Übungsblatt 8 [AUSGABE: 19.06.2012; ABGABE: 26.06.2012]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 19: Informationsentropie (12 Punkte)

Die physikalische (diskrete) Informationsentropie ist als

$$S_\mathrm{d} = -k_\mathrm{B} \sum_{i=1}^{N} p_i \ln(p_i) \quad \text{mit} \quad k_\mathrm{B} = const.$$

definiert, wobei die Normierung $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Forderung $S_\mathrm{d} = S_\mathrm{d,max}$, also der nach maximaler Informationsentropie, der Ausdruck

$$p_i = \exp[\lambda/k_\mathrm{B} - 1]$$

folgt.
Hinweis: Bestimmen Sie die potentiellen Extremstellen der Nebenbedingungen mittels Lagrange-Multiplikatoren.

(b) Bestimmen Sie den Lagrange-Multiplikator λ und damit die p_i mittels Aufgabenteil (a) explizit. Welche Verteilung ergibt sich?

Aufgabe 20: Informationsgehalt und Informationsdefizit (9 Punkte)

(a) Ein Teilchen halte sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf einem der Felder eines Schachbretts auf. Geben Sie die zu gewinnende Information durch das Ermitteln des Aufenthaltsfeldes an. Als Maß für das Informationsdefizit, welches für die Lokalisierung des Teilchens überwunden werden muss, kann man

$$I = -k_\mathrm{B} \sum_{i} p_i \ln(p_i)$$

verwenden. Dabei ist p_i die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen auf Feld i liegt. Wieviele „Ja/Nein-Fragen“ sind mindestens erforderlich, um den Aufenthaltsort des Teilchens in jedem Fall eindeutig zu ermitteln?

(b) Geben Sie die zu gewinnende Information für den einmaligem Wurf eines idealen 12-seitigen Würfels an, wenn nach der geworfenen Augenzahl gefragt wird. Geben Sie ebenfalls den Mittelwert der erforderlichen „Ja/Nein-Fragen“ an, um eindeutig auf das Würfelergebnis schließen zu können.

(c) Siehe (b), aber bei gleichzeitigem Würfeln mit zwei idealen 6-seitigen Würfeln.

Aufgabe 21: Stirling-Formel (9 Punkte)

In der statistischen Physik treten häufiger Integrale der Form

$$I_N = \int \exp\left(-N f(x)\right) \mathrm{d}x \ ,$$

auf, wobei $N \gg 1$. In diesem Grenzfall wird das Integral von den Minima der Funktion $f(x)$ dominiert.
Angenommen, $f(x)$ habe ein einziges Minimum bei $x = x_0$, so erhält man nach der Substitution $x = x_0 + y/\sqrt{N}$ und Entwicklung in $1/N$ mit

$$I_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-N f(x_0)\right) \int \exp\left(-\frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} y^2 + \mathrm{O}\left(1/\sqrt{N}\right)\right) \mathrm{d}y$$

die sogenannte *Sattelpunktsnäherung* für I_N [engl. auch „steepest descent method“]. Ist das Minimum hinreichend scharf ausgeprägt, kann man im verbleibenden Integral über y als Integrationsbereich in guter Näherung stets die gesamte reelle Achse betrachten.

(a) Finden Sie mit Hilfe der Sattelpunktsmethode eine Näherung für

$$N! = \Gamma(N+1)$$

füre große N (Stirling-Formel).

(b) Schätzen Sie die Anzahl an Dezimalstellen der Zahl 1000!.
Hinweis: $\log_{10} \mathrm{e} \approx 0,434$.