Übungsblatt 2 [Ausgabe: 17.04.2012; Abgabe: 24.04.2012]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 3: De Broglie Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit (6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die De Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p}$ eines Materieteilchens nicht relativistisch hergeleitet.

a) Leiten Sie diese Beziehung ganz analog relativistisch her. Beachten Sie dazu diein den Anwesenheitsübungen dieser Woche angegebenen Formeln für die Energie und den Impuls eines relativistischen Teilchens. $\boxed{4\text{ P}}$

b) Zeigen Sie, dass die Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \lambda\nu$ und die Gruppengeschwindigkeit $v_{\text{gr}} = v$ eines Materieteilchens die Beziehung $v_{\text{ph}}v_{\text{gr}} = c^2$ erfüllen, wobei c für die Lichtgeschwindigkeit steht. $\boxed{2\text{ P}}$

Louis-Victor De Broglie (1892-1987) Hat sich auch um die Vermittlung moderner Physik an den Laien verdient gemacht.

Aufgabe 4: Dispersion Gaußscher Wellenpakete (10 Punkte)

Betrachten Sie eine zeitunabhängige komplexe Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ mit einer allgmeinen Dispersionsbeziehung $\omega = \omega(k)$, die als Überlagerung ebener Wellen $\Phi_k(x,t) = e^{ikx-i\omega(k)t}$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx-i\omega(k)t} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(k-k_0)^2}.$$

Bestimmen Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$, die Gruppengeschwindigkeit $v = \omega' = \partial_{k'}\omega(k')|_k$ und die Dispersion $\omega'' = \partial^2_{k'}\omega(k')|_k$ für

i) die Wellengleichung einer elektromagnetischen Welle:
$\partial_t^2\Phi_k(x,t) = c^2\partial_x^2\Phi_k(x,t)$,

ii) die Wellengleichung eines Mesons (z.B. Kaon) mit der Ruhemasse m:
$\partial_t^2\Phi_k(x,t) = \left(c^2\partial_x^2 - \frac{c^4m^2}{\hbar^2}\right)\Phi_k(x,t)$,

iii) und die Schrödingergleichung eines freien Teilchens:
$i\hbar\partial_t^2\Phi_k(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Phi_k(x,t)$.

$\boxed{10\text{ P}}$

Aufgabe 5: Die Wellengleichung (14 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit der Wellengleichung beschäftigen und eine Lösung mit Hilfe der Fouriertransformation suchen. Dabei wird *nur* eine gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen sein.

$u(x,t)$ sei die (kleine) Auslenkung einer schwingenden Saite aus der Ruhe. Diese Konfiguration wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

beschrieben.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Fouriertransformation der oben angegebenen partiellen Differentialgleichung durch

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(k,t) = -k^2 c^2 U(k,t)$$

gegeben ist. Benutzen Sie dazu eine Anwesenheitsaufgabe für den rechten Teil der Gleichung. Die linke Seite können Sie z.B. dadurch berechnen, dass Sie die Ableitung als Differenzenquotient schreiben und dann die Grenzwertbetrachtung mit der Integration tauschen.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) ist namentlich auf dem Eiffelturm verewigt. Mit der Fourieranalyse legte er einen Grundstein für den Fortschritt der modernen Physik.

(b) Lösen Sie nun diese resultierende gewöhnliche Differentialgleichung mit dem üblichen Ansatz für $k \neq 0$ und zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung durch

$$U(k,t) = A(k)\, e^{ikct} + B(k)\, e^{-ikct}$$

gegeben ist. Welche Lösungen gibt es für $k = 0$ und warum können wir diese in unserer Betrachtung weglassen.

(c) Die inverse Fouriertransformation ist durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

gegeben.

Zeigen Sie nunmehr abschließend durch Rücktransformation, dass die allgemeine Lösung im Ortsraum durch $u(x,t) = a\,(x - c\,t) + b\,(x + c\,t)$ gegeben ist, a und b sind dabei beliebige (differenzierbare) Funktionen.

14 P