Übungsblatt 5 [Ausgabe: 15.05.2012; Abgabe: 22.05.2012]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 12 Ehrenfest-Theorem (6 Punkte)

Zeigen Sie (mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung) die Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{d\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle}{dt} = -\langle\nabla V\rangle,$$

die als Theorem von Ehrenfest bekannt ist. Dabei bezeichnet $\langle ... \rangle$ den Erwartungswert, $\hat{\mathbf{p}} = \hbar/i\nabla$ den Impulsoperator und V ein Potential.
Hinweis: Nutzen Sie die komponentenweise Berechnung.

Aufgabe 13: Stationäre Schrödinger-Gleichung (14 Punkte)

Betrachten Sie folgendes eindimensionale Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le a \\ V_0 & x > a, \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$. Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für gebundene Zustände $E < V_0$. Bestimmen Sie die Normierungskonstanten der Wellenfunktion in Abhängigkeit von k und q und zeigen Sie, dass sich für die Energieeigenwerte die folgende transzendente Gleichung ergibt:

$$\cot(ka) = -\frac{q}{k}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$.
Hinweis: Unterteilen Sie die Wellengleichung wie folgt:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A\sin(kx) + B\cos(kx) & 0 \le x \le a \\ C\exp(qx) + D\exp(-qx) & x > a \end{cases}$$

mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie außerdem die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

Aufgabe 14: Eigenschaften von Operatoren (10 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen allgemeine Eigenschaften von Operatoren bewiesen werden.

a) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei hermitesche Operatoren. Beweisen Sie, dass in dem Ausdruck

$$\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}\left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)$$

die erste Klammer reell und die zweite rein imaginär ist.

b) Seien $\hat{C}$ und $\hat{D}$ zwei lineare Operatoren. Zeigen Sie

$$e^{\hat{C}}\hat{D}e^{-\hat{C}} = \hat{D} + \left[\hat{C}, \hat{D}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{C}, \left[\hat{C}, \hat{D}\right]\right] + \dots .$$