Übungsblatt 4 [Ausgabe: 08.05.2012; Abgabe: 15.05.2012]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 9: Unschärferelation (15 Punkte)

Der Zustand eines Teilchens sei durch folgende Wellenfunktion beschrieben:

$$\Psi(x) = A \exp\left\{-\lambda(x-a)^2\right\} .$$

Hier sind $A, \lambda, a = const.$ und $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A.

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ sowie $\langle p_x \rangle$ und $\langle p_x^2 \rangle$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von b) die die Standardabweichung $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ und $\sigma_{p_x} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$.
Überprüfen Sie mittels der so berechneten Streuungen Δx und Δp_x die *Heisenberg´sche Unschärferelation.*

Aufgabe 10: H-Atom im Grundzustand (8 Punkte)

Gegeben sei die Wellenfunktion des Grundzustands eines Elektrons im H-Atom:

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{r}{a_0}\right\} .$$

Hier ist r der Radius um den Atomkern und a_0 der Bohrsche Radius.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert für den Radius r, $\langle r \rangle$.

b) Stimmt der erwartete Wert für den Radius mit dem von Bohr vorhergesagten Bohrschen Radius a_0 überein?

c) Bestimmen Sie nun den Erwartungswert $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$.

d) Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch, insbesondere im Zusammenhang mit den von Bohr vorhergesagten Übergängen zwischen den Energieniveaus.

Hinweis: Allgemein gilt:

$$\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = \Gamma(x) .$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma(x)$ die Gammafunktion.

Aufgabe 11: Eigenfunktionen und Eigenwerte (7 Punkte)

Gegeben seien folgende Wellenfunktionen:

$$\psi_1 = C_1 \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \qquad \text{und} \qquad \psi_2 = C_2\, x\, \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

a) Zeigen Sie, dass ψ_1 und ψ_2 Eigenfunktionen zum Operator $\hat{A} = x^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ sind und bestimmen Sie die jeweiligen Eigenwerte.

b) Prüfen Sie, ob die Funktion $\psi = \psi_1 + \psi_2$ eine Eigenfunktion ist und erläutern Sie das Ergebnis.

c) Erläutern Sie in jeweils einem Satz die physikalische Bedeutung von Operator, Eigenwert und Eigenfunktion.