

Übung Astroteilchenphysik

Prof. Dr. Julia Tjus

Übungen: Matthias Mandelartz, Florian Schuppan (NB 7/172)

Seminarbetreuung: Matthias Mandelartz, Florian Schuppan (NB 7/172)

WS 12/13

Übungsblatt II

Abgabe: 13.11.2012

Aufgabe 4: Senkrechte Schocks [15 Punkte]

In dieser Aufgabe werden die Rankine-Hugoniot Schockbedingungen für *senkrechte Schocks* untersucht. Wenn man die Magnetfelder der upstream und downstream Regionen sowie die Geschwindigkeiten in den Regionen in einen transversalen (parallel zur Schockfront) und einen normalen Anteil (entlang der Schockausbreitungsrichtung) aufspaltet, so findet man mittels der MHD und den Maxwell-Gleichungen die so genannten Rankine-Hugoniot Schockbedingungen:

$$\begin{aligned}\rho_u u_{nu}^2 + p_u + \frac{B_{tu}^2}{2\mu_0} &= \rho_d u_{nd}^2 + p_d + \frac{B_{td}^2}{2\mu_0} \\ \rho_u u_{nu} \vec{u}_{tu} - \frac{B_{nu}}{\mu_0} \vec{B}_{tu} &= \rho_d u_{nd} \vec{u}_{td} - \frac{B_{nd}}{\mu_0} \vec{B}_{td} \\ \rho_u u_{nu} \left(\frac{u_u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_u}{\rho_u} \right) + u_{nu} \frac{B_u^2}{\mu_0} - \vec{u}_u \cdot \vec{B}_u \frac{B_{nu}}{\mu_0} &= \rho_d u_{nd} \left(\frac{u_d^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_d}{\rho_d} \right) + u_{nd} \frac{B_d^2}{\mu_0} - \vec{u}_d \cdot \vec{B}_d \frac{B_{nd}}{\mu_0} \\ B_{nu} &= B_{nd} \\ u_{nu} \vec{B}_{tu} - B_{nu} \vec{u}_{tu} &= u_{nd} \vec{B}_{td} - B_{nd} \vec{u}_{td}\end{aligned}$$

Der Index u ist für die upstream Region, der Index d für die downstream Region und die Indizes n und t stehen für jeweils den normalen bzw. transversalen Anteil des Vektors. Hier ist ρ die Dichte, u beschreibt eine Geschwindigkeit, B das Magnetfeld und p den Druck.

Für senkrechte Schocks gilt $B_n = 0$, das Magnetfeld steht also *senkrecht* zum Schocknormalenvektor \vec{n} . Daraus folgt direkt, dass $\vec{B}_u = \vec{B}_{tu}$. Weiterhin sollte die Strömungsgeschwindigkeit in der upstream Region parallel zum Schock sein, also $\vec{u}_u = u_{nu} \vec{n}$. Es gelte $\rho_u u_{nu} \neq 0$, damit nur Lösungen aus den Schockrelationen folgen, welche tatsächlich Schocks beschreiben. Das Kompressionsverhältnis r soll definiert sein als:

$$r = \frac{\rho_d}{\rho_u}.$$

- (a) Folgern Sie aus den Bedingungen, dass die transversalen Geschwindigkeiten $u_{tu} = u_{td} = 0$ sind.
(b) Zeigen Sie folgende Relationen unter der Annahme, dass das Schocksystem abgeschlossen ist:

$$\frac{u_d}{u_u} = r^{-1}, \quad \frac{B_d}{B_u} = r.$$

- (c) Zeigen Sie, dass sich folgende Gleichung für das Kompressionsverhältnis ergibt:

$$(r-1) \left(r^2 \frac{2-\gamma}{M_A^2} + r \left[\frac{\gamma}{M_A^2} + \frac{2}{M_{c_s}^2} + \gamma - 1 \right] - \gamma - 1 \right) = 0.$$

Hier ist $M_A = u_u B_u^{-1} \sqrt{\mu_0 \rho_u}$ die Alfvén-Machzahl und $M_{c_s} = u_u \sqrt{\rho_u (\gamma p_u)^{-1}}$ die Schallgeschwindigkeits-Machzahl für das upstream Medium.

Hinweis: Schreiben Sie zwei geschickt gewählte Schockbedingungen mittels der Kompressionsverhältnisrelationen um. Eliminieren Sie anschließend den downstream Druck p_d .

- (d) Wie verhält sich das Kompressionsverhältnis im Fall hoher Machzahlen ($M_A \gg 1, M_{c_s} \gg 1$)?

Übung Astroteilchenphysik

Prof. Dr. Julia Tjus

Übungen: Matthias Mandelartz, Florian Schuppan (NB 7/172)

Seminarbetreuung: Matthias Mandelartz, Florian Schuppan (NB 7/172)

WS 12/13

Übungsblatt II

Abgabe: 13.11.2012

Aufgabe 5: Koplanarität der Magnetfelder [10 Punkte]

Komprimierte schiefe Schocks haben die nützliche Eigenschaft, dass die Richtungen der upstream und downstream Felder sowie der Schocknormalenvektor \vec{n} in der selben Ebene liegen. Um zu zeigen, dass dieses der Fall ist, gehen Sie wie folgt vor:

- Zeigen Sie, dass $u_{nu}\vec{B}_{tu} - u_{nd}\vec{B}_{td} \parallel \vec{u}_{tu} - \vec{u}_{td}$ und $\vec{B}_{tu} - \vec{B}_{td} \parallel \vec{u}_{tu} - \vec{u}_{td}$ ist.
- Zeigen Sie, mittels des Ergebnis aus (a), dass $\vec{B}_{tu} \parallel \vec{B}_{td}$ ist.
- Folgern Sie nun, dass $\vec{n} \cdot (\vec{B}_u \times \vec{B}_d) = 0$.

Hinweis: Benutzen Sie die Rankine-Hugoniot Schockbedingungen, um diese Aussagen zu belegen.

Aufgabe 6: Astrophysikalische Schocks [5 Punkte]

Die Schockfront eines Supernova-Überrests passiert den Satelliten *Julia's ATP Explorer*. Das Magnetometer an Bord des Satelliten registriert ein magnetisches upstream-Feld von $(63.6, -47.2, 8.3) \mu\text{G}$ und ein magnetisches downstream-Feld von $(102.4, -93.8, 17.4) \mu\text{G}$.

Die Analyse des Plasmas ergibt eine upstream Geschwindigkeit von $(-378, 33.1, 19.9) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ und eine downstream Geschwindigkeit von $(-416.8, 7.3, 51.2) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Berechnen Sie die Orientierung des Normalenvektors mittels der Annahme, dass die Magnetfelder koplanar sind.
- Wenn die upstream Dichte 7.5 cm^{-3} und die downstream Dichte 11 cm^{-3} beträgt, mit welcher Geschwindigkeit breitet sich der Schock dann aus?
- Der Satellit ist darüber hinaus in der Lage, die Effizienz der Schockbeschleunigung zu 20% zu bestimmen und die Fluchtwahrscheinlichkeit aus dem Schock auf den selben Wert abzuschätzen. Wie sieht das differentielle Spektrum der kosmischen Strahlung, die dieser Supernova-Überrest beschleunigt, aus?