

Übungsblatt 3

[AUSGABE: 24.04.2012; ABGABE: 08.05.2012]

Übungszettel im Netz unter <http://www.tp4.rub.de/hat/>

Aufgabe 6: Die Schrödingergleichung (8 Punkte)

Gegeben sei eine Wellenfunktion eines Teilchens mit der Masse m :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \alpha r \exp \left\{ -\frac{r}{2R} + i \frac{\hbar}{8mR^2} t \right\} \sin \vartheta \exp(i\varphi)$$

Hier ist α eine Normierungskonstante, $r = |\mathbf{r}|$, ϑ und φ bezeichnen die sphärischen Polarkoordinaten und $R = \frac{\epsilon_0 \hbar}{\pi m e e^2}$.

- Welche Form hat das Potential $V(\mathbf{r})$ in dem sich das Teilchen befindet?
- Beschreiben Sie in zwei Sätzen was eine Wellenfunktion beschreibt und welche physikalische Bedeutung man einer Wellenfunktion zuordnen kann.
- Die Schrödingergleichung ist eine partielle Differentialgleichung. Welches sind die mathematischen Eigenschaften und was folgt daraus für die Lösung?

Aufgabe 7: Stromdichte und Kontinuitätsgleichung (15 Punkte)

Gegeben sei eine Wellenfunktion:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = z_0 \frac{r_0}{r} \exp \left\{ ik^2 r^2 - \left(i\omega + \frac{\hbar k^2}{m} \right) t \right\}$$

mit $z_0, r_0 = \text{const}$ und $r = |\mathbf{r}|$.

- Leiten Sie aus der Bedingung, dass $\Psi(\mathbf{r}, t)$ die Schrödingergleichung für ein kräftefreies Teilchen erfüllt, die Dispersionsrelation $\omega(k)$ her.
- Bestimmen Sie die zugehörige Stromdichte $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$.
- Beschreiben Sie in 2 Sätzen die Bedeutung der Kontinuitätsgleichung. Ist sie hier erfüllt?

Aufgabe 8: Aufenthaltswahrscheinlichkeit (7 Punkte)

Die Wellenfunktion eines Teilchens sei

$$\Psi(x) = \frac{1}{(\pi\alpha^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right\}$$

hier bezeichnet α eine reelle positive Konstante.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung den Impuls im Intervall

$$[\hbar(k - \Delta k/2), \hbar(k + \Delta k/2)]$$

zu finden? Δk kann als klein angenommen werden.