten in die Konvektionszone hinein erzwingt.

  Ob eine der beiden Möglichkeiten (und wenn ja, welche) tatsächlich realisiert ist, kann mit den Mitteln des vorliegenden Modells leider nicht entschieden werden, da das Konzept der axialsymmetrischen B–Feld–Konfiguration definitionsgemäß keine Feldkrümmungen der geforderten

[11] Dies ist hier nur für die poloidale Komponente gezeigt. Die entsprechende Betrachtung für U_ϕ findet sich in Abschnitt 4.6.6

[12] Dies widerspricht nicht notwendigerweise der Setzung $\partial_t = 0$, da das Verhalten im untersuchten Teil immer noch "hinreichend" stationär sein kann.

Art beschreiben kann.[13]
Neuere Beobachtungen ([12], [13]) deuten allerdings darauf hin, dass die Querschnittsfläche sog. "Koronaler Bögen" (*coronal loops*) entlang ihrer gesamten Länge nur um etwa 30 % variiert; dies darf als Indiz für eine (wie auch immer geartete) stabilisierende Wirkung der Feldlinienkrümmung im superphotosphärischen Bereich angesehen werden, so dass von beiden genannten Alternativen die letztere realistischer erscheint und es demnach in der Tat zu einem vertikalen Abfluss in die Konvektionszone hinein zu kommen scheint.[14]

- Unabhängig vom gewählten B_z–Profil ist U_r umgekehrt proportional zum charakteristischen Radius R der Flussröhre. Daraus folgt, dass die Menge an Materie, die pro Zeit die Mantelfläche $r = R$ eines von $z = 0$ bis $z = z_{\mathrm{D}} > 0$ reichenden Zylinders nach innen passiert, gegeben ist durch
$$\int_{\{r=R\}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{df} = \int_0^{z_{\mathrm{D}}} U_r(1, z)\ 2\pi R\ dz = \text{konst.} \tag{4.67}$$
und daher nicht mehr von R abhängt. Verschieden große Flussröhren (des gleichen Profils) transportieren also innerhalb der resistiven Zone stets die gleiche Menge Material in ihr Inneres. Dies ist konsistent mit $U_z \propto 1/R^2$, da etwa eine Verdopplung von R den Querschnitt der Röhre vervierfacht und das mit unveränderter Rate einströmende Material dementsprechend mit einem Viertel der ursprünglichen Geschwindigkeit nach oben oder unten abfließen muss.

Die in Abschnitt 4.1 gemachte Annahme $\|\mathbf{v}\| \ll v_{\mathrm{A}}$ bedeutet in diesem Sinne also zunächst eine Beschränkung auf hinreichend ausgedehnte Flussröhren, in denen entsprechend langsame Strömungsgeschwindigkeiten herrschen. Eine quantitative Diskussion dieses Sachverhaltes erfordert natürlich die Kenntnis der toroidalen Komponente U_ϕ und erfolgt daher erst in Abschnitt 4.8.

4.6.5 Qualitative Verallgemeinerung auf $B_r \neq 0$

Die vorangegangene Diskussion des Einströmverhaltens vermied zwar die Festlegung auf ein konkretes B–Profil, bezog sich allerdings bereits auf den

[13] In Abschnitt 6.3 wird noch über eine dritte Möglichkeit spekuliert, die allerdings nur im Rahmen eines Zwei–Komponenten–Modells beschreibbar wäre.

[14] Abschnitt 4.7.3 beinhaltet eine quantitative Abschätzung dieses Effektes.

Fall einer Flussröhre mit konstantem Radius, d.h. mit $B_r \equiv 0$. Es soll nun untersucht werden, welche der in 4.6.4 gemachten Feststellungen auch ohne diese Einschränkung bestehen bleiben. Hierzu gehen wir zurück zum Ohm'schen Gesetz in seiner allgemeinen vektoriellen Schreibweise

$$-\nabla\Phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta\, \mathbf{j} \equiv \frac{\eta}{\mu}\, \nabla \times \mathbf{B} \tag{4.68}$$

und verwenden die Aufspaltung der Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{B}$ in ihre poloidalen und toroidalen Anteile:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathrm{P} + \mathbf{v}_\mathrm{T} \tag{4.69}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\mathrm{P} + \mathbf{B}_\mathrm{T} \tag{4.70}$$

mit

$$\mathbf{X}_\mathrm{P} := X_r \mathbf{e}_r + X_z \mathbf{e}_z \tag{4.71}$$

$$\mathbf{X}_\mathrm{T} := X_\phi \mathbf{e}_\phi \tag{4.72}$$

für $\mathbf{X} \in \{\mathbf{v}, \mathbf{B}\}$. Einsetzen in (4.68) und Ausmultiplizieren führt nach Trennung von poloidaler und toroidaler Komponente auf das Gleichungspaar

$$-\nabla\Phi + (\mathbf{v}_\mathrm{T} \times \mathbf{B}_\mathrm{P}) + (\mathbf{v}_\mathrm{P} \times \mathbf{B}_\mathrm{T}) = \frac{\eta(\mathbf{x})}{\mu}\, \nabla \times \mathbf{B}_\mathrm{T} \tag{4.73}$$

$$(\mathbf{v}_\mathrm{P} \times \mathbf{B}_\mathrm{P}) = \frac{\eta(\mathbf{x})}{\mu}\, \nabla \times \mathbf{B}_\mathrm{P}\ . \tag{4.74}$$

Sei nun

$$\mathbf{e}_\parallel := \frac{1}{\|\mathbf{B}_\mathrm{P}\|}\, \mathbf{B}_\mathrm{P} \tag{4.75}$$

der Einheitsvektor in Richtung von $\mathbf{B}_\mathrm{P}$ und

$$\mathbf{e}_\perp := \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\parallel \tag{4.76}$$

derjenige senkrecht zu $\mathbf{B}_\mathrm{P}$, so dass $\{\mathbf{e}_\parallel, \mathbf{e}_\perp\}$ die poloidale Ebene aufspannen und $[\mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\parallel, \mathbf{e}_\perp]$ in dieser Reihenfolge ein orthogonales Rechtssystem bilden. Die weitere Aufspaltung von $\mathbf{v}_\mathrm{P}$ in

$$\mathbf{v}_\mathrm{P} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp \tag{4.77}$$

mit

$$\mathbf{v}_{\parallel} := (\mathbf{v}_{\mathrm{P}} \cdot \mathbf{e}_{\parallel})\ \mathbf{e}_{\parallel} \tag{4.78}$$

$$\mathbf{v}_{\perp} := \mathbf{v}_{\mathrm{P}} - \mathbf{v}_{\parallel}\ , \tag{4.79}$$

d.h. in eine Komponente parallel und senkrecht zu $\mathbf{B}_{\mathrm{P}}$, liefert nach Einsetzen in (4.74) die folgende aufschlussreiche Gleichung:

$$(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\mathrm{P}}) = \frac{\eta(\mathbf{x})}{\mu}\ \nabla \times \mathbf{B}_{\mathrm{P}}\ , \tag{4.80}$$

aus der sich insbesondere wegen

$$\mathbf{v}_{\perp} \perp \mathbf{B}_{\mathrm{P}} \Rightarrow \|\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\mathrm{P}}\| = \|\mathbf{v}_{\perp}\|\ \|\mathbf{B}_{\mathrm{P}}\| \tag{4.81}$$

die Beziehung

$$\|\mathbf{v}_{\perp}\| = \frac{\eta(\mathbf{x})}{\mu}\ \frac{\|\nabla \times \mathbf{B}_{\mathrm{P}}\|}{\|\mathbf{B}_{\mathrm{P}}\|} \tag{4.82}$$

folgern lässt.
Analog zu den im letzten Abschnitt genannten Eigenschaften des einlaufenden Strömungsfeldes bei $B_r \equiv 0$ lassen sich an den Gleichungen (4.80) und (4.82) nun folgende Eigenschaften für den allgemeineren Fall ablesen:

- Wie nicht anders erwartet sind Fluidbewegungen quer zum Magnetfeld nur an Orten $\mathbf{x}$ mit $\eta(\mathbf{x}) \neq 0$ möglich; andernfalls sind $\mathbf{v}_{\mathrm{P}}$ und $\mathbf{B}_{\mathrm{P}}$ parallel und $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{0}$.

- Betrag und Vorzeichen von $\mathbf{B}_{\mathrm{P}}$ haben keinen Einfluss auf Größe oder Richtung dieser Querströmung.

- Um zu einer Aussage über die Richtung von $\mathbf{v}_{\mathrm{T}}$, d.h. zur Diskrimination von radialem Ein– oder Ausfluss zu gelangen, betrachte man ein (kleines) Flächenstück A, welches am Ort $\mathbf{x}_0$ von den Vektoren $(\Delta x_{\parallel}\ \mathbf{e}_{\parallel})$ und $(\Delta x_{\perp}\ \mathbf{e}_{\perp})$ aufgespannt wird. Insbesondere hat A damit $\mathbf{e}_{\phi}$ als Normalenvektor, siehe Abbildung 4.9.

  Wir berechnen den Fluss $\Psi_A(\mathbf{x}_0)$ von (4.80) durch A und erhalten auf der rechten Seite:

$$\Psi_A(\mathbf{x}_0) := \int_A \left(\frac{\eta(\mathbf{x})}{\mu}\ \nabla \times \mathbf{B}_{\mathrm{P}} \right) \cdot \mathbf{e}_{\phi}\ dA \tag{4.83}$$

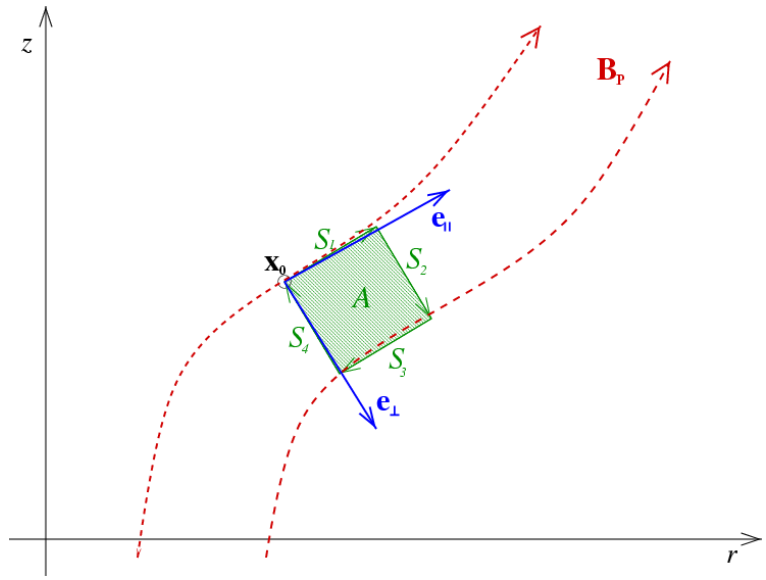

Abbildung 4.9: Zur Herleitung der Richtung von $\mathbf{v}_\mathrm{T}$. Der Vektor $\mathbf{e}_\phi$ weist bei $\mathbf{x}_0$ in die Zeichenebene hinein.

$$= \frac{\eta(\bar{\mathbf{x}})}{\mu} \int_A (\nabla \times \mathbf{B}_\mathrm{P}) \cdot \mathbf{e}_\phi \, dA \tag{4.84}$$

$$= \frac{\eta(\bar{\mathbf{x}})}{\mu} \int_{\partial A} \mathbf{B}_\mathrm{P} \cdot \mathbf{ds} \tag{4.85}$$

durch Anwendung

1. des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Auswerten von $\eta(\mathbf{x})$ an einer geeigneten Zwischenstelle $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \in A$) und
2. des Satzes von Stokes (Umwandlung des Flussintegrals durch A in ein Pfadintegral über den Rand ∂A von A).

Wie in Abbildung 4.9 angedeutet kann der Integrationsweg entlang ∂A in die vier Segmente

$$\begin{array}{rrcl} S_1 := & \mathbf{x_0} & \rightarrow & \mathbf{x}_0 + \Delta x_\parallel \, \mathbf{e}_\parallel \\ S_2 := & \mathbf{x}_0 + \Delta x_\parallel \, \mathbf{e}_\parallel & \rightarrow & \mathbf{x}_0 + \Delta x_\parallel \, \mathbf{e}_\parallel + \Delta x_\perp \, \mathbf{e}_\perp \\ S_3 := & \mathbf{x}_0 + \Delta x_\parallel \, \mathbf{e}_\parallel + \Delta x_\perp \, \mathbf{e}_\perp & \rightarrow & \mathbf{x}_0 + \Delta x_\perp \, \mathbf{e}_\perp \\ S_4 := & \mathbf{x}_0 + \Delta x_\perp \, \mathbf{e}_\perp & \rightarrow & \mathbf{x}_0 \end{array} \tag{4.86}$$

aufgeteilt werden, wobei S_2 und S_4 senkrecht zu den Feldlinien von $\mathbf{B}_\mathrm{P}$ orientiert sind und deshalb keinen Beitrag liefern.[15]
Wenn nun $\mathbf{B}_\mathrm{P}$ nach außen, d.h. in Richtung von $\mathbf{e}_\perp$, betragsmäßig abfällt[16], so gilt offenbar für die beiden verbleibenden Segmente

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_\mathrm{P} \cdot \mathbf{ds} > -\int_{S_3} \mathbf{B}_\mathrm{P} \cdot \mathbf{ds} \ , \tag{4.87}$$

und wir können schließen

$$\Psi_A(\mathbf{x}_0) \equiv \frac{\eta(\bar{\mathbf{x}})}{\mu} \left(\int_{S_1} \mathbf{B}_\mathrm{P} \cdot \mathbf{ds} + \int_{S_3} \mathbf{B}_\mathrm{P} \cdot \mathbf{ds} \right) > 0 \ . \tag{4.88}$$

Das entsprechende Flussintegral der linken Seite von (4.80) ergibt

$$\begin{aligned} \Psi_A(\mathbf{x}_0) &= \int_A (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_\mathrm{P}) \cdot \mathbf{e}_\phi \ dA & (4.89) \\ &= \int_A \|\mathbf{B}_\mathrm{P}(\mathbf{x})\| \ (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{e}_\parallel) \cdot \mathbf{e}_\phi \ dA & (4.90) \\ &= \|\mathbf{B}_\mathrm{P}(\bar{\mathbf{x}}')\| \int_A (\mathbf{e}_\parallel \times \mathbf{e}_\phi) \cdot \mathbf{v}_\perp \ dA & (4.91) \\ &= \|\mathbf{B}_\mathrm{P}(\bar{\mathbf{x}}')\| \int_A (-\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp) \ dA \ , & (4.92) \end{aligned}$$

wobei der Reihe nach wiederum der Mittelwertsatz der Integralrechnung, zyklische Vertauschung im Spatprodukt und die Orthogonalität (4.76) verwandt wurden. Zusammen mit dem Ergebnis (4.88) der rechten Seite gilt also:

$$\int_A (\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{e}_\perp) \ dA < 0 \ . \tag{4.93}$$

Da Ort $\mathbf{x}_0$ und Größe $(\Delta x_\parallel, \Delta x_\perp)$ des Integrationsgebietes A beliebig gewählt werden dürfen, überträgt sich die Ungleichung (4.93) vom Integral auf den Integranden:

$$\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{e}_\perp < 0 \ . \tag{4.94}$$

$\mathbf{v}_\perp$ und $\mathbf{e}_\perp$ können definitionsgemäß nur parallel oder antiparallel zueinander stehen, und nach (4.94) ist Letzteres der Fall. Dies bestätigt

[15] Diese Argumentation ist für endlich großes A nicht ganz korrekt, da sie eine eventuelle Krümmung der Feldlinien unberücksichtigt lässt. Der Fehler wird aber im Limes $A \to \{\mathbf{x}_0\}$ beliebig klein.

[16] Das ist bei den hier zu betrachtenden Flussröhren definitionsgemäß der Fall.

und verallgemeinert die in 4.6.4 festgestellte Tendenz der Flussröhre, Plasma in Richtung wachsender Magnetfeldstärke zu transportieren, in diesem Fall also in ihr Inneres hinein.

- Sei $\mathcal{L}_\mathrm{P}$ die charakteristische Länge, auf der sich $\mathbf{B}_\mathrm{P}$ um seine eigene Größenordnung ändert. Mit der schon aus 4.1.5 bekannten Ersetzung

$$\nabla\times \to 1/\mathcal{L}_\mathrm{P}$$

findet man sofort

$$\|\mathbf{v}_\perp\| \propto \frac{1}{\mathcal{L}_\mathrm{P}} \; ; \tag{4.95}$$

als (qualitatives) Analogon zum in 4.6.4 gefundenen Ergebnis

$$B_r \equiv 0 \Rightarrow \|\mathbf{v}_\perp\| \propto \frac{\|\nabla\times\mathbf{B}_\mathrm{P}\|}{\|\mathbf{B}_\mathrm{P}\|} = \frac{\partial_r B_z(r)}{B_z(r)} = \frac{1}{R}\frac{\partial_x b_z(x)}{b_z(x)} \propto \frac{1}{R} \; . \tag{4.96}$$

Demnach kann festgehalten werden, dass die in 4.6.4 erkannten Eigenschaften der radialen Fluidströmung

1. Unabhängigkeit von Betrag und Richtung von $\mathbf{B}_\mathrm{P}$
2. Skalierung der Form $\|\mathbf{v}_\perp\| \propto 1/\mathcal{L}_\mathrm{P}$
3. Strömungsrichtung *immer* senkrecht auf die Symmetrieachse zu

qualitativ Gültigkeit besitzen für jede stationäre, radialsymmetrische Magnetfeldkonfiguration mit nach außen abfallender Feldstärke. Insbesondere sind sie unabhängig von

- der Natur der in der (nicht verwendeten) Impulsbilanz (4.11) auftretenden Kraftdichten,
- der Annahme horizontaler Schichtung von Temperatur oder Dichte,
- dem konkreten (B_ϕ, B_z)–Profil und
- der Frage, ob das Magnetfeld kraftfrei ist oder nicht.

4.6.6 Toroidaler Massefluss

Kehren wir nun wieder zum Fall $B_r \equiv 0$ zurück. Als letzte noch zu bestimmende Größe bleibt die toroidale Komponente U_ϕ des Masseflusses $\mathbf{U}$. Hierzu eliminiert man zweckmäßigerweise den (zunächst noch unbekannten) elektrischen Potentialterm $\nabla\Phi$ aus (4.12) durch Bildung der Rotation. Der (etwas längliche) Ausdruck für die ϕ–Komponente der entstandenen Vektorgleichung gestattet folgende exakte Lösung für U_ϕ:

$$U_\phi(x,z) = \rho(z)\ V_{\mathrm{I}}(x) + U_\parallel(x,z) + U_{\mathrm{R}}(x,z) \tag{4.97}$$

mit den Definitionen[17]

$$\begin{aligned} U_\parallel(x,z) &= \frac{1}{\mu}\frac{1}{R^2}\frac{b_\phi(x)}{b_z(x)}\left[\left(\frac{b_z'(x)}{b_z(x)}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{b_z'(x)}{b_z(x)} - \frac{b_z''(x)}{b_z(x)}\right]\int_{z_0}^{z}\rho(\zeta)\ \eta(\zeta)\ d\zeta \\ &+ \frac{b_\phi(x)}{b_z(x)}\ U_{z_0}(x) \\ U_{\mathrm{R}}(x,z) &= \frac{1}{\mu}\frac{1}{R^2}\left(\frac{b_\phi(x)}{b_z(x)}\left[\frac{b_z''(x)}{b_z(x)} - \left(\frac{b_z'(x)}{b_z(x)}\right)^2 + \frac{1}{x^2}\right]\right. \\ &+ \left.\frac{b_\phi'(x)}{b_z(x)}\left[\frac{b_z'(x)}{b_z(x)} - \frac{b_\phi''(x)}{b_\phi'(x)} - \frac{1}{x}\right]\right)\rho(z)\ \int_{z_0}^{z}\eta(\zeta)\ d\zeta\ . \end{aligned} \tag{4.98}$$

Analog zu (4.60) wurde

$$B_0\ b_\phi(x) := B_\phi(xR) \tag{4.99}$$

gesetzt. Bemerkenswerterweise tritt auch hier die absolute Feldstärke B_0 nicht mehr auf.
Die Integrationsfunktion $V_{\mathrm{I}}(x)$ kann genutzt werden, um in beliebiger Höhe eine gewünschte Wirbelform $W(x)$ zu fordern; bei $z = z_0$ etwa gilt:

$$\begin{aligned} W(x)\Big|_{z=z_0} &\equiv \frac{U_\phi(x,z_0)}{\rho(z_0)} \\ &= V_{\mathrm{I}}(x) + \frac{1}{\rho(z_0)}\Big(U_\parallel(x,z_0) + \underbrace{U_{\mathrm{R}}(x,z_0)}_{=0}\Big) \\ &= V_{\mathrm{I}}(x) + \frac{1}{\rho(z_0)}\frac{b_\phi(x)}{b_z(x)}\ U_{z_0}(x)\ . \end{aligned} \tag{4.100}$$

[17] $U_\parallel$ ist nicht mit $\rho\ \|\mathbf{v}_\parallel\|$ aus 4.6.5 zu verwechseln!

Durch Vergleich von (4.98) mit (4.61) ergibt sich

$$\frac{U_\parallel}{U_z} = \frac{b_\phi}{b_z} \equiv \frac{B_\phi}{B_z} \ . \tag{4.101}$$

Wäre also $U_\parallel$ der einzige in (4.97) beitragende Term, so läge eine Strömung parallel zu $\mathbf{B}$ vor; dies begründet die gewählte Notation und entspricht der Erwartung an die Fluidbewegung im nichtresistiven Fall. Insbesondere ist der $U_\parallel$–Term damit irrelevant für die Frage des im resistiven Bereiches auftretenden Schlupfes zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{B}$.
Wie an (4.98) ferner erkennbar ist, scheint U_ϕ umgekehrt proportional zur Steigung b_z/b_ϕ der Magnetfeldlinien zu sein, d.h. der Übergang

$$\begin{pmatrix} b_\phi \\ b_z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha\ b_\phi \\ b_z \end{pmatrix}$$

bewirkt

$$U_\phi \to \alpha\ U_\phi \ .$$

Hohe Winkelgeschwindigkeiten scheinen also zunächst mit sehr flach gewendelten Magnetfeldlinien einherzugehen. Allerdings ist zu beachten, dass α nicht frei gewählt werden kann: Ist (b_ϕ, b_z) ein kraftfreies Feld im Sinne von Gleichung (4.28), so ist $(\alpha\ b_\phi, \alpha\ b_z)$ ebenfalls kraftfrei, $(\alpha\ b_\phi, b_z)$ mit $|\alpha| \neq 1$ im Allgemeinen aber *nicht*. Daher wird etwa eine quasistatisch durchgeführte Steigerung von U_ϕ das Feld nicht einfach "flacher" machen, sondern es in komplizierterer Weise dergestalt verformen, dass (4.28) zu jedem Zeitpunkt erfüllt ist.[18]

4.7 Der Schlupf zwischen Feld und Fluid

Nachdem die analytische Form des Masseflusses nun zur Gänze bekannt ist, sind zwei verschiedene Ansätze denkbar, um die Wechselwirkung zwischen Feld und Fluid zu studieren:

[18] Die Erhaltung des magnetischen Flusses $\int_0^R B_z(r,z)\ 2\pi r\ dr$ ist bei derartigen quasistatischen Änderungen nicht gefährdet, da eine sich einstellende Änderung $b_z(x) \to \gamma\ b_z(x)$ stets formal durch eine Umskalierung $B_0 \to B_0/\gamma$ aufgefangen werden kann.

- Zunächst könnte man daran denken, an einem der beiden Fußflächen[19] ein planares Geschwindigkeitsprofil $V_0(x) \equiv W(x)|_{z=0}$ willkürlich vorzugeben und daraus die Verdrillung entlang der Flussröhre sowie den entsprechenden Wirbel an der anderen Seite der Röhre zu berechnen. Dies würde allerdings eine physikalisch nicht begründbare Auszeichnung des einen Röhrenendes beinhalten.

- Naheliegender scheint es dagegen, beiden Stirnflächen der Röhre die *gleichen* Wirbel zuzuordnen, die sich bezogen auf die untere Photosphärengrenze gleichsinnig[20] drehen mögen. Entlang der Röhre ändert sich $U_\phi(x, z)$ dann von $U_\phi(x, 0)$ auf $-U_\phi(x, 0)$ und muss daher am Scheitelpunkt der Flussröhre aus Symmetriegründen verschwinden; entsprechendes gilt für $U_z(x, z)$. Dieser Ansatz soll im Folgenden verfolgt werden.
  Grundsätzlich könnte auch an die Verwendung zweier verschiedener Wirbel $V_{01}(x)$ und $V_{02}(x)$ gedacht werden. Dies erscheint allerdings unnötig kompliziert, da es auch dann eine statische Schicht geben wird, die allerdings nicht mehr notwendig am Scheitelpunkt zu sitzen hat; diese Situation ließe sich demnach auf den zuerst geschilderten Fall eines einzelnen Wirbels zurückführen.

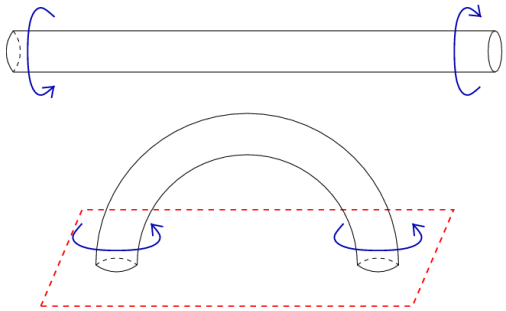

Abbildung 4.10: Zum Drehsinn der beiden Wirbel. Unten die eigentliche Röhrenform (Rotation gleichsinnig bezogen auf die (r, ϕ)–Ebene), darüber die gerade, topologisch äquivalente Form mit gegensinniger Rotation bezüglich der z–Achse.

[19] Gemeint sind die Stirnflächen, also die geometrische Schnittmenge der $(z = 0)$–Ebene mit den beiden zylinderförmigen Röhrenenden.

[20] Eine *gegensinnige* Rotation an den Fußpunkten entspräche einer gleichsinnigen, unter Umständen sogar verschwindenden Torsion entlang der Flussröhre.

4.7.1 Randbedingungen

Die bisher hergeleiteten Ausdrücke für die Komponenten von $\mathbf{v}$ lassen erkennen, dass die Vorgabe von Randbedingungen für Strömungs– und Magnetfeld in folgender Weise eingeschränkt ist:

- Wird zum einen eine der beiden nichtverschwindenden Kompenten von $\mathbf{B}$ vorgegeben, so ist die jeweils andere festgelegt durch die Bedingung (4.28) der Kraftfreiheit. Ferner kann in diesem Fall an den Gleichungen (4.61), (4.97) und (4.98) sofort das zugehörige Geschwindigkeitsfeld abgelesen werden, welches somit eindeutig bestimmt ist; insbesondere gilt dies für die Gestalt des Wirbels am Röhrenfußpunkt.

- Ist hingegen die explizite Vorgabe eines beliebigen Wirbels
$$W(x) := v_\phi(x,0) \equiv \frac{U_\phi(x,0)}{\rho_0} \tag{4.102}$$
gewünscht, so stellt der oben gefundene Ausdruck für U_ϕ zusammen mit (4.28) ein System nichtlinearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen für das B–Feld dar, dessen allgemeine Lösung, sofern sie existiert, ggf. noch durch Vorgabe von "Randbedingungen" der Form
$$\begin{aligned} b_z(x_c) &= C_1, \\ b_z'(x_c) &= C_2, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.103}$$
o.ä. zu konkretisieren ist.[21]

Im Folgenden werden zunächst — der erstgenannten Strategie folgend — anhand eines vorgegebenen Magnetfeldes die wesentlichen Eigenschaften des zugehörigen $\mathbf{v}$–Feldes quantitativ erfasst und diskutiert. Der zweite Ansatz soll im darauf folgenden Abschnitt 4.7.5 betrachtet werden.

4.7.2 Spezialisierung auf ein (b_ϕ, b_z)–Profil

Als typischen Vertreter der Klasse möglicher (b_ϕ, b_z)–Profile erscheint hier das aus 4.3.2 bekannte Feld
$$\mathbf{B}_1(x) = B_0 \left(0, \pm\frac{x}{1+x^2}, \frac{1}{1+x^2}\right) \tag{4.104}$$

[21] Diese werden sich im Allgemeinen aus den Forderungen an die generelle Gestalt der Flussröhre ableiten lassen; siehe dazu Abschnitt 4.7.5.2.

besonders geeignet, da es neben seiner kompakten analytischen Darstellung die interessante Eigenschaft der *konstanten Inklination* aufweist, d.h. die vertikale Distanz Δh_{B}, innerhalb derer eine Feldlinie die Achse einmal umrundet, ist wegen

$$\frac{\Delta h_{\mathrm{B}}}{2\pi x} = \frac{b_z}{b_\phi} = \pm\frac{1}{x} \tag{4.105}$$

gleich für alle Feldlinien, und die gesamte Konfiguration verdrillt sich wie ein starrer Körper. Abbildung 4.11 zeigt eine dreidimensionale Darstellung einiger ausgewählter Feldlinien von $\mathbf{B}_1$. Es darf erwartet werden, dass die

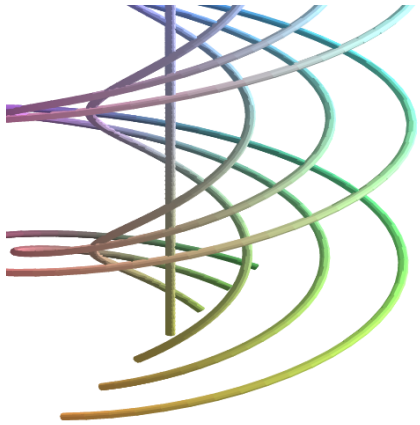

Abbildung 4.11: Feldlinienstruktur von $\mathbf{B}_1$

für den Spezialfall $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ erhaltenen Ergebnisse sich innerhalb gewisser Grenzen auch auf andere Profile verallgemeinern lassen, da die qualitativen Unterschiede innerhalb dieser Klasse eher gering zu sein scheinen. (Vergleiche dazu auch die Abbildungen 4.1 und 4.2 sowie insbesondere die numerische Analyse in 4.15.)

Neben der Wahl eines analytisch möglichst einfachen Feldes könnte auch daran gedacht werden, stattdessen den Anschluss an die Beobachtung zu suchen und auf tatsächlich gemessene B–Profile zurückzugreifen. Stix [3] etwa zitiert (auf Seite 288) eine Arbeit von Becker & Schröter, der zufolge sich die Magnetfeldstärke $B_{\mathrm{S}}(r) \equiv \|\mathbf{B}_{\mathrm{S}}(r)\|$ in einem kreissymmetrischen

Sonnenfleck des H–Typs vom Radius R_S wie

$$\frac{B_\mathrm{S}(r)}{B_\mathrm{S}(0)} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{r}{R_\mathrm{S}}\right)^2} \tag{4.106}$$

mit dem Radius r vom Zentrum des Sonnenflecks ändert. Die zugehörige Energiefunktion $\mathcal{E}_\mathrm{S}(r) := B_\mathrm{S}(r)^2$ genügt allerdings wegen

$$\frac{d}{dr}\Big(r^2\ \mathcal{E}_\mathrm{S}(r)\Big) = 2\ r\ \frac{\left(\dfrac{r}{R_\mathrm{S}}\right)^2 - 1}{\left[\left(\dfrac{r}{R_\mathrm{S}}\right)^2 + 1\right]^3} \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad r < R_\mathrm{S} \\ = 0 & \text{für} \quad r = R_\mathrm{S} \\ > 0 & \text{für} \quad r > R_\mathrm{S} \end{cases} \tag{4.107}$$

der Forderung (4.31) an eine kraftfreie Konfiguration nicht und kann deshalb keine brauchbare Alternative zu $\mathbf{B}_1$ liefern.
Der ebenfalls in [3] genannte Beobachtungsbefund, dem zufolge der Winkel α_S, den die Feldlinien mit der Vertikalen einschließen, näherungsweise durch den Ausdruck

$$\alpha_S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R_\mathrm{S}}\right) \tag{4.108}$$

beschrieben werden kann, befindet sich (zumindest für $x \leq 1$) dagegen in vergleichsweise guter qualitativer Übereinstimmung mit $\mathbf{B}_1$, wo

$$\alpha_1 := \arctan\left(\frac{B_{1,\phi}}{B_{1,z}}\right) = \arctan\left(\frac{r}{R}\right) \tag{4.109}$$

gilt.
Die beiden Terme aus (4.98) vereinfachen sich für den Spezialfall $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ beträchtlich zu

$$\begin{aligned} U_\parallel(x,z) &= \frac{4}{\mu R^2}(\mathrm{sgn}\ b_\phi)\ \frac{x}{(1+x^2)^2}\ \int_{z_0}^{z} \rho(\zeta)\ \eta(\zeta)\ d\zeta + x\ U_{z_0}(x) \\ U_\mathrm{R}(x,z) &= \frac{4}{\mu R^2}(\mathrm{sgn}\ b_\phi)\ \frac{x}{1+x^2}\ \rho(z)\ \int_{z_0}^{z} \eta(\zeta)\ d\zeta\ ; \end{aligned} \tag{4.110}$$

der poloidale Anteil aus (4.61) wird zu

$$\begin{cases} U_r(x,z) &= -\dfrac{2}{\mu R}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)\eta(z)\ \rho(z) \\ U_z(x,z) &= +\dfrac{4}{\mu R^2}\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\ \displaystyle\int_{z_0}^{z} \eta(\zeta)\ \rho(\zeta)\ d\zeta + U_{z_0}(x) \end{cases} . \tag{4.111}$$

Die Abbildungen 4.12 und 4.13 zeigen die Konturlinien von v_ϕ und den poloidalen Anteil von $\mathbf{v}$ in der (x, z)–Ebene für den Fall $V_\mathrm{I}(x) \equiv 0 \equiv U_{z_0}(x)$ und $z_0 \to \infty$; der Grund für diese spezielle Setzung wird im nächsten Abschnitt offensichtlich werden.
v_ϕ erreicht einen maximalen Wert von

$$v_{\phi,\max} \approx 50 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \left(\frac{R}{100 \ \mathrm{km}} \right)^{-2} \tag{4.112}$$

in der Umgebung des Punktes $(x_\max | z_\max) \approx (0.9 \mid 260 \ \mathrm{km})$, im Bild durch den schwarzen Kreis gekennzeichnet.

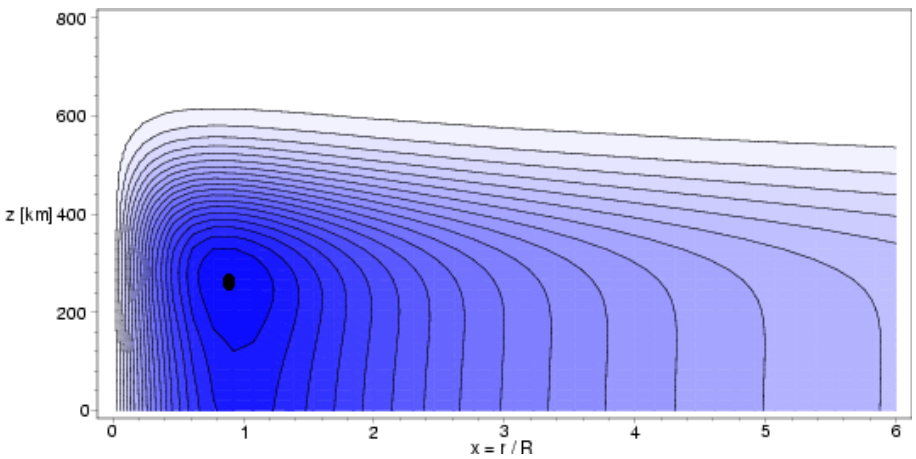

Abbildung 4.12: Konturplot von $v_\phi(x, z)$

4.7.3 Vertikale Abströmung

Der Vollständigkeit halber geben wir noch den Betrag des in Abbildung 4.13 erkennbaren vertikalen Massestroms in die Konvektionszone hinein an.
Innerhalb des Kreisringes $[r, r + dr]$ fließt der Massestrom

$$d\dot{M} := \left| U_z \left(\frac{r}{R}, 0 \right) \right| \ 2\pi r \ dr = \frac{8\pi}{\mu} \frac{x \ dx}{(1 + x^2)^2} \int_0^\infty \eta(\zeta) \ \rho(\zeta) \ d\zeta \tag{4.113}$$

in Richtung der negativen z–Achse, insgesamt also:

$$\dot{M} \ = \ \frac{8\pi}{\mu} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x \ dx}{(1 + x^2)^2}}_{=1/2} \int_0^\infty \eta(\zeta) \ \rho(\zeta) \ d\zeta \tag{4.114}$$

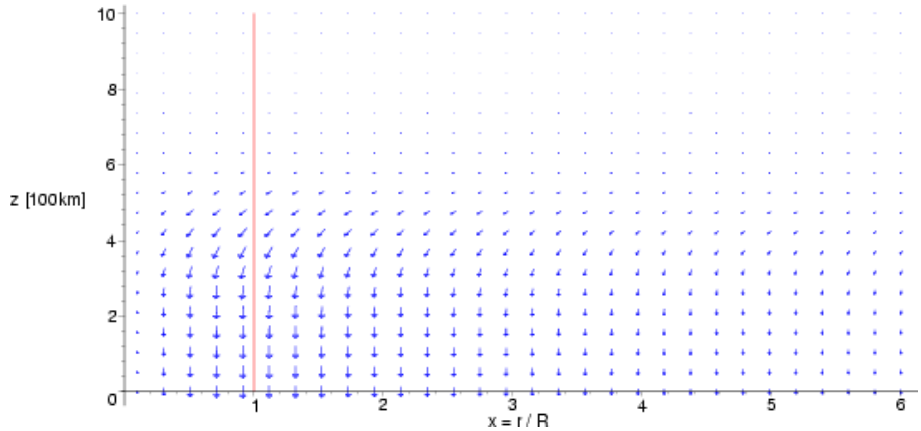

Abbildung 4.13: Poloidaler Anteil des Geschwindigkeitsfeldes ($R = 100$ km)

$$= \frac{4\pi}{\mu} \int_0^\infty \eta(\zeta)\ \rho(\zeta)\ d\zeta \tag{4.115}$$

$$\approx 2.7 \cdot 10^6 \text{ kg/s} , \tag{4.116}$$

davon die Hälfte durch die Kreisscheibe $r \leq R$.

4.7.4 Wirbelprofil

Sei also H die Höhe des Scheitelpunktes, an welchem für alle x gilt:

$$U_\phi(x, H) = 0 = U_z(x, H) . \tag{4.117}$$

Im Rahmen des bis hierher verfolgten Formalismus bedeutet dies einfach $z_0 = H$ und

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} U_z(x, z_0) &= U_{z_0}(x) \\ 0 \stackrel{!}{=} U_\phi(x, z_0) &= \rho(z_0)\ V_{\mathrm{I}}(x) . \end{aligned} \tag{4.118}$$

Zur Reduzierung der Schreibarbeit vereinbaren wir im Weiteren die abkürzende Schreibweise

$$L_1(z) := \int_z^\infty \frac{\eta(\zeta)}{\eta_0}\ d\zeta \tag{4.119}$$

$$L_2(z) := \int_z^\infty \frac{\eta(\zeta)}{\eta_0}\ \frac{\rho(\zeta)}{\rho_0}\ d\zeta . \tag{4.120}$$

Damit haben wir offenbar

$$\lim_{z\to\infty} L_1(z) = 0 = \lim_{z\to\infty} L_2(z) \tag{4.121}$$

und

$$\begin{aligned} l_1 := L_1(0) &\approx 2.5\cdot 10^5 \ \text{m} \\ l_2 := L_2(0) &\approx 8.9\cdot 10^3 \ \text{m} \end{aligned} \tag{4.122}$$

sowie insbesondere

$$\frac{l_2}{l_1} \approx \frac{1}{28} \ll 1 \tag{4.123}$$

mit den Werten der Abschnitte 4.4 und 4.5.
Mit (4.97) findet sich damit folgendes Wirbelprofil am Fußpunkt der Röhre:

$$W(x) \equiv \frac{U_\phi(x,0)}{\rho(0)} = \frac{1}{\rho(0)}\Big(U_\parallel(x,0) + U_\mathrm{R}(x,0)\Big) \tag{4.124}$$

$$\approx -\frac{4\ \eta_0\ (\mathrm{sgn}\ b_\phi)}{\mu R^2}\frac{x}{1+x^2}\left(l_1 + \frac{l_2}{1+x^2}\right) \tag{4.125}$$

$$\approx -\frac{4\ \eta_0\ l_1\ (\mathrm{sgn}\ b_\phi)}{\mu\ R^2}\frac{x}{1+x^2}\ . \tag{4.126}$$

H liege dabei schon so weit in der Chromosphäre, dass die untere Grenze z_0 der Integrale in (4.98) bis ∞ verschoben werden kann und die Konstanten l_1 und l_2 aus (4.122) Anwendung finden.[22]
Abbildung 4.14 zeigt das resultierende Wirbelprofil (4.125) (durchgezogene Linie) sowie — nur schwer davon zu trennen — die Näherung (4.126) (gestrichelte Linie) für $R = R_{100} := 100$ km; eine andere Wahl für R bedeutet eine Umskalierung gemäß

$$\frac{v_R(x)}{v_{R_{100}}(x)} = \left(\frac{R}{R_{100}}\right)^{-2}\ . \tag{4.127}$$

[22]Diese Setzung ist unkritisch, da η mit wachsender Höhe h über der resistiven Schicht wie $\exp(-h^2)$ abfällt (siehe Abbildung 4.7) und deshalb jenseits von $h \approx 1000$ km praktisch keinen Beitrag zu den beiden Integralen in (4.98) liefert.

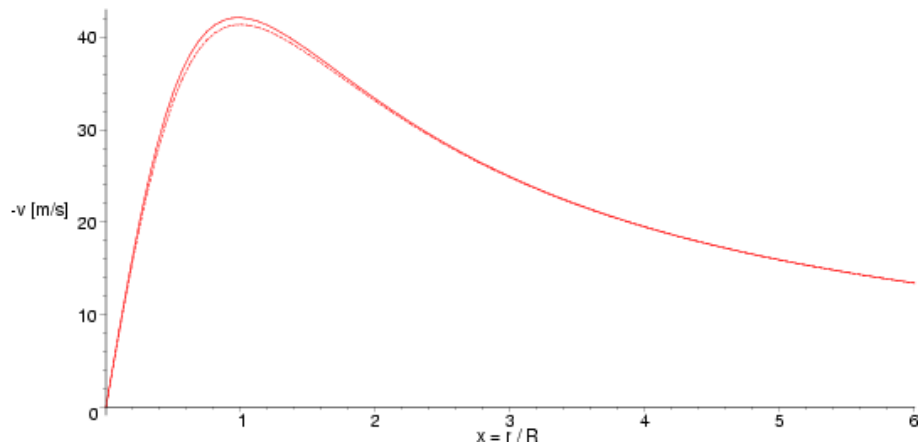

Abbildung 4.14: Profil von $V_0(x)$ am Fußpunkt der Flussröhre

4.7.5 Wirbelvorgabe

4.7.5.1 Herleitung einer DGL für B bzw. $\mathcal{E}(x)$

Soll nun umgekehrt aus dem Wirbelprofil $W(x)$ auf das zugehörige Magnetfeld geschlossen werden, so bietet es sich zunächst an, $B_\phi(x)$ und $B_z(x)$ gemäß (4.29) durch ihre Energiefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= B_\phi(xR)^2 + B_z(xR)^2 \\ &= (B_0)^2\Big(b_\phi(x)^2 + b_z(x)^2\Big) \end{aligned} \tag{4.128}$$

darzustellen; (4.28) ist damit identisch erfüllt und

$$\rho_0 W(x) = U_\phi(x, 0) \tag{4.129}$$

wird zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung für eine einzige Funktion, nämlich $\mathcal{E}(x)$:

$$\begin{aligned}
0 &= \left((\operatorname{sgn} b_\phi)\frac{2\mu\,\Omega_0 R^3}{\eta_0}\right)\,\omega(x)\Big[x^2\mathcal{E}'(2\mathcal{E}+x\mathcal{E}')^{5/2}\sqrt{-x\mathcal{E}'}\Big] \\
&+ l_1\Big[x^3\Big(3(\mathcal{E}'')^2\mathcal{E}'\mathcal{E} - 2\mathcal{E}''(\mathcal{E}')^3 - 2\mathcal{E}'''(\mathcal{E}')^2\mathcal{E}\Big)\Big] \\
&+ l_1\Big[x^2\Big(4\mathcal{E}''(\mathcal{E}')^2\mathcal{E} - 4\mathcal{E}'''\mathcal{E}'(\mathcal{E})^2 + 2(\mathcal{E}\mathcal{E}'')^2 - 6(\mathcal{E}')^4\Big)\Big] \\
&+ l_1\Big[x\Big(9(\mathcal{E}')^2\mathcal{E} - 8\mathcal{E}''\mathcal{E}'(\mathcal{E})^2\Big) + \Big(6(\mathcal{E}\mathcal{E}')^2\Big)\Big] \\
&+ l_2\Big[x^4\Big((\mathcal{E}'\mathcal{E}'')^2 - \mathcal{E}'''(\mathcal{E}')^3\Big) + x^3\Big(\mathcal{E}''(\mathcal{E}')^3 - 2\mathcal{E}'''(\mathcal{E}')^2\mathcal{E}\Big)\Big] \\
&+ l_2\Big[x^2\Big(6(\mathcal{E}')^4 - 10\mathcal{E}''(\mathcal{E}')^2\mathcal{E}\Big) + x\Big(-6(\mathcal{E}')^3\mathcal{E}\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Hierbei wurde die Wirbelgeschwindigkeit $W(x)$ durch die zugehörige Winkelgeschwindigkeit $\Omega(x) \equiv \Omega_0\,\omega(x)$ mit $[\omega(x)] = 1$ ausgedrückt:

$$\omega(x) := \frac{\Omega(x)}{\Omega_0} := \frac{1}{\Omega_0}\frac{W(x)}{xR} \tag{4.131}$$

4.7.5.2 Anfangsbedingungen für $\mathcal{E}(x)$

Die allgemeine Lösung von (4.130) wird drei freie Konstanten enthalten, welche durch die Angabe von drei Bedingungen der Form

$$\mathcal{E}(x_c) \stackrel{!}{=} C_1 \tag{4.132}$$

$$\mathcal{E}'(x_c) \stackrel{!}{=} C_2 \tag{4.133}$$

$$\mathcal{E}''(x_c) \stackrel{!}{=} C_3 \tag{4.134}$$

festzulegen sind. Hierzu stellen wir zunächst fest, dass alle Terme in Gleichung (4.130) die Funktionen $\mathcal{E}^{(n)}(x)$ ausschließlich in der vierten Potenz

enthalten.[23] Wir können also $\mathcal{E}(x)$ formal durch den Übergang

$$\mathcal{E}(x) \to \frac{1}{(B_0)^2}\ \mathcal{E}(x) \tag{4.135}$$

dimensionslos machen und

$$\mathcal{E}(0) = 1 \tag{4.136}$$

annehmen.
$\mathcal{E}'(0)$ betreffend wollen wir annehmen, dass $\mathcal{E}(x)$ eine in $x = 0$ reguläre Funktion ist. Aus Symmetriegründen[24] ist dann $\mathcal{E}(-x) = \mathcal{E}(x)$, und die Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung durch die Taylorformel

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{E}^{(n)}(0)}{n!}\ x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{E}^{(2n)}(0)}{(2n)!}\ x^{2n} \tag{4.137}$$

liefert sofort

$$\mathcal{E}'(0) = 0\ . \tag{4.138}$$

(Dieses Ergebnis hätte wegen

$$\mathcal{E}'(0) \equiv \frac{d}{dx}\Big(b_\phi(x)^2 + b_z(x)^2\Big)\Big|_{x=0} \tag{4.139}$$

$$= 2\Big(\underbrace{b_\phi(0)}_{=0}\ b'_\phi(0) + b_z(0)\ \underbrace{b'_z(0)}_{=0}\Big) = 0 \tag{4.140}$$

auch direkt aus der Definition (4.29) gewonnen werden können, wobei der zweite Term wegen Gleichung (4.66) verschwindet.)
Eine kurze Überprüfung zeigt, dass sich für $\mathcal{E}''(0)$ keine derart starre Festlegung ergibt; lediglich die Forderung $\lim_{r\to\infty} \|\mathbf{B}\| \stackrel{!}{=} 0$ legt

$$\mathcal{E}''(0) < 0 \tag{4.141}$$

[23] Damit ist gemeint, dass dort nur Summanden der Form

$$C_k\ x^k\ (\mathcal{E})^\alpha (\mathcal{E}')^\beta (\mathcal{E}'')^\gamma (\mathcal{E}''')^\delta$$

mit

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4$$

vorkommen.

[24] Dieses Argument wird in Anhang A noch etwas konkreter ausgeführt.

nahe.[25]

4.7.5.3 Numerische Auswertung

Die Abbildung 4.15 zeigt die Funktion $\mathcal{E}(x)$ für den Fall, dass der vorgegebene Wirbel durch $W_n(x) = (n/4)\ W(x)$ mit $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gegeben ist. Für $\mathcal{E}''(0)$ wurde willkürlich der Wert -2 gewählt;[26] andere Werte bewirken erwartungsgemäß steiler oder flacher mit x abfallende Energiedichten.

Es kann beobachtet werden, dass eine *Erhöhung* der Wirbelgeschwindig-

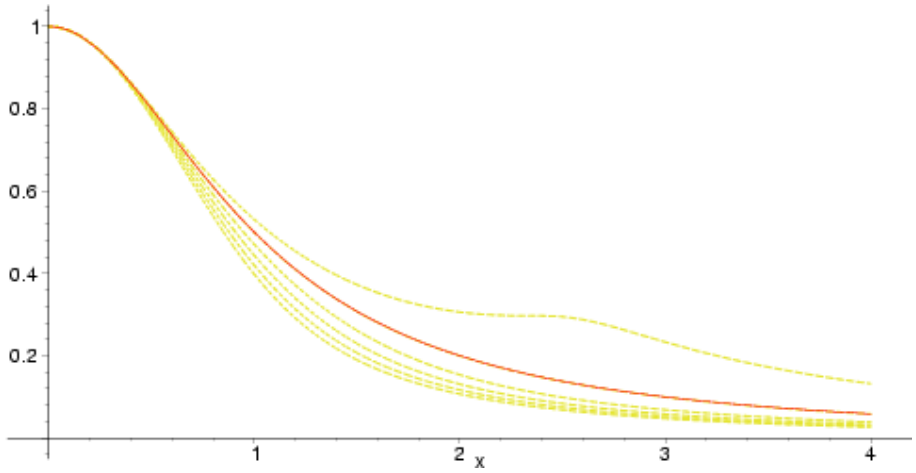

Abbildung 4.15: $\mathcal{E}(x)$ für $\omega(x) = n/(1 + x^2)$. Der Fall $n = 4$ (durchgezogene Linie) entspricht dem Wirbelprofil (4.126) und reproduziert die zu $\mathbf{B}_1$ gehörige Energiefunktion $\mathcal{E}_1(x) \equiv \|\mathbf{B}_1\|^2 = 1/(1 + x^2)$. Inwiefern der Fall $n = 5$ pathologisch ist konnte leider nicht geklärt werden.

keit scheinbar mit einer *Verbreiterung* der Energiefunktion einhergeht, deren Ausmaß allerdings als marginal zu bezeichnen ist. Bemerkenswert ist ferner,

[25] Im Falle von $\mathbf{B}_1$ etwa ist

$$\mathcal{E}''(0) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\bigg|_{x=0} = -2\ . \tag{4.142}$$

[26] Die Berechnung erfolgte mit Hilfe des Mathematikprogramms `MapleV Release 5.1` unter Verwendung der Routine `DEplot`; diese akzeptierte aus nicht nachvollziehbaren Gründen für $\mathcal{E}''(0)$ nur ganze Zahlen zwischen -2 und -8 sowie für n nur den oben genannten Parameterbereich.

dass auch bei verschiedensten Formen der Winkelgeschwindigkeit, wie z.B. $\omega(x) = x$ oder $\omega(x) = x^2 \exp(-x)$, praktisch keine Änderung in $x \mapsto \mathcal{E}(x)$ festzustellen ist. Die sich einstellende Form des Magnetfeldes scheint also nur wenig von Form oder Stärke des Konvektionswirbels abzuhängen; dies darf als Hinweis auf eine weitgehende Allgemeingültigkeit der an Hand des speziellen Vertreters $\mathbf{B}_1$ abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten gewertet werden.

4.8 Der minimale Röhrenradius

Nach (4.110) und (4.111) skalieren die einzelnen Komponenten von $\mathbf{v} \equiv \mathbf{U}/\rho$ mit $1/R$ (im Falle von v_r) bzw. mit $1/R^2$ (für v_ϕ und v_z). In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ab welchem minimalen Radius der Flussröhre

$$\|\mathbf{v}\| \approx v_{\mathrm{A}} \equiv B/\sqrt{\mu\rho} \tag{4.143}$$

wird und die entsprechende Vereinfachung aus 4.1 nicht mehr zulässig ist. Aus Gründen der Einfachheit bedienen wir uns dazu wieder des in Abschnitt 4.7.2 vorgestellten Magnetfeldes $\mathbf{B}_1$. Dessen absolute magnetische Flussdichte B verhält sich wie

$$\begin{aligned} B(x) &\equiv \sqrt{B_\phi(x)^2 + B_z(x)^2} = B_0 \sqrt{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{B_0}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned} \tag{4.144}$$

und liefert mit

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \exp\left(-\frac{z}{L_\rho}\right) \tag{4.145}$$

folgende Form für die Alfvén–Grenzgeschwindigkeit:

$$v_{\mathrm{A}}(x,z) \equiv \frac{B(x)}{\sqrt{\mu\rho(z)}} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho_0}} \, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \exp\left(\frac{z}{2L_\rho}\right) \; . \tag{4.146}$$

Sei nun $\hat{\mathbf{v}}$ das Feld, welches entsteht durch Ersetzung der in $\mathbf{v}$ vorkommenden Faktoren $x/(1+x^2)$, $x/(1+x^2)^2$ und $1/(1+x^2)^2$ durch $1/\sqrt{1+x^2}$.
Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > \max\left[\frac{x}{1+x^2}, \frac{x}{(1+x^2)^2}, \frac{1}{(1+x^2)^2}\right] \; \forall \; x \tag{4.147}$$

gilt stets $\hat{v} := \|\hat{\mathbf{v}}\| > \|\mathbf{v}\|$; $\hat{v}$ ist also eine obere Schranke für $\|\mathbf{v}\|$. In diesem Sinne kann statt (4.143) die etwas schwächere (aber rechnerisch vorteilhaftere) Bedingung

$$\|\hat{\mathbf{v}}\| \approx v_{\mathrm{A}} \tag{4.148}$$

untersucht werden. Da nun aber $\|\hat{\mathbf{v}}\|$ und v_{A} in radialer Richtung nach Konstruktion auf die gleiche Weise variieren, genügt es mithin, die Untersuchung der Gleichung (4.148) auf deren z–Abhängigkeit zu beschränken.[27] Die beiden unterschiedlichen R–Proportionalitäten legen dabei eine Aufspaltung von $\|\hat{\mathbf{v}}\|^2$ nahe in

$$\begin{aligned} (v_{\mathrm{rad}})^2 &:= (\hat{v}_r)^2 \\ (v_{\mathrm{zyl}})^2 &:= (\hat{v}_\phi)^2 + (\hat{v}_z)^2 \ . \end{aligned} \tag{4.149}$$

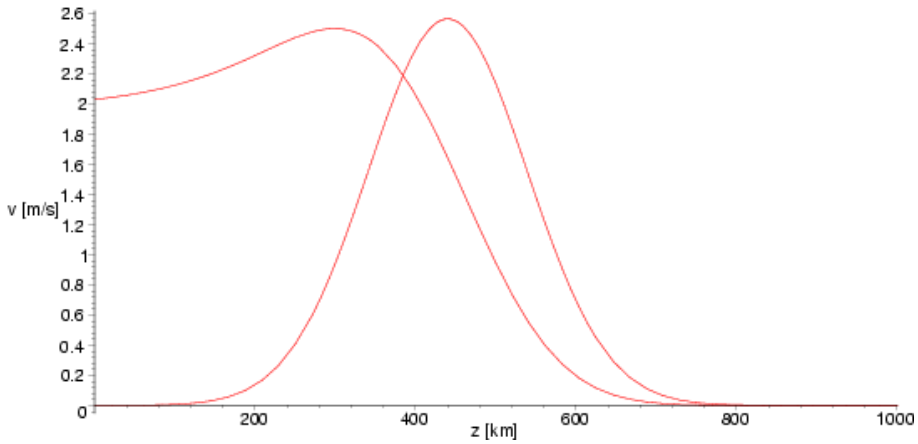

Abbildung 4.16: Vergleich von radialer und zylindrischer Komponente von $\hat{\mathbf{v}}$ für den Spezialfall $R = R_{\mathrm{t}} = 650$ km

Abbildung 4.16 zeigt die beiden Funktionen $v_{\mathrm{rad}}(z)$ und $v_{\mathrm{zyl}}(z)$ für den Fall $R = R_{\mathrm{t}} := 650$ km, bei welchem beide Ausdrücke etwa von gleicher Größenordnung sind; für $R \left\{ \begin{array}{c} \gg \\ \ll \end{array} \right\} R_{\mathrm{t}}$ ist entsprechend $\left\{ \begin{array}{c} v_{\mathrm{rad}}(z) \\ v_{\mathrm{zyl}}(z) \end{array} \right\}$ dominant.
Wie ferner aus Abb. 4.16 erkennbar ist, liegen die absoluten Werte beider Komponenten noch mehrere Größenordnungen unterhalb von

$$v_{\mathrm{A}}|_{z=0} \approx 17 \text{ km/s} \tag{4.150}$$

[27] Dies entspricht einer Auswertung auf der Achse $x = 0$.

(und damit erst recht unterhalb von $v_{\mathrm{A}}|_{z>0}$).
Das Diagramm 4.17 zeigt den Verlauf des Kurvenbündels $\{\|\hat{\mathbf{v}}\|_R\}$ für $R = R_n := n$ km, $n \in \{1, \ldots, 20\}$ (durchgezogene Linien) sowie außerdem die Alfvén–Geschwindigkeit $v_{\mathrm{A}}(z)$ (gestrichelte Linie). Wie erwartet wird die Form der Graphen wegen $R_n \ll R_{\mathrm{t}}$ durch $v_{\mathrm{zyl}}(z)$ dominiert; der v_{rad}–Anteil liefert praktisch keinen Beitrag. Erkennbar ist ferner, dass Funktion $\hat{v}(z)$ offenbar deutlich schwächer ansteigt als $v_{\mathrm{A}}(z)$, d.h. die Bedingung $\hat{v}(z) < v_{\mathrm{A}}(z)$ ist für alle z erfüllt, sobald dies bei $z = 0$ der Fall ist. Die Grenzbedingung

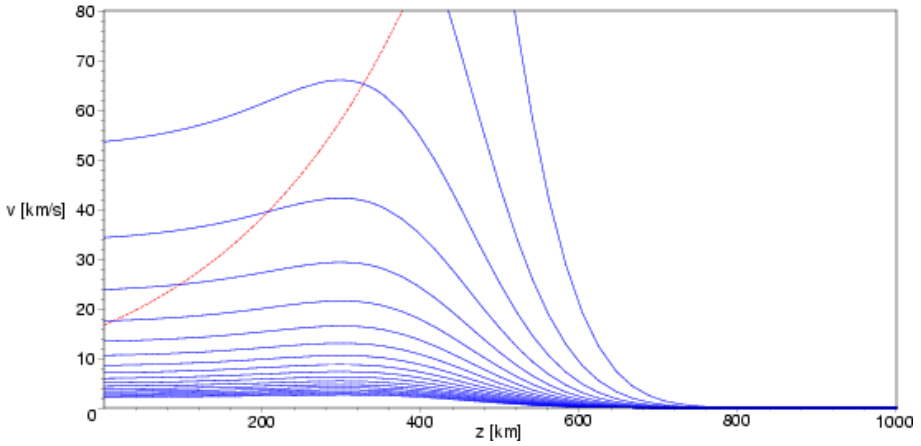

Abbildung 4.17: Absolute Fluidgeschwindigeit für $R \in \{1, 2, \ \ldots \ , 20 \text{ km}\}$

aus Gleichung (4.148) wird damit zu

$$\frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho_0}} = v_{\mathrm{A}}(0) \stackrel{!}{=} |v_{\mathrm{zyl}}(0)| = \frac{4\ \eta_0\ \rho_0}{\mu R^2}\sqrt{(l_1 + l_2)^2 + (l_2)^2}\ ; \tag{4.151}$$

dies kann nach R aufgelöst werden und liefert so schließlich

$$R_A \ := \ R|_{(v_{\mathrm{A}}=v_{\mathrm{zyl}})} = \sqrt{\frac{4\ \eta_0}{B_0}\sqrt{\frac{(\rho_0)^3}{\mu}\Big((l_1 + l_2)^2 + (l_2)^2\Big)}} \tag{4.152}$$

$$\approx \ 7 \text{ km}\left(\frac{B_0}{0.1 \text{ T}}\right)^{-1/2}\left(\frac{\eta_0}{0.1\ \Omega \text{ m}}\right)^{1/2}\left(\frac{\rho_0}{3 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3}\right)^{3/4} \tag{4.153}$$

als Radius der kleinsten noch sinnvoll beschreibbaren Flussröhre. R_A ist also offenbar deutlich kleiner als die laterale Auflösung (4.16) sämtlicher existierender Beobachtungsdaten. Damit ist sichergestellt, dass die in (4.1.5)

eingeführte Annahme kleiner Fluidgeschwindigkeiten keine praktische Einschränkung an die Größe der durch das Modell beschriebenen Flussröhren–Konfigurationen darstellt.

4.9 Relevanz der resistiven Schicht

4.9.1 Abschätzung der Beobachtbarkeit

Ein wesentliches Anliegen der vorliegenden Arbeit war die Klärung der Frage, ob und in welchem Umfang die Existenz der nichtidealen photosphärischen Plasmaschicht Einfluss nimmt auf das Verhalten der dort befindlichen Strömungs– und Magnetfelder, insbesondere in Bezug auf die Frage des Feldlinienschlupfes. Ein erster naiver Ansatz könnte nun darin bestehen, die in Kapitel 4 ausgeführten Berechnungen für $\eta \equiv 0$ zu wiederholen und die Ergebnisse mit denen der bereits vorliegenden ($\eta \neq 0$)–Rechnungen zu vergleichen. Im Falle eines nichtverschwindenden $\mathbf{B}$–Feldes findet man jedoch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \left(0, \frac{U_{z_0}(x)}{\rho(z)} \frac{b_\phi(x)}{b_z(x)} + V_{\mathrm{I}}(x), \frac{U_{z_0}(x)}{\rho(z)}\right) , \tag{4.154}$$

so dass die Randbedingungen (4.117) nur durch die triviale Lösung $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ befriedigt werden könnten. Im Falle idealer MHD existiert also keine nichttriviale, stationäre Lösung, und der angestrebte Vergleich ist in dieser Form nicht praktikabel. Statt dessen ist nun vielmehr zu fragen, ob und unter welchen Bedingungen die Geschwindigkeit der durch die resistive Schicht induzierten Materieströme signifikant größer oder kleiner wird als die Strömungsgeschwindigkeiten real beobachteter Plasmabewegungen. Hierzu wählen wir die schon mehrfach zitierte charakteristische photosphärische Fluidgeschwindigkeit von

$$v_{\mathrm{beob}} := 5 \text{ km/s} \tag{4.155}$$

und verwenden die aus 4.8 bekannte Aufspaltung (4.149) der "Supremumsgeschwindigkeit" $\hat{v}(x, z)$ in

$$\hat{v}_{\mathrm{rad},0}(z) := |\hat{v}_{\mathrm{rad}}(0, z)| = \frac{2}{\mu R}\, \eta(z) \tag{4.156}$$

$$\hat{v}_{\mathrm{zyl},0}(z) := |\hat{v}_{\mathrm{zyl}}(0, z)| = \frac{4}{\mu R^2}\, \eta_0\, w(z) \tag{4.157}$$

$$\tag{4.158}$$

mit

$$w(z) := \sqrt{\left(L_1(z) + \frac{\rho_0}{\rho(z)} L_2(z)\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{\rho(z)} L_2(z)\right)^2} \,. \tag{4.159}$$

Wegen $\eta(z) \leq \eta_0$ ist $\hat{v}_{\text{rad},0}(z)$ nach oben durch

$$\hat{v}_{\text{rad,max}} := \frac{2\,\eta_0}{\mu R} \tag{4.160}$$

beschränkt. Der radiale Anteil von $\mathbf{v}$ wird demnach also höchstens dann relevant, wenn gilt:

$$v_{\text{beob}} \stackrel{!}{=} \hat{v}_{\text{rad},0}(z) < \hat{v}_{\text{rad,max}} \equiv \frac{2\,\eta_0}{\mu R} \tag{4.161}$$

oder

$$R < R_{\text{rad}} := \frac{2\,\eta_0}{\mu\; v_{\text{beob}}} \approx 33 \text{ m}, \tag{4.162}$$

ein beobachtungstechnisch bedeutungslos kleiner Wert.
Das Maximum der Funktion $w(z)$ kann mit numerischen Methoden in einer Höhe von

$$z_{\text{zyl,max}} \approx 300 \text{ km} \tag{4.163}$$

lokalisiert werden. Mit dem dortigen Funktionswert $w_{\text{max}} := w(z_{\text{zyl,max}})$ liefert die zu (4.161) analoge Betrachtung das folgende Kriterium für die Relevanz von $\hat{v}_{\text{zyl}}$ gegenüber v_{beob}:

$$R < R_{\text{zyl}} := 2\sqrt{\frac{\eta_0\; w_{\text{max}}}{\mu\; v_{\text{beob}}}} \approx 15 \text{ km} \left(\frac{\eta_0}{0.1\;\Omega\text{ m}}\right)^{1/2} \left(\frac{v_{\text{beob}}}{5 \text{ km/s}}\right)^{-1/2} . \tag{4.164}$$

Auch dieser Radius liegt noch deutlich unterhalb der derzeit realisierbaren lateralen Auflösungsgrenze.
Man könnte nun versucht sein, auf Grund der zuletzt gegebenen Abschätzung den diskutierten Phänomenen jedwede Relevanz bzw. Verifizierbarkeit abzusprechen. Dagegen sind allerdings mindestens zwei Einwände denkbar:

- Zunächst kann argumentiert werden, dass die Forderung $v \approx v_{\text{beob}}$ vielleicht zu streng formuliert ist und durch die etwas schwächere Frage ersetzt werden sollte, ab wann v zwar noch nicht dominant, aber schon *beobachtbar* ist. Eine Umkehrung von Gleichung 4.164 liefert

$$\hat{v}_{\text{zyl,max}} = \frac{4\;\eta_0\; w_{\text{max}}}{\mu R^2} = 110\;\frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\frac{R}{100 \text{ km}}\right)^{-2} \tag{4.165}$$

als obere Grenze der Fluidgeschwindigkeit, was bereits an die Auflösung heutiger Beobachtungen von etwa $v_{\text{reso}} := 0.1$ km/s heranreicht.

- Alle drei Komponenten von $\mathbf{v}$ skalieren linear mit η_0. Zu dessen Bestimmung wurde in Ermangelung direkt gemessener Werte die Formel (4.40) von SPITZER herangezogen (→ Abschnitt 4.4). Diese allerdings vernachlässigt die Effekte kleinskaliger Turbulenz und neigt deshalb dazu, die tatsächliche Plasma–Resistivität um einen Faktor der Größenordnung $10^{0\ldots2}$ zu *unterschätzen*. Es darf demnach erwartet werden, dass die so erhaltenen Geschwindigkeits–Magnituden eine *untere Grenze* darstellen und unter Umständen auch eine um den genannten (theoretisch allerdings kaum bestimmbaren) Faktor größere Fluidgeschwindigkeit erreicht werden kann.

4.9.2 Quantifizierung des Feldlinienschlupfes

Obwohl schon aus dem letzten Abschnitt hervorgeht, dass das durch die Magnetfeldgeometrie induzierte Strömungsfeld nur für Radien unterhalb der Beobachtungsgrenze gegenüber der allgemeinen photosphärischen Konvektion dominiert, wollen wir nun der Vollständigkeit halber noch das Ausmaß der Abweichung von der im idealen Fall vorliegenden *Isorotation* abschätzen. Als Maß dafür bedienen wir uns der (im nichtresistiven Fall exakt verschwindenden) Differenz der Winkelgeschwindigkeiten über und unter[28] der ($\eta \neq 0$)–Zone bei gegebenem Radius r (bzw. x). Da erstere nach Konstruktion gleich Null ist, haben wir dazu lediglich

$$\Delta\Omega(x) := \frac{|W(x)|}{xR} \approx \frac{4\,\eta_0\,l_1}{\mu\,R^3}\frac{1}{1+x^2} \tag{4.166}$$

[28] Gemeint sind natürlich $z \to \infty$ und $z = 0$.

zu betrachten.[29] Dies ergibt:

$$\Delta\Omega(x) \leq \Delta\Omega(0) \approx \frac{4\,\eta_0\,l_1}{\mu\,R^3} \approx 8.3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1} \left(\frac{R}{100\ \mathrm{km}}\right)^{-3}\ , \tag{4.168}$$

was ebenfalls weit hinter der typischen Größenordnung der beobachteten Konvektions–Winkelgeschwindigkeit von

$$\Omega_{\mathrm{beob}} := \frac{v_{\mathrm{beob}}}{R} = 2.0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1} \left(\frac{R}{100\ \mathrm{km}}\right)^{-1} \tag{4.169}$$

zurückbleibt, diejenige der typischerweise beobachtungstechnisch *auflösbaren* Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_{\mathrm{reso}} := \frac{v_{\mathrm{reso}}}{R} = 4.0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1} \left(\frac{R}{100\ \mathrm{km}}\right)^{-1} \tag{4.170}$$

allerdings wesentlich knapper (wenn auch immer noch deutlich) verfehlt. Gleichheit von (4.168) und (4.169) ist erst hergestellt ab einem vernachlässigbar kleinen Radius von $R \approx 6$ km, Gleichheit von (4.168) und (4.170) erfordert $R \approx 50$ km. Auch hier kann argumentiert werden, dass das effektive Ausmaß des Schlupfes kaum in der Lage sein dürfte, einen wesentlichen Beitrag zum allgemeinen photosphärischen Strömungsfeld zu leisten, der im letzten Abschnitt genannte Einwand die Resistivität betreffend jedoch ein evtl. deutlich günstigeres Bild der Verifizierbarkeit zeichnet.

4.10 Stand der Beobachtung

Title [9] fasst den derzeitigen Kenntnisstand über die mit kleinskaligen magnetischen Elementen assoziierten Strömungsfelder wie folgt zusammen:

[29] Wir verwandten hier die Näherung (4.126).
Man beachte ferner, dass $U_\phi(x,z)$, wie auf Abbildung 4.12 erkennbar, streng genommen nicht monoton von $W(x)/\rho_0$ auf Null abfällt, sondern in der Höhe $z_{\max} \approx 260$ km noch ein schwach ausgeprägtes Maximum durchläuft. Je nach Definition des Begriffs "maximaler Schlupf" könnte also auf der rechten Seiten von (4.166) noch der von x abhängige Faktor

$$\frac{v_\phi(x, z_{\max})}{v_\phi(x, 0)} < 1.18... \tag{4.167}$$

hinzugefügt werden. Wir wollen hier der Einfachheit halber darauf verzichten.

Während sämtliche numerischen Simulationen der solaren Oberflächenkonvektion eine deutliche Verwirbelung innerhalb der intergranularen Bereiche zeigen, konnten auf Seiten der Beobachtung noch keine derartige Wirbel im Inneren der dort befindlichen magnetischen Flussröhren nachgewiesen werden. Er vermutet allerdings, das die in naher Zukunft zu erwartende Leistungssteigerung im Bereich der Beobachtungshardware, insbesondere der adaptiven Optik, Hinweise auf wirbelförmige Plasmaströmungen sowie auf entsprechend verdrillte magnetischen Strukturen liefern wird. Sinngemäß heißt es dort: "Die Wechselwirkung der Verwirbelung der [intergranularen] *downflow*–Säulen mit der resultierenden Verdrillung der magnetischen Flussröhren ist noch nicht beobachtet worden, stellt jedoch einen faszinierenden Mechanismus dar für den Transport und die Freisetzung von Energie oberhalb der Photosphäre."
Die Skalierung betreffend ist ferner eine Arbeit von Sigwarth *et al.* [11] erwähnenswert, in der die Autoren über die Beobachtung einer starken Zunahme des dynamischen Verhaltens der magnetischen Elemente bei wachsender lateraler (und temporaler) Auflösung berichten. Obgleich dort kein explizites Skalierungsgesetz aufgestellt wird, kann dennoch von einer qualitativen Bestätigung des postulierten Zusammenhangs "kleiner Röhrenquerschnitt $\Leftrightarrow$ hohe Strömungsgeschwindigkeit" gesprochen werden. Der von den Autoren erwähnte Netto–*downflow* von ≥ 0.5 km/s passt ebenfalls ins Bild: Zwar liegt er noch gut eine Größenordnung über dem maximal zu erwartenden Wert von

$$v_z(0,0) = \frac{4\,\eta_0\,l_2}{\mu R^2}\frac{1}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} \approx 30\ \mathrm{m/s}\left(\frac{R}{R_{100}}\right)^{-2}\ , \tag{4.171}$$

jedoch muss davon ausgegangen werden, dass der zwischen den Granulationszellen stets vorhandene Strom absinkender Plasmaballen den eigentlichen Effekt des magnetisch verursachten Abflusses undetektierbar macht. (Priest [1] beziffert die Größenordnung der vertikalen Komponente der intergranularen Konvektion auf 0.4 km/s.)

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war die Beantwortung der Frage, inwiefern die Resistivität der photosphärischen Schicht zwischen der solaren Konvektionszone und der Chromosphäre Einfluss nimmt auf die Kopplung zwischen diesen beiden nichtresistiven Zonen, wobei diese Kopplung als durch eine aus der Konvektionszone aufgestiegene magnetische Flussröhre vermittelt gedacht wurde. Um die mit diesem Szenario verbundenen Effekte quantitativ zu erfassen, wurde von einer zylinderförmigen Flussröhren–Geometrie ausgegangen, welche die drei Bereiche Konvektionszone, Photosphäre und Chromosphäre senkrecht durchdringt. Unter der vereinfachenden Annahme einer horizontalen Temperaturschichtung konnten realistische Ersatzprofile für den Verlauf der Resistivität $\eta = \eta(z)$ und Massendichte $\rho = \rho(z)$ innerhalb der solaren Atmosphäre angegeben werden. Beide Funktionen wurden als Vorgaben benutzt, um die Grundgleichungen der resistiven (nichtidealen) Magnetohydrodynamik auf stationäre Lösungen hin zu untersuchen. Wie die vollständig analytische und — abgesehen von der Forderung $B_r \equiv 0$ — selbstkonsistente Gestalt dieser Lösung zeigt, ist das Magnetfeld der Flussröhre wesentlich gekennzeichnet durch die beiden Eigenschaften

1. Kraftfreiheit und

2. Invarianz bezüglich Translation in z.

Ferner konnte gezeigt werden, dass der radiale Gradient des Magnetfeldes einen stationären Einstrom von Plasma ins Innere der Flussröhre (d.h. in Richtung wachsender Magnetfeldstärke) induziert, welcher weder von deren Radius R, noch von Betrag oder Richtung des $\mathbf{B}$–Vektors abhängt, in der

Höhe z allerdings proportional zu $\eta(z)$ sowie zum relativen B–Gradienten $\partial_r B_z(r)/B_z(r)$ ist. Dies bedeutet insbesondere eine Skalierung von $\mathbf{v}$ gemäß

$$\left(v_r, v_\phi, v_z\right) \propto \left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2}\right) \ , \tag{5.1}$$

so dass in dünnen Flussröhren deutlich höhere Strömungsgeschwindigkeiten herrschen als in dickeren. Es konnte gezeigt werden, dass dieses Verhalten qualitativ unabhängig ist von der Gestalt des Magnetfeldes, insbesondere von Annahme einer in z–Richtung invarianten Röhrengeometrie, wenngleich das entsprechende Skalierungsgesetz in diesem Fall weniger offensichtlich ist. Diese Tatsache, zusammen mit der Unabhängigkeit von der konkreten Form der Impulsgleichung, könnte den Effekt auch in nicht–solaren Umgebungen interessant werden lassen.
Nur bei Flussröhren mit einem kritischen Radius unterhalb von $R_{\text{crit.}} \approx 15$ km gelangen die Plasmaströmungen, und damit auch der Schlupf von $\mathbf{v}$ relativ zu $\mathbf{B}$, in die Größenordnung typischer in der Photosphäre gemessener Geschwindigkeiten von $v_{\text{beob}} \approx 5$ km/s, während die durch die existierende Beobachtungshardware vorgegebene Messgrenze (≈ 0.1 km/s) bereits ab $R \approx 45$ km erreicht wird. Obgleich beide Radien noch deutlich unterhalb der heute beobachtungstechnisch auf der Sonnenoberfläche realisierbaren Ortsauflösung[1] angesiedelt sind, darf in naher Zukunft auf die (bisher noch nicht gelungene) Verifikation (bzw. Falsifikation) durch die Beobachtung gehofft werden, zumal die Unsicherheit im Wert der Resistivität des photosphärischen Plasmas eine systematische Unterschätzung der Plasmageschwindigkeit nahelegt. Von theoretischer Seite liegt der Wert der Abschätzung von $\|\mathbf{v}\|$ darin, dass sie wegen $v_{\text{beob}} < v_{\text{A}} \approx (20...600)$ km/s die Vernachlässigung des Trägheitsterms in der Impulsbilanz rechtfertigt.
Unabhängig von der Frage ihrer unmittelbaren Beobachtbarkeit ist die erstmalig exakt durchgefürte Quantifizierung der Magnetfeld–Aufwicklung durch konvektive Wirbel hervorzuheben, deren Skalierungsverhalten weitgehend frei ist von den üblichen (und im Einzelfall mitunter fragwürdigen) Einschränkungen auf geringe Gasdrucke[2], Inkompressibilität, o.ä.
Hinsichtlich des globalen Verhaltens der Plasmaströmung bleibt der vorgelegte Ansatz insofern unbefriedigend, als er keine Aussage über den Verbleib des in die Röhre eingedrungenen Plasmas machen kann. Die zur Diskussion stehenden Alternativen sind

[1] Siehe insbesondere Gleichung (4.16) und die zugehörige Fußnote.
[2] Gemeint ist die Beschränkung auf den Fall $\beta := P_{\text{gas}}/P_{\text{mag}} \ll 1$.

1. Abfluss in die Konvektionszone hinein (stationärer Fall)
2. Kontinuierliches Auffüllen der Röhre (nichtstationärer Fall)
3. Rekombination und Verlassen der Röhre (nichtstationär; Behandlung erfordert Zwei–Komponenten–Modell) oder
4. Beliebige Kombinationen aus 1. bis 3.

Konzeptionelle Erweiterungen des Modells wie die im folgenden Kapitel 6 (und dort insbesondere in den Abschnitten 6.1 und 6.4) Genannten könnten hier Abhilfe schaffen, wenngleich ihre angemessene Behandlung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Kapitel 6

Diskussion möglicher Verfeinerungen

Wie eingangs bereits angekündigt bedienen sich die bisher vorgelegten Betrachtungen ausgiebigst der in Abschnitt 4.1 diskutierten vereinfachenden Annahmen. Es liegt in der Natur dieses Ansatzes, dass das so erhaltene Abbild der physikalischen Realität grob und im Detail unvollständig bleibt, während eine ganze Anzahl weiterer Effekte möglicherweise nicht adäquat wiedergegeben werden kann. In diesem Kapitel soll aufgezeigt werden, in welche Richtungen die vorliegenden Betrachtungen erweitert werden könnten, und welche weitergehenden Erkenntnisse auf diesem Wege möglicherweise erreichbar sind.

6.1 Volle Röhrengeometrie

Unter allen vorhandenen Diskrepanzen zwischen Modell und Wirklichkeit ist die Annahme einer zylinderförmigen Geometrie sicherlich die Auffälligste. Gewiss würde ein Modell, welches versucht, die gesamte bogenförmige Struktur der Flussröhre geometrisch nachzubilden, ein ungleich exakteres Abbild der physikalischen Realität liefern. Insbesondere die in Abschnitt 4.6.4 angesprochene Frage eines möglichen "Ausbauchens" (= Vergrößerung des Querschnittes) muss bei Annahme axialer Symmetrie offenbar unbeantwortet bleiben. Andererseits stellte gerade diese Annahme einen wesentlichen Schritt bei der Vereinfachung der zu verwendenden MHD–Gleichungen dar, und es darf bezweifelt werden, ob die im Falle $\partial_\phi \neq 0$ resultierenden Glei-

chungssysteme einer analytischen Lösung zugänglich bleiben. Eine Ausdehnung der durchgeführten Berechnungen auf den gesamten sichtbaren Teil der Flussröhre — und damit der endgültige Verzicht auf die Symmetriebedingung $\partial_\phi = 0$ — sollte daher erst in Betracht gezogen werden, nachdem die in den nächsten drei Abschnitten angesprochenen Möglichkeiten (bei Wahrung der axialen Symmetrie) ausgeschöpft sind.

6.2 Variabler Röhrenquerschnitt

Mit Ausnahme von Abschnitt 4.6.5 wurden in der vorliegenden Arbeit nur zylindrische Flussröhren betrachtet. Dieser Ansatz fand seine Rechtfertigung zum einen im eher pragmatischen Bestreben, den zu verwendenden Gleichungssatz nicht bis zur (analytischen) Unlösbarkeit — oder zumindest Unhandhabbarkeit — zu verkomplizieren, wurde aber andererseits durch die Beobachtungsbefunde von Watko & Klimchuk ([12],[13]) nachhaltig gestützt. Dennoch könnte man daran denken, den Übergang

$$R = \text{konst.} \rightarrow R = R(z) \tag{6.1}$$

vom konstanten zum mit z variablen Röhrenradius zu vollziehen und die Funktion $z \mapsto R(z)$ damit in die Menge der selbstkonsistent zu beschreibenden physikalischen Parameter des Systems aufzunehmen. Dies hätte als wünschenswerte Effekte

1. eine signifikante Verallgemeinerung im Sinne der Anwendbarkeit auf Konfigurationen mit variablem Querschnitt sowie

2. die Möglichkeit, eine physikalische Erklärung des in [12] lediglich *festgestellten*[1] Befundes des beinahe konstanten Röhrenquerschnittes zu suchen.

Um etwa für das bis hier verwandte Profil

$$B_z(r) = B_0 \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1} \tag{6.2}$$

[1] Die Autoren vermuten allerdings in [14] aufgrund der Ergebnisse entsprechender Computersimulationen, dass die beobachtete relative Konstanz des Querschnittes ihre Ursache in einer *Verdrillung* der Feldlinien hat. Dies erscheint plausibel, da in diesem Fall die in 3.5.3 beschriebene magnetische Zugkraftdichte $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}/\mu$ einwärts gerichtet ist und somit dem Gradienten des magnetischen Druckes $\nabla P_{\text{mag}} = (\nabla B^2)/(2\mu)$ entgegenwirkt, d.h. eine *Einschnürung* anstrebt.

den Schritt (6.1) sowie den durch $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ induzierten Übergang[2]

$$B_0 \to B_0 \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{-2} \tag{6.4}$$

zu

$$\begin{aligned} B_z(r,z) &= B_0 \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{-2} \left[1 + \left(\frac{r}{R(z)} \right)^2 \right]^{-1} && (6.5) \\ &= B_0 \frac{(R_0)^2}{R(z)^2 + r^2} && (6.6) \end{aligned}$$

mit $R_0 := R(0)$ vorzunehmen, bietet sich die zu (4.55) analoge Definition einer *magnetischen Flussfunktion*

$$\begin{aligned} F_B(r,z) &:= -\int_0^r B_z(r',z)\ r'\ dr' && (6.7) \\ &= -\frac{B_0 (R_0)^2}{2}\ \ln \left[1 + \left(\frac{r}{R(z)} \right)^2 \right] && (6.8) \end{aligned}$$

an. Alles in 4.6.2 über F_U gesagte gilt sinngemäß auch für F_B; insbesondere ist das zugeordnete Magnetfeld

$$\begin{aligned} \Big(B_r, B_\phi, B_z \Big) &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_B}{\partial z}, B_\phi, -\frac{1}{r} \frac{\partial F_B}{\partial r} \right) && (6.9) \\ &= B_0 \left(r \frac{R'(z)}{R(z)} \frac{(R_0)^2}{R(z)^2 + r^2}, \frac{B_\phi(r,z)}{B_0}, \frac{(R_0)^2}{R(z)^2 + r^2} \right) && (6.10) \end{aligned}$$

automatisch divergenzfrei.
Setzt man allerdings das **B**–Feld (6.10) in die MHD–Grundgleichungen ein, so zeigt sich, dass der grösste Teil der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Argumentationskette zusammenbricht; insbesondere ist im allgemeinen Fall von

$$\partial_r \rho(r,z) \neq 0 \neq \partial_r P(r,z) \tag{6.11}$$

[2] (6.4) kann am anschaulichsten durch die der Divergenzfreiheit äquivalente Forderung der Flusserhaltung verstanden werden: Damit der magnetische Fluss

$$\int_0^{R(z)} B_z(r,z)\ 2\pi r\ dr \tag{6.3}$$

durch die Kreisscheiben $r \in [0, R(z)]$ konstant ist für alle z, muss die magnetische Fluss*dichte* sich gemäß $B_z(r,z) \propto 1/R(z)^2$ ändern.

auszugehen, und **B** ist nicht mehr zwingend kraftfrei. In der Tat scheint die Grenze der mit vertretbarem Aufwand handhabbaren Gleichungskomplexität erreicht, und analytisch verwertbare Ausdrücke sind nur unter Rückgriff auf drastische (und vor allem meist unphysikalische) Einschränkungen erreichbar.[3]

6.3 Radiale Variation der Temperatur

Die in Abschnitt 4.1.2 eingeführte Annahme einer horizontalen Temperaturschichtung $T(\mathbf{x}) \to T(z)$ erwies sich im Verlauf der durchgeführten Berechnungen zwar als bequemes und wirksames Mittel zur Vereinfachung der magnetohydrodynamischen Gleichungen, wurde dort allerdings nur pragmatisch und nicht physikalisch begründet. In der Tat sollte diese Setzung aus folgendem Grund kritisch hinterfragt werden:
Grundsätzlich beruht der Wärmetransport in einem beliebigen Medium auf einer Kombination der drei Mechanismen Konvektion, Konduktion und Strahlung. In jenen Bereichen des solaren Plasmas, die nur von dem sehr schwachen[4] Hintergrund–Magnetfeld durchsetzt sind, ist Wärmeleitung durch Konvektion dominant. Im Gegensatz dazu ist die magnetische Flussdichte innerhalb der hier betrachteten konzentrierten Flussröhren so stark, dass für die magnetische und die mechanische Energiedichte die Bedingung

$$S \equiv \frac{w_{\text{mag}}}{w_{\text{mech}}} \equiv \frac{B^2/2\mu}{\rho v^2/2} \gg 1 \tag{6.12}$$

erfüllt ist[5] und die Plasmaströmung durch die Gestalt des Magnetfeldes signifikant eingeschränkt wird; insbesondere ist bei hoher Idealität des Plasmas ($\eta \approx 0$) keine Fluidbewegung quer zu den Feldlinien möglich. Dies bedeutet, dass im nichtresistiven Bereich der Wärmeaustausch zwischen dem Innen– und dem Außenraum der Flussröhre nicht durch Konvektion erfolgen kann und deshalb deutlich weniger effektiv abläuft. Außerdem behindert das Magnetfeld so den radialen Ein– oder Ausfluss von Plasma und damit den Nachstrom heißeren Materials aus der Konvektionszone bzw. aus umliegenden Gebieten der Photosphäre; der betroffene Bereich neigt daher stärker

[3] Eine Beispielrechnung der genannten Art findet sich in Anhang B.

[4] Kippenhahn [5] beziffert die Stärke des mittleren photosphärischen Magnetfeldes auf einige 10^{-4} T.

[5] Für $v = 5$ km/s finden wir $S \approx 300$ im Inneren einer photosphärischen Flussröhre.

zum Auskühlen als vergleichbare magnetfeldfreie Areale, in denen das Plasma entsprechend schneller wieder absinkt, sobald es auch nur moderat kühler als seine Umgebung geworden ist.[6] Wir erwarten demnach, dass das Temperaturniveau zufolge der isolierenden Wirkung des Magnetfeldes im Innenraum stets niedriger ist als im Außenraum, und zwar in jeder geometrischen Höhe.[7] Ferner sollte dieser Unterschied mit dem Durchmesser der Röhre zunehmen, da das Volumen (und damit die Wärmekapazität) eines Segmentes zwischen z und $z+\Delta z$ mit R^2 wächst, die für die Einstrahlung zur Verfügung stehende Oberfläche dagegen nur linear mit R. Die Annahme $\partial_r T(r,z) = 0$ wird also im Falle besonders dünner Flussröhren noch am ehesten gerechtfertigt sein, während sie mit wachsendem R zunehmend als unrealistisch zu betrachten ist.
Der in Abschnitt 4.6.4 diskutierte und in Abbildung 4.13 dargestellte radiale Einfluss innerhalb der nichtidealen Schicht verkompliziert dieses Bild in folgender Weise: In Abweichung von der oben geschilderten Situation sind die Verhältnisse in dieser Schicht gerade so, dass eine radiale Konvektion dort nicht nur ermöglicht, sondern geradezu *erzwungen* wird. Man wird also davon ausgehen können, dass die Annahme einer planparallelen Temperaturschichtung dort hinreichend gut erfüllt ist, und zwar wiederum am besten bei dünnen Flussröhren, in denen hohe Stömungsgeschwindigkeiten herrschen und das Plasma entsprechend schnell ausgetauscht wird.[8] Die Verhältnisse jenseits der $(\eta \neq 0)$–Zone sind nun allerdings stark davon abhängig, in welche Richtung sich das eingeflossene Material weiter bewegt:[9]

- Ist die Flussröhre nach oben starr und von (zeitlich und evtl. auch räumlich) konstantem Querschnitt, so fließt sämtliches Plasma nach un-

[6] Diese Argumentationskette wurde erstmals 1941 von Biermann vorgetragen, um die vergleichsweise geringe Temperatur ($T \approx 4000$ K) der Sonnenflecken zu erklären.

[7] Es wird mitunter beobachtet, dass der Innenbereich dünner Flussöhren *heißer* erscheint als der sie umgebende Teil der Photosphäre. Einer zuerst von Spruit vorgebrachten und in Kapitel 8.2 von [3] zitierten Argumentation zufolge hat Plasma bei der im Zentrum der Flussröhre herrschenden niedrigeren Temperatur eine geringere Opazität, so dass dort die Schicht mit der optischen Tiefe $\tau = 1$ geometrisch tiefer liegt und so weiter unten gelegene und damit heißere Schichten sichtbar werden.

[8] Es muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass diese Überlegungen nur den Transport und die Abstrahlung von Energie betrachten, Heizungsmechanismen wie Rekombination oder magnetische Rekonnexion aber unbeachtet lassen. Das hier skizzierte Bild ist also nur als eine sehr grobe Beschreibung mit begrenzter Aussagekraft zu sehen.

[9] Vergleiche dazu die Diskussion der beiden Alternativen in 4.6.4.

ten ab, und oberhalb des Einströmbereiches findet keinerlei Konvektion statt.[10] In diesem Fall gilt dort die obige Argumentation unverändert.

- Liegt hingegen der (nicht strikt stationäre) Fall vor, in welchem das in die Röhre eindringende Plasma entlang der Feldlinien nach oben fließt und dort eine stetig wachsende Ausbauchung verursacht, so kann bei Vernachlässigung radiativer Verluste dem gesamten Innenraum die Temperatur des photosphärischen Plasmas zugeordnet werden. Ob diese Vernachlässigung statthaft ist oder nicht wird widerum durch den Radius R bestimmt, da die Abstrahlung mit R skaliert, die Konvektionsgeschwindigkeit dagegen mit $1/R^2$.

Im Allgemeinen sind natürlich auch beliebige Kombinationen der beiden genannten Grenzfälle denkbar.
Im Rahmen eines erweiterten Modells, welches die Möglichkeit $\partial_r T(r,z) \neq 0$ mit einschließt, wäre noch ein drittes Szenario vorstellbar: Mäßig ionisiertes Plasma gelangt über den hinlänglich diskutierten Mechanismus ins Innere der Flussröhre und erfährt dort eine Abkühlung auf eine Temperatur, die eine Rekombination der Form[11]

$$A^+ + e^- \rightarrow A + \gamma$$

erzwingt. Die entstehenden Neutralteilchen wären in ihrer Bewegung nicht mehr durch das B–Feld eingeschränkt und könnten die Flussröhre an einer weiter oben gelegenen Stelle ungehindert wieder verlassen. Um diesen Effekt angemessen beschreiben zu können, wäre es allerdings zusätzlich notwendig, den Übergang vom Ein– auf das Zweikomponentenmodell zu vollziehen; diese Perspektive soll im folgenden Abschnitt noch etwas beleuchtet werden.

6.4 Zwei–Komponenten–Modelle

Sämtliche im bisherigen Verlauf dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen bedienten sich der *Magnetohydrodynamischen Approximation*, bestehend aus

[10] Abbildung 4.13 zeigt exakt dieses Situation.

[11] A bezeichnet ein allgemeines Atom (hier meist Wasserstoff), γ das bei der Rekombination emittierte Photon.

- der Vernachlässigung des Verschiebestroms $\partial_t \mathbf{E}/c^2$ in (3.5)[12],
- der nichtrelativistischen Form (3.11) des Ohm'schen Gesetzes und
- der Annahme, dass das aus Elektronen, Ionen und Neutralteilchen bestehende Plasma als ein *einziges* Fluid beschrieben werden kann.

Obgleich sich dieser Ansatz in einer Vielzahl von Untersuchungen bewährt hat, liefert er in Situationen wie der im letzten Abschnitt Skizzierten, in denen einzelne Fluidelemente im Verlaufe ihrer Bewegung eine signifikante Änderung ihres Ionisationsgrades erfahren, nur eine grobe, unter Umständen sogar inadäquate Beschreibung der tatsächlich ablaufenden physikalischen Prozesse. Als Alternative bietet sich hier die Erweiterung auf eine Zwei–Komponenten–Beschreibung an, bei der Ionen und Neutralteilchen als zwei koexistierende Fluide betrachtet werden, die jeweils durch ihre Massedichten $[\rho_\mathrm{i}(\mathbf{x},t), \rho_\mathrm{n}(\mathbf{x},t)]$ und Geschwindigkeiten $[\mathbf{v}_\mathrm{i}(\mathbf{x},t), \mathbf{v}_\mathrm{n}(\mathbf{x},t)]$ charakterisiert sind.[13] Dementsprechend bedarf es für jede Spezies einer separaten Impulsgleichung

$$\mathbf{0} = -\nabla P_\mathrm{p} + \rho_\mathrm{p}\ \mathbf{g} - \mathbf{S}_\mathrm{pn} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{6.17}$$

$$\mathbf{0} = -\nabla P_\mathrm{n} + \rho_\mathrm{n}\ \mathbf{g} - \mathbf{S}_\mathrm{np}\ , \tag{6.18}$$

hingegen für beide nur einer *einzigen* gemeinsamen Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \Big(\rho_\mathrm{p}\ \mathbf{v}_\mathrm{p} + \rho_\mathrm{n}\ \mathbf{v}_\mathrm{n}\Big) = 0\ , \tag{6.19}$$

[12]Wegen der in 4.1.3 vorausgesetzten Stationarität wird diese Aussage allerdings an keiner Stelle explizit verwandt.

[13]Strenggenommen könnte man noch daran denken, die Elektronen als dritte Komponente hinzuzunehmen. Die Bedingung (4.41) stellt allerdings $n_\mathrm{e} \approx n_\mathrm{i}$ und damit

$$\frac{\rho_\mathrm{e}}{\rho_\mathrm{i}} = \frac{n_\mathrm{e}\ m_\mathrm{e}}{n_\mathrm{i}\ m_\mathrm{i}} \approx \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i}} \approx \frac{1}{1800} \ll 1 \tag{6.13}$$

sicher. Aus diesem Grund ist es zulässig, Elektronen– und Ionenfluid gemäß

$$n_\mathrm{p} := n_\mathrm{e} + n_\mathrm{i} \approx 2\ n_\mathrm{i} \tag{6.14}$$

$$\rho_\mathrm{p} := \rho_\mathrm{e} + \rho_\mathrm{i} = \rho_\mathrm{i}\left(1 + \frac{\rho_\mathrm{e}}{\rho_\mathrm{i}}\right) \approx \rho_\mathrm{i} \tag{6.15}$$

$$\mathbf{v}_\mathrm{p} := \frac{1}{\rho_\mathrm{p}}\Big(\rho_\mathrm{e}\ \mathbf{v}_\mathrm{e} + \rho_\mathrm{i}\ \mathbf{v}_\mathrm{i}\Big) = \mathbf{v}_\mathrm{i} + \frac{\rho_\mathrm{e}}{\rho_\mathrm{e} + \rho_\mathrm{i}}\ \underbrace{\Big(\mathbf{v}_\mathrm{e} - \mathbf{v}_\mathrm{i}\Big)}_{\approx\, \mathbf{j}/(e\ n_\mathrm{i})} \tag{6.16}$$

zum *Plasmafluid* zusammenzufassen.

da bei Ionisation und Rekombination nur die *Summe* $(n_\mathrm{i}+n_\mathrm{n})$ erhalten bleibt. Die beiden zusätzlichen Terme $\mathbf{S}_\mathrm{pn}$ und $\mathbf{S}_\mathrm{np}$ beschreiben den Impulsübertrag durch elastische Stöße zwischen den beiden Teilchensorten. Die in [7] gegebene explizite Form dieser Stoßterme lautet

$$\mathbf{S}_\mathrm{np} = n_\mathrm{n}\, m_\mathrm{ne}\, \nu_\mathrm{ne}\, (\mathbf{v}_\mathrm{n} - \mathbf{v}_\mathrm{e}) + n_\mathrm{n}\, m_\mathrm{ni}\, \nu_\mathrm{ni}\, (\mathbf{v}_\mathrm{n} - \mathbf{v}_\mathrm{i}) \tag{6.20}$$

$$\mathbf{S}_\mathrm{pn} = -\mathbf{S}_\mathrm{np} \tag{6.21}$$

mit den reduzierten Teilchenmassen

$$m_\mathrm{ne} := \frac{m_\mathrm{n}\, m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{n} + m_\mathrm{e}} \approx m_\mathrm{e} \tag{6.22}$$

$$m_\mathrm{ni} := \frac{m_\mathrm{n}\, m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{n} + m_\mathrm{i}} \approx \frac{m_\mathrm{n}}{2} \approx \frac{m_\mathrm{i}}{2}\ . \tag{6.23}$$

Wegen der Symmetriebedingung (6.21) kann durch Addition von (6.17) und (6.18) die Impulsbilanz in ihrer bisher verwandten Form zurückgewonnen werden:

$$\mathbf{0} = -\nabla(\underbrace{P_\mathrm{p} + P_\mathrm{n}}_{=P}) + (\underbrace{\rho_\mathrm{p} + \rho_\mathrm{n}}_{=\rho})\, \mathbf{g} - (\underbrace{\mathbf{S}_\mathrm{np} + \mathbf{S}_\mathrm{pn}}_{=0}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B}\ . \tag{6.24}$$

Für die mittleren Impulsübertrag–Stoßfrequenzen ν_ne und ν_ni nennt Schunk [10] als typische Werte

$$\nu_\mathrm{en} \approx (10^{-17}\ \mathrm{s}^{-1}) \left(\frac{n_\mathrm{n}}{\mathrm{m}^{-3}}\right) \left(\frac{T_\mathrm{e}}{\mathrm{K}}\right)^{1/2} \tag{6.25}$$

$$\nu_\mathrm{in} \approx (10^{-17}\ \mathrm{s}^{-1}) \left(\frac{n_\mathrm{n}}{\mathrm{m}^{-3}}\right) \left(\frac{T_\mathrm{i}/\mathrm{K} + T_\mathrm{n}/\mathrm{K}}{2}\right)^{1/2}\ , \tag{6.26}$$

woraus wegen

$$n_\mathrm{i}\, \nu_\mathrm{in} = n_\mathrm{n}\, \nu_\mathrm{ni} \tag{6.27}$$

alle benötigten Stoßfrequenzen ermittelt werden können. (Insbesondere gilt $\nu_\mathrm{en} \approx \nu_\mathrm{in}$ also für den Fall, dass alle Komponenten {n, e, i} die gleiche — oder zumindest vergleichbare — Temperaturen haben.[14])

[14] Die Annahme $T_\mathrm{n} = T_\mathrm{e} = T_\mathrm{i} =: T$ ist physikalisch nur schwer zu rechtfertigen und damit — ähnlich wie die zuerst verwandte Setzung $\partial_r T \stackrel{!}{=} 0$ — eher unter einem pragmatischen Gesichtspunkt zu sehen, da eine Umscheibung der Form $T_\mathrm{p} = T_\mathrm{p}(T_\mathrm{e}, T_\mathrm{i})$ nicht ohne tiefgreifende Einschränkungen durchführbar ist. Dennoch ist das Zwei–Komponenten–Modell mit gleichen Temperaturen dem Ein–Komponenten–Modell in seiner physikalischen Aussagekraft immer noch deutlich überlegen.

Schließlich ist im Ohm'schen Gesetz (4.12) noch $\mathbf{v}$ durch $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ zu ersetzen; ein entsprechendes Analogon für $\mathbf{v}_\mathrm{n}$ existiert offenbar nicht, da die Neutralteilchen nicht an der durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ vermittelten elektromagnetischen Wechselwirkung teilnehmen.
Der Satz der zu bestimmenden Größen umfasst nun die Funktionen

$$\{\mathbf{v}_\mathrm{p}, \mathbf{v}_\mathrm{n}, \rho_\mathrm{p}, \rho_\mathrm{n}, \mathbf{B}, \eta, T, P_\mathrm{n}, P_\mathrm{p}\} \ ,$$

die im Allgemeinen sowohl von r als auch von z abhängen werden. Aus diesem Grund kann für Profile von $T(z)$ und $\rho(z)$, wie sie für die ruhige Sonne aus Modellrechnungen (z.B. dem *VAL–Modell* aus 4.4) bekannt sind, keine globale Gültigkeit mehr gefordert werden. Sie sind lediglich verwendbar, um für die nun selbstkonsistent berechneten Funktionen $T(r, z)$ und $\rho(r, z)$ geeignete Randwerte bei großem r zu liefern. Ebenso kann etwa ein B_z–Profil nur eine Randbedingung an einem speziellen Ort, etwa $z = 0$ sein, und deshalb nur bedingt zu Aussagen über das (nun mit z variable) Magnetfeld genutzt werden.
Bei der Berechung wird es notwendig sein, das Gleichungssystem durch die Saha–Gleichung (4.43), eine Energiegleichung sowie die explizite Vorgabe je einer Zustandsgleichung, wie etwa der des idealen Gases

$$P_\mathrm{n} = \rho_\mathrm{n} \, k_\mathrm{B} \, T \tag{6.28}$$

$$P_\mathrm{p} = \rho_\mathrm{p} \, k_\mathrm{B} \, T \tag{6.29}$$

zu schließen.

Anhang A

Parität von $\mathcal{E}(x)$

Seien $[x_1, x_2, x_3]$ Koordinaten eines kartesischen Systems, so dass ihre Relation zu den bekannten Zylinderkoordinaten $[r, \phi, z]$ durch

$$x_1 = r \cos\phi \tag{A.1}$$

$$x_2 = r \sin\phi \tag{A.2}$$

$$x_3 = z \tag{A.3}$$

gegeben ist. Sei ferner $r \mapsto K(r)$ eine skalare Funktion, welche in ihrer Potenzreihendarstellung einen ungeraden Term der Form $k_n(r) := k_0\ r^n$ mit ungeradem n enthält. Die Richtungsableitung in $(\phi = 0)$–Richtung dieses Terms ist dann gegeben durch

$$\left.\frac{\partial k_n}{\partial r}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial k_n}{\partial x_1}\right|_{x_2=0} = k_0\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left.\Big((x_1)^2 + (x_2)^2\Big)^{n/2}\right|_{x_2=0} \tag{A.4}$$

$$= k_0\ \frac{n}{2}\left.\Big((x_1)^2 + (x_2)^2\Big)^{n/2-1} 2x_1\right|_{x_2=0} \tag{A.5}$$

$$= k_0\ n\ x_1\Big((x_1)^2\Big)^{n/2-1} \tag{A.6}$$

$$= k_0\ n\ \frac{|x_1|^n}{x_1}\ . \tag{A.7}$$

Für gerades n ist dies einfach $k_0\ n\ (x_1)^{n-1}$, und jede weitere Ableitung führt nur auf Polynome abnehmenden Grades und schließlich auf Null. Für ungerades n hingegen findet man nach n–fachem Differenzieren:

$$\left.\frac{\partial^n k_n}{\partial (x_1)^n}\right|_{x_2=0} = k_0\ n!\ \frac{|x_1|}{x_1} \propto \mathrm{sgn}\ x_1 = \begin{cases} +1 & : \quad x_1 > 0 \\ -1 & : \quad x_1 < 0 \end{cases}\ . \tag{A.8}$$

Skalare Funktionen dieser Art müssen also eine Darstellung der Form

$$K(r) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{2n}\ r^{2n} \tag{A.9}$$

besitzen und damit *gerade* Parität haben, andernfalls können sie im Ursprung nicht glatt[1] sein. Die Funktion $\mathcal{E}(x)$ aus Abschnitt 4.7.5.2 fällt in diese Kategorie.

[1] Gemeint ist unendlich oft differenzierbar.

Anhang B

$z \longmapsto R(z)$ bei poloidalem B–Feld

In Abschnitt 6.2 wurde dargelegt, dass die Verallgemeinerung der durchgeführten Betrachtungen auf den Fall $\partial_z R(z) \neq 0$ auf Systeme partieller Differentialgleichungen führt, deren Komplexität wenig Hoffnung auf eine fruchtbare analytische Bearbeitung lässt. Ist man allerdings bereit, den angestrebten Gewinn an Allgemeinheit an anderer Stelle durch die Einführung neuer, einschränkender Bedingungen auszugleichen, so scheint sich in einigen Fällen ein mit vertretbarem Aufwand gangbarer Weg aufzutun.
Als Beispiel hierfür gehen wir vom in 6.2 betrachteten Magnetfeld (6.10)

$$\Big(B_r, B_\phi, B_z\Big) = B_0 \left(r \frac{R'(z)}{R(z)} \frac{(R_0)^2}{R(z)^2 + r^2}, \frac{B_\phi(r,z)}{B_0}, \frac{(R_0)^2}{R(z)^2 + r^2} \right) \tag{B.1}$$

aus und geben als willkürliche Bedingung die Forderung

$$B_\phi(r,z) \equiv 0 \tag{B.2}$$

vor.
Durch Anwenden des Operators $\nabla\times$ auf die Impulsbilanz (4.11) findet man sofort

$$\mathbf{0} = \nabla \times \Big((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \Big) \; ; \tag{B.3}$$

anschließendes Einsetzen von (B.1) und (B.2) in (B.3) führt mit der Substitution

$$u(z) := \frac{1}{R(z)} \tag{B.4}$$

auf den folgenden, zunächst etwas unhandlich wirkenden Ausdruck für die ϕ–Komponente[1] von Gleichung (B.3):

$$0 = (B_0)^2 (R_0)^4 \frac{r\ u^2}{\left(1 + (r\ u)^2\right)^3} \left[r^2 \left(u^2 u' u'' - u^3 u''' \right) + \left(8u^3 u' - u u''' - 3u' u'' \right) \right] \tag{B.5}$$

Im Sinne einer kompakten und übersichtlichen Notation wurde jeweils

$$u' := \partial_z u(z),\ u'' := \partial_z [\partial_z u(z)],\ \ldots \tag{B.6}$$

gesetzt.
Da Gleichung (B.5) für alle r gilt, müssen die Koeffizienten von r^2 und r^0 in den eckigen Klammern für sich genommen identisch verschwinden, so dass nach Elimination von u''' nur noch

$$u'(u^3 - 2u'') = 0 \tag{B.7}$$

übrigbleibt. Ein erstes Integral von (B.7) ist durch

$$(u')^2 - \frac{u^4}{4} = C = \text{konst.} \tag{B.8}$$

gegeben, und die zur Anfangsbedingung $u(0) = u_0 \equiv 1/R_0$ gehörige Lösung kann somit in der impliziten Form

$$z = \pm \int_{u_0}^{u(z)} \frac{du}{\sqrt{C + u^4/4}} \tag{B.9}$$

geschrieben werden. Speziell für $C = 0$ findet man:

$$R(z)|_{C=0} \equiv \frac{1}{u(z)|_{C=0}} = \frac{1 \pm (z\ u_0)/2}{u_0} = R_0 \pm \frac{z}{2}\ . \tag{B.10}$$

[1] Da **B** poloidal ist, ist nur diese von Null verschieden.

Literaturverzeichnis

[1] E. Priest: "Solar Magnetohydrodynamics", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1982

[2] L. Golub & J. Pasachoff: "The Solar Corona", Cambridge University Press, Cambridge 1997

[3] M. Stix: "The Sun", A&A Library, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1989

[4] R. Kippenhahn & A. Weigert: "Stellar Structure and Evolution", A&A Library, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1990

[5] R. Kippenhahn & C. Möllenhoff: "Elementare Plasmaphysik", BI Wissenschaftsverlag, Zürich 1975

[6] W. Kegel: "Plasmaphysik", Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1998

[7] M. Mitchner & C. Kruger: "Partially Ionized Gases", John Wiley & Sons, New York 1973

[8] H. Scheffler: Kapitel 2 in "Bergmann · Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 8: Sterne und Weltraum", W. de Gruyter, Berlin New York 1997

[9] A. Title: "Magnetic fields below, on and above the solar surface", in: Philosophical Transactions of the Royal Society, Volume 358, London 2000

[10] R. Schunk, Solar–Terrestrial Physics, 609-676 (1983), D. Reidel Publishing Company

[11] M. Sigwarth, K. Balasubramaniam, M. Knölker & W. Schmidt: "Dynamics of solar magnetic elements", in: Astronomy and Astrophysics **349**, 941-955 (1999)

[12] J. Klimchuk: "Cross–Sectional Properties of Coronal Loops", Preprint[2], eingereicht zu Solar Physics (1999)

[13] J. Watko & J. Klimchuk: "Width Variations Along Coronal Loops Observed by TRACE", Preprint, eingereicht zu Solar Physics (1999)

[14] J. Klimchuk, S. Antiochos & D. Norton: "Twisted Coronal Magnetic Loops", Preprint, eingereicht zu Astrophysical Journal (2000)

[2] Die Referenzen [12] bis [14] waren zur Zeit der Drucklegung *online* verfügbar unter `http://solartheory.nrl.navy.mil/SPTP+theory/theory_bibliography.html`.

Danksagung

Mein vornehmlicher Dank gilt Prof. Dr. Reinhard Schlickeiser für die Bereitstellung des Themas und die Möglichkeit, an diesem Lehrstuhl zu diplomieren.
Dr. Gunnar Hornig schulde ich großen Dank für seine Hilfe bei zahllosen fachlichen Fragen, für seine stete Diskussionsbereitschaft und sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit. Ihm verdanke ich das Verständnis vieler interssanter physikalischer Zusammenhänge.
Claudia Schuster möchte ich für das angenehme "Raumklima" und die reibungslose Kooperation beim Postdienst danken.
Ich danke Bernd Neubacher für die Bewältigung diverser Computerprobleme und Angelika Schmitz für ihre hilfsbereite und freundliche Art, sowie für die orthographische Durchsicht der Arbeit.
Dr. Vahe Petrosian danke ich für seine wertvollen Literatur–Hinweise die Beobachtung von *coronal loops* betreffend.
Olaf Stawicki unterstütze mich mit zahlreichen Hinweisen zu LaTeXund `Xfig`.
Ferner bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Theoretische Weltraum– und Astrophysik für die ausgesprochen angenehme Arbeitsatmosphäre.
Ganz besonders möchte ich meinen Eltern Bernhard und Lore Kleimann danken, die mich stets ermutigten, meinen Interessen zu folgen und die mir dieses Studium ermöglicht haben. Der familiäre Rückhalt, den ich durch sie erfahren durfte, war und ist von größtem Wert für mich.