Aufgabe 7: Teilchenspallation [10 Punkte]

Die Differentialgleichung für Teilchenspallation lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial t} &= -\frac{n_x}{\tau_x} + \frac{P_{y\to x}}{\tau_y} n_y, \\ \frac{\partial n_y}{\partial t} &= -\frac{n_y}{\tau_y}, \end{aligned}$$

wobei n_i für die Anzahldichte der Teilchensorten i, τ_i die mittlere Lebensdauer eines Teilchens der Sorte i und $P_{y\to x}$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Spallation eines Teilchens der Sorte y ein Teilchen der Sorte x entsteht, ist.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichungen allgemein.

(b) Seien für zwei hypothetische Teilchensorten die mittleren Lebensdauern $\tau_x = 123.3\,\mathrm{yr}$, $\tau_y = 20.2\,\mathrm{yr}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Spallation eines Teilchens der Sorte y ein Teilchen der Sorte x entsteht, $P_{y\to x} = 1.6\%$. Wie groß ist dann das Verhältnis von n_x zu n_y nach jeweils $50\,\mathrm{yr}$ und $200\,\mathrm{yr}$?
Hinweis: Sollten Sie beim Lösen der Differentialgleichung ein unbestimmtes Integral erhalten, so wählen Sie den Startzeitpunkt zu $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, um die Integrationskonstante in Ihrer Lösung zu bestimmen.

Aufgabe 8: Der elektrische Feldstärketensor [10 Punkte]

Analog zum Vierervektor-Formalismus zur Beschreibung der Raumzeit ist der elektrische Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ definiert, um die Elektrodynamik auf die Raumzeit zu verallgemeinern. In einer flachen Raumzeit lässt sich der Feldstärketensor in kartesischen Koordinaten schreiben als:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnen E_i und B_i das elektrische bzw. magnetische Feld im dreidimensionalen Raum und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

(a) Weisen Sie nach, dass sich folgendes Lorentz-invariantes Skalar ergibt:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\left(B^2 - E^2/c^2\right). \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie, wie sich das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ bei einer Rotation des Koordinatensystems um die y-Achse um den Winkel α transformieren, indem Sie die zugehörige Koordinatentransformation im Vierervektor-Formalismus auf den Feldstärketensor anwenden.

(c) Bestimmen Sie, wie sich das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ bei einem Lorentzboost des Koordinatensystems mit Boostfaktor γ entlang der z-Achse transformieren, indem Sie die zugehörige Koordinatentransformation im Vierervektor-Formalismus auf den Feldstärketensor anwenden.

Aufgabe 9: Der Compton-Getting-Effekt [10 Punkte]

Unter der Annahme, dass die kosmische Strahlung in einem bestimmten Ruhesystem isotrop ist, versuchten Compton und Getting, die beobachtete Anisotropie der kosmischen Strahlung analog zur Idee beim Michelson-Morley-Experiment zu erklären. Da die Erde um die Sonne rotiert, sollte die Intensität der kosmischen Strahlung aus der Richtung, in die die Erde sich bewegt, größer sein als aus der Gegenrichtung. Sie berechneten die durch eine solche Bewegung mit Bahngeschwindigkeit $\vec{u}$ die verursachte scheinbare Anisotropie. In dieser Aufgabe soll diese Rechnung nachvollzogen werden. Ungestrichene Größen bezeichnen dabei Größen in einem Ruhesystem, in dem die kosmische Strahlung isotrop ist; gestrichene Größen bezeichnen Größen im Ruhesystem der Erde, in dem die Anisotropie beobachtet wird.

(a) Die Phasenraumverteilungsfunktion $f(\vec{r},\vec{p})$ der kosmischen Strahlung in demjenigen Ruhesystem, in dem f isotrop ist, lässt sich mittels einer Taylor-Entwicklung um den kleinen Parameter (d.h. $u \ll 1$) $\vec{p}-\vec{p}\,' = -p\vec{u}$ in das Ruhesystem der Erde transformieren. Dabei ist p der Betrag des Impulses $\vec{p}$ und $\vec{u}$ die (dimensionslose) Bahngeschwindigkeit der Erde in Einheiten der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Zeigen Sie, dass sich bei Taylorentwicklung folgende Relation ergibt:

$$f'(\vec{p}\,') = f(\vec{p}\,') - p\vec{u}\cdot\frac{\partial f(\vec{p}\,')}{\partial \vec{p}\,'} + \mathcal{O}(u^2) = f(\vec{p}\,')\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{p}}{p}\,\frac{\mathrm{d}\ln(f(p'))}{\mathrm{d}\ln(p')}\right).$$

Nehmen Sie dazu an, dass $f(\vec{p}\,')$ total differenzierbar ist, um die Richtungsableitung $\frac{\partial f(\vec{p}\,')}{\partial \vec{p}\,'}$ zu vereinfachen. Machen Sie sich außerdem klar, was es mathematisch bedeutet, dass f isotrop ist.

(b) Gehen Sie nun zur differentiellen Intensität $I(E) = p^2 f(p)$ über. Zeigen Sie, dass aus dem Ergebnis von Teil (a) folgt:

$$I'(E') \approx I(E')\cdot\left[1 + \left(2 - \frac{\mathrm{d}\ln(I(E'))}{\mathrm{d}\ln(E')}\right)\frac{\vec{u}\cdot\vec{p}}{p}\right]$$

Hinweis: Eine geschickte Nulladdition in Kombination mit der Produktregel könnte sich als hilfreich erweisen.

(c) Da der Betrag u der Bahngeschwindigkeit der Erde klein ist, wird die verursachte scheinbare Anisotropie durch das kleinste Moment, also das Dipolmoment, dominiert. Die Dipolanisotropie des Compton-Getting-Effekts ist definiert als:

$$\delta_{\mathrm{CG}} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Zeigen Sie, dass sich mit dem Ergebnis aus Teil (b) ergibt:

$$\delta_{\mathrm{CG}} = \left(2 - \frac{\mathrm{d}\ln(I(E'))}{\mathrm{d}\ln(E')}\right)u.$$

Rechnen Sie nach, dass die maximale Anisotropie δ_{CG} durch den Compton-Getting-Effekt knapp unter 0.4 % beträgt. Nutzen Sie dazu die Bahngeschwindigkeit der Erde von $u = 220$ km/s und verwenden Sie für die Intensität der kosmischen Strahlung $I(E') \propto E'^{-2.7}$.