Anwesenheitsübung 10 [26.06.2012]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 1: Vollständige Differentiale

In der Vorlesung wird im Zusammenhang mit den Zustandsgrößen eines makroskopischen Systems an den Begriff des vollständigen Differentials erinnert, dessen Bedeutung hier verdeutlicht sei.

(a) Gegeben sei $\mathrm{d}Y = a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2$ mit $a_1 = x_1\,x_2\,(1+x_2^2)$ und $a_2 = x_2 \exp\{x_1^2\}$. Ist $\mathrm{d}Y$ ein vollständiges Differential?

(b) Was ergibt sich für die Wegintegrale $\displaystyle\int_{C_1} \mathrm{d}Y$ und $\displaystyle\int_{C_2} \mathrm{d}Y$ mit den beiden Integrationswegen $C_1 :\ (0,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (1,1)$ und $C_2 :\ (0,0) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (1,1)$?

(c) Wie muss $f(x_1, x_2)$ gewählt werden, damit

$$\mathrm{d}Y = f(x_1,x_2)\,x_1\,x_2\,(1+x_2^2)\ \mathrm{d}x_1 + f(x_1,x_2)\,x_2\ \exp\{x_1^2\}\ \mathrm{d}x_2$$

ein vollständiges Differential ist?
Hinweise: Machen Sie für den *"integrierenden Faktor"* $f(x_1, x_2)$ einen Separationsansatz der Form $f(x_1, x_2) = g(x_1)\,h(x_2)$. Eine Substitution der Form $s = 1 + x_2^2$ könnte sich als nützlich erweisen.

(d) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(\partial p/\partial U)_{V=const.} = 0$ gelten würde, wenn die Wärmemenge $đQ$ ein vollständiges Differential wäre, und begründen Sie, warum diese Gleichung physikalisch nicht sinnvoll ist.

Aufgabe 2: *van der Waals*-Gas

Die Zustandsgleichung des idealen Gases ist - wie der Name schon sagt - eine Idealisierung realer Gase. In der Vorlesung haben Sie bereits die *van der Waals*'sche Zustandsgleichung kennen gelernt, die den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen besser beschreibt. Um diese soll es auch in den Übungen dieser Woche gehen.
Für die Bearbeitung der Hausaufgaben benötigen Sie den Zusammenhang

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Leiten Sie diesen her, indem Sie zunächst das Differential der inneren Energie $\mathrm{d}U$ sowohl in den unabhängigen Variablen (S, V) als auch in (T, V) darstellen und beide Ausdrücke miteinander in Beziehung setzen.

Bitte wenden! ⇒

Finden Sie dann einen Ausdruck für das Differential von $F := U - TS$ in den Koordinaten (T, V) und zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

gilt, indem Sie die Eigenschaft der Vertauschbarkeit der 2. Ableitung (vollständiges Differential) ausnutzen. Mit dieser Ersetzung erhalten Sie die gewünschte Beziehung.