**Übungsblatt 9** [Ausgabe: 26.06.2012; Abgabe: 03.07.2012]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

## Aufgabe 22: Wärmekapazität (9 Punkte)

Die mit einer Temperaturänderung eines thermodynamischen Systems verbundene Änderung der Wärmemenge wird für isobare ($p = const.$) und isochore ($V = const.$) Prozesse mit

$$đQ = C_p \, \mathrm{d}T \quad \text{bzw.} \qquad = C_V \, \mathrm{d}T$$

angesetzt. Die Größen $C_p$ und $C_V$ sind die (absoluten) Wärmekapazitäten bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen.

(a) Zeigen Sie, dass allgemein gilt:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad \text{und} \quad C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p ,$$

wobei die Indizes die bei einem Prozess jeweils konstante Größe bezeichnen.

(b) Berechnen Sie nun mit den Beziehungen aus (a) $C_V$, $C_p$ und $\kappa = C_p/C_V$ für ein ideales Gas.

(c) Leiten Sie aus der Bedingung für adiabatische Prozesse $đQ = 0$ die Adiabatengleichungen

$$T^{3/2}V = const. \quad \text{und} \quad pV^{5/3} = const.$$

für ein ideales Gas her.

## Aufgabe 23: Vollständiges Differential (6 Punkte)

In der Thermodynamik wird meist mit Differentialformen gerechnet. Dabei begegnet man sowohl exakten (= integrablen) Differentialformen (z.B. Differentiale der thermodynamischen Potentiale) als auch nicht-exakten Differentialformen (z.B. die Wärmeform).
Überprüfen Sie folgende Differentialformen auf Integrabilität und geben Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion an:

(a) $\delta\omega_2 = x(1-y)\,\mathrm{d}x + (y + x^2)\,\mathrm{d}y$

(b) $\delta\omega_3 = \frac{\delta\omega_2}{(1-y)^3}$ [für $y < 1$]

**Aufgabe 24: van der Waals-Gas (15 Punkte)**

In der Vorlesung wurde die Entropie eines idealen Gases behandelt. Hier soll nun in mehreren Teilschritten die Entropie eines realen Gases bestimmt werden, welches der *van der Waals*'schen Zustandsgleichung genügt:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = N k_\mathrm{B} T \ \text{ mit } \ a, b = const.$$

(a) Zeigen Sie, dass allgemein die Gleichung

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

gilt.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

und Teilaufgabe (a), dass die Wärmekapazität bei konstantem Volumen $C_V$ für den Fall eines Gases, welches der Zustandsgleichung von *van der Waals* genügt, lediglich eine Funktion der Temperatur ist, also nicht vom Volumen abhängt.

(c) Berechnen Sie unter Verwendung von (a) und (b) aus

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T$$

die Entropie $S(V, T)$ eines realen *van der Waals*-Gases, wobei Sie zusätzlich die für kleine Temperaturunterschiede gültige Beziehung $C_V(T) \approx const.$ verwenden können.

(d) Wie unterscheidet sich die Entropie eines realen *van der Waals*-Gases von der Entropie eines idealen Gases?

(e) Es soll gezeigt werden, dass die Adiabatengleichung ($đQ = 0$) für ein Gas, welches der Zustandsgleichung von *van der Waals* genügt, durch

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{C_V}{N k_\mathrm{B}}} = \frac{V_0 - b}{V - b}$$

gegeben ist. Gehen Sie dazu von der Definition der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen aus und zeigen Sie, dass

$$C_V \,\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V$$

gilt. Die Adiabatengleichung erhalten Sie dann durch Integration dieser Relation. Verwenden Sie dazu die Näherung für kleine Temperaturunterschiede $C_V(T) \approx const.$

*Hinweis:* Nutzen Sie für Teilaufgabe (e) die Beziehung, die Sie in Aufgabe 2 der Anwesenheitsübung hergeleitet haben.