Der Blandford-Znajek-Prozess

Der Blandford-Znajek-Prozess beschreibt eine Möglichkeit der Extraktion von Rotationsenergie eines rotierenden Schwarzen Lochs über elektromagnetische Wechselwirkungen in der Ergosphäre, m. a. W., über Frame-Dragging-getriebene elektromagnetische Wechselwirkungen, z.B. bei der Akkretion auf supermassive, rotierende Schwarze Löcher. Dieser Prozess spielt eine zentrale Rolle in der Erzeugung der extragalaktischen Jets von AGN. Mit diesem Übungszettel sollen Ihnen die Grundlagen des Blandford-Znajek-Prozesses vermittelt werden.

Aufgabe 1: Kerr-Geometrie [10 Punkte]

In der zur Beschreibung eines rotierenden Schwarzen Lochs verwendeten Kerr-Geometrie lautet das Linienelement in Boyer-Lindquist-Koordinaten $\{t, r, \theta, \phi\}$ im geometrischen Einheitensystem $(c = 1, G = 1)$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{4Mar\sin^2(\theta)}{\Sigma}dtd\phi - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{A\sin^2(\theta)}{\Sigma}d\phi^2,$$

wobei M die Masse und $a = J/M$ der Drehimpuls pro Masse des Schwarzen Lochs ist und $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2(\theta)$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ und $A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)$.

Bestimmen Sie (auf analytischem Weg von Hand) den symmetrischen, metrischen $(0,2)$-Tensor $(g_{\mu\nu})$ und die korrespondierende $(2,0)$-Darstellung $(g^{\mu\nu})$. Zeigen Sie weiter, dass die Determinante $\det(g_{\mu\nu}) = -\Sigma^2\sin^2(\theta)$ ist.

Bemerkung: Es ist Konvention, dass griechische Indizes $\mu, \nu, ...$ Indexwerte aus der Menge $\{0,1,2,3\}$ besitzen, wohingegen lateinische Indizes $i, j, ...$ Indexwerte aus der Menge $\{1,2,3\}$ annehmen. Diese Unterscheidung wird in den folgenden beiden Aufgaben zum Tragen kommen.

Aufgabe 2: Kräftefreie Magnetosphäre [13 Punkte]

Bei einem AGN bildet sich um das supermassive, rotierende Schwarze Loch (welches durch die Geometrie aus Aufgabe 1 beschrieben wird) eine magnetisierte, rotierende Akkretionsscheibe aus. Die zentralen Gleichungen der dazugehörigen Magnetosphäre werden in dieser Aufgabe diskutiert.

(a) Zeigen Sie, dass für eine kräftefreie Magnetosphäre im Allgemeinen die Beziehung $F_{\mu\nu}J^\nu = 0$ gilt.

Bemerkung: Es gelten die folgenden Definitionen für die Komponenten des Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ bzw. $F_{i0} = E_i$ und $F_{ij} = \varepsilon_{ijk}B^k$. Für den Vierer-Strom gilt $(J^\mu) = (\rho, J^i)$. Dabei ist $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\tau{}_{\nu\mu}A_\tau$ die kovariante Ableitung angewandt auf eine Komponente des Vierer-Potentials und $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda})/2$ bezeichnet ein Christoffel-Symbol zweiter Art in Koordinaten-Darstellung.

(b) Formulieren Sie die vier Gleichungen aus Teil (a) im Boyer-Lindquist-System.

Hinweis: Die Boyer-Lindquist-Koordinaten $\{r, \theta, \phi\}$ hängen über die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned}$$

mit den kartesischen Koordinaten $\{x, y, z\}$ zusammen.

(c) Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu / \varepsilon_0$ können in simplifizierter Form über die partiellen Ableitungen des Vierer-Vektorpotentials A_μ und über die metrische Determinante $\det(g_{\mu\nu})$ ausgedrückt werden. Zeigen Sie dazu zuerst, dass die folgende Beziehung gilt

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}} \partial_\nu \left(\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} F^{\mu\nu} \right).$$

Konstruieren Sie damit die oben beschriebene Darstellung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen auf einer Kerr-Raumzeit in Boyer-Lindquist-Koordinaten.

Hinweis: Es existiert eine Beziehung zwischen der Spur und dem Logarithmus derart $\partial_\beta (\ln[|\det(g_{\mu\nu})|]) = \mathrm{Tr}(g^{\mu\nu} \partial_\beta g_{\nu\alpha})$. Des Weiteren gilt die metrische Kompatibilität $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$.

Aufgabe 3: Energieextraktion durch Frame-Dragging [7 Punkte]

Bestimmen Sie den ausfließenden Strom

$$I = 2 \iint_H J^i d\Omega_i$$

über beide Hemisphären, unter Zuhilfenahme der Resultate aus Aufgabe 2 (a) und der Gleichungen

$$\frac{\Sigma}{\varepsilon_0} J^t = \partial_r \left(\frac{1}{\Sigma} \left[A \partial_r A_t + 2Mar \partial_r A_\phi \right] \right) + \frac{1}{\Delta \sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{\sin(\theta)}{\Sigma} \left[A \partial_\theta A_t + 2Mar \partial_\theta A_\phi \right] \right)$$

$$\frac{\Sigma}{\varepsilon_0} J^r = \frac{\Delta}{\sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{\sin(\theta)}{\Sigma} B^\phi \right)$$

$$\frac{\Sigma}{\varepsilon_0} J^\theta = -\partial_r \left(\frac{\Delta}{\Sigma} B^\phi \right)$$

$$\frac{\Sigma}{\varepsilon_0} J^\phi = \partial_r \left(\frac{1}{\Sigma} \left[2Mar\partial_r A_t + \frac{2Mr - \Sigma}{\sin^2(\theta)} \partial_r A_\phi \right] \right) + \frac{1}{\Delta \sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{\sin(\theta)}{\Sigma} \left[2Mar\partial_\theta A_t + \frac{2Mr - \Sigma}{\sin^2(\theta)} \partial_\theta A_\phi \right] \right),$$

für einen Beobachter im Unendlichen. Dabei werden die Komponenten der Flächenform mit Ω_i bezeichnet. Zeigen Sie, dass für den ausfließenden Strom gilt

$$I = 4\pi\varepsilon_0 \int \lambda(r,\theta) dA_{\phi}{}_{|\theta=\pi/2} .$$

Hierbei ist $\lambda(r,\theta)$ eine noch unbestimmte Funktion von r und θ. Zeigen Sie weiterhin, dass es sich bei diesem Strom um einen Frame-Dragging-Effekt handelt.

Bemerkung: Es genügt, anstelle der exakten mathematischen Berechnung, über physikalische Argumente zu zeigen, weshalb der Blandford-Znajek-Prozess durch Frame-Dragging erzeugt wird.