Anwesenheitsübung 9 [19.06.2012]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 1: Informationsentropie

Die physikalische (diskrete) Informationsentropie ist als

$$S_\mathrm{d} = -k_\mathrm{B} \sum_{i=1}^{N} p_i \ln(p_i) \quad \text{mit} \quad k_\mathrm{B} = const.$$

definiert, wobei die Normierung $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ gilt. Berechnen Sie die Informationsentropie für

a) das Würfelergebnis eines idealen 6-seitigen Würfels.

b) das Ergebnis des Wurfs einer idealen Münze.

c) den Wurf einer Reißzwecke, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% auf dem Rücken landet und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% auf der Seite landet.

Aufgabe 2: Shannon-Entropie

Für eine durch die Verteilungsfunktion $\rho(x)$ gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung werde durch das Funktional

$$S[\rho(x)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \ln(\rho(x)) \mathrm{d}x \equiv -\langle \ln(\rho(x)) \rangle$$

ihre Entropie definiert. Im Wesentlichen ist dies die von Shannon (1948) eingeführte Entropie zur Charakterisierung des Informationsgehaltes einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Finden Sie unter allen Verteilungsfunktionen $\rho(x)$ mit vorgegebener Varianz $\sigma^2 = const.$ solche, die $S[\rho(x)]$ extrem werden lassen und berechnen Sie den zugehörigen Wert der Entropie.

Hinweise: Verwenden Sie Lagrange-Multiplikatoren für die Nebenbedingungen ($\int \rho(x)\mathrm{d}x = 1$ und $\int (x - \langle x \rangle)^2 \rho(x) \mathrm{d}x = \sigma^2$).

Mit funktionalen Ableitungen $\partial/\partial\rho(x)$ kann man wie in der bekannten endlichdimensionalen Differentialrechnung rechnen, wobei jedoch $\partial\rho(x')/\partial\rho(x) = \delta(x - x')$ gilt.