Übungsblatt 7 [Ausgabe: 12.06.2012; Abgabe: 19.06.2012]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 16: Maxwell-Verteilung (14 Punkte)

In Anwesenheitsaufgabe 12 haben Sie bereits die makroskopischen Kenngrößen innere Energie U und Druck p für die Maxwell-Verteilung berechnet, indem Sie die Geschwindigkeitsmomente gebildet haben. Es sollen nun weiter Kenngrößen für die Maxwell-Verteilung

$$f_M(\mathbf{r},\mathbf{v}) = n(\mathbf{r})\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

berechnet werden. Dabei sind $\mathbf{r}$ und v die Phasenraumkoordinaten von Ort und Geschwindigkeit mit $v = |\mathbf{v}|$. Die Größen $n(\mathbf{r})$, m, k_B und T bezeichnen Teilchenzahldichte, Teilchenmasse, Boltzmann-Konstante und Temperatur.

a) Zeigen Sie, dass für die Teilchenzahldichte

$$n(\mathbf{r}) = \int f_M(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}^3v$$

gilt, wobei sich das Integral stets über den gesamten Geschwindigkeitsraum erstreckt.
Hinweis: Verwenden Sie sphärische Polarkoordinaten für $\mathbf{v}$. $\boxed{2\text{ P}}$

b) Berechnen Sie aus den Momenten

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n(\mathbf{r})}\int \mathbf{v} f_M(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}^3v \text{ und } p = \frac{m}{3}\int |\mathbf{v}|^2 f_M(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}^3v$$

die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ und den Druck p des Gases. $\boxed{4\text{ P}}$

c) Die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsbeträge v

$$h(v) = \frac{4\pi v^2}{n(\mathbf{r})} f_M(\mathbf{r},\mathbf{v})$$

kann als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, eine Geschwindigkeit im Intervall $[v, v + \mathrm{d}v]$ zu messen. Welches ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w? $\boxed{2\text{ P}}$

d) Der Mittelwert der Geschwindigkeit $\langle v\rangle$ und der Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrates $\langle v^2\rangle$ sind durch
$\langle v\rangle = \int_0^\infty vh(v)\mathrm{d}v$ und $\langle v^2\rangle = \int_0^\infty v^2h(v)\mathrm{d}v$
definiert. Berechnen Sie beide Größen. $\boxed{4\text{ P}}$

e) Welche der drei Geschwindigkeiten v_w, $\langle v\rangle$ und $\sqrt{\langle v^2\rangle}$ ist die kleinste, welche die größte? $\boxed{2\text{ P}}$

Bitte wenden! $\Longrightarrow$

Aufgabe 17: Die Kappa-Verteilung (8 Punkte)

Eine weitere Verteilungsfunktion ist die *Kappa-Verteilung*. Dies ist eine nicht thermische Verteilung welche die Geschwindigkeitsverteilung in hochenergetischen Plasmen besser wiedergibt als die Maxwell-Verteilung. Die Kappa-Verteilung ist gegeben durch

$$f_\kappa(v) = \frac{n_S}{\kappa}\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^3}\left[1 + \frac{mv^2}{2\kappa E_T}\right]^{-\kappa-1}$$

mit $\kappa > 3/2$ und n_S, $E_T = const. > 0$.

a) Was geschieht bei großen κ? Bestimmen Sie $\lim\limits_{\kappa\to\infty} f_\kappa(v)$. **3 P**

b) Bestimmen Sie den Mittelwert der Geschwindigkeit $\langle v\rangle$ als erstes Moment der Verteilung $\langle v\rangle = \int v f_\kappa(v)\mathrm{d}v$. **3 P**

c) Skizzieren Sie quantitativ $f_M(v)$ aus Aufgabe 16 und obiges $f_\kappa(v)$ im Bereich $v \in [-3, 3]$ für $\kappa = 2$ (welche Methode Sie wählen bleibt Ihnen überlassen). Der Einfachheit halber seien die Vorfaktoren beider Verteilungen 1 und des Weiteren sei $\frac{m}{2k_B T} = \frac{1}{v_t} = \alpha = 1[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}]$.
Wie unterscheiden sich beide Verteilungen? **2 P**

Aufgabe 18: Eine andere Verteilungsfunktion (8 Punkte)

Für ein Gas mit konstanter Teilchenzahl N und konstantem Volumen V sei die Verteilungsfunktion

$$f(\mathbf{v}) = f(v) = \frac{N}{V}\frac{\alpha}{[(v/v_t)^2 + 1]^3} \quad \text{mit } \alpha, v_t = const.$$

gegeben, wobei $\mathbf{v}$ die vektorielle Geschwindigkeit und v deren Betrag bezeichnen.

a) Bestimmen Sie α als Funktion von v_t aus der Bedingung $N = \iint f(v)\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3v$. **3 P**

b) Berechnen Sie aus der Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsbeträge

$$h(v) = \frac{4\pi v^2 V}{N} f(v)$$

den wahrscheinlichsten Geschwindigkeitsbetrag v_w. **3 P**

c) Warum ergibt sich das 4. Moment

$$M = \int v^4 f(v)\mathrm{d}^3v$$

der gegebenen Verteilung kein sinnvollen Wert? Was ist der Unterschied zum 4. Moment der Maxwell-Verteilung? **2 P**