Anwesenheitsübung 8 [12.06.2012]

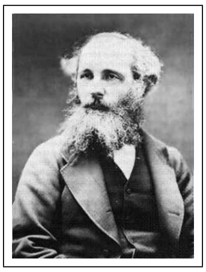
Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 12: Die Maxwell-Verteilung

Eine Grundlage der kinetischen Theorie im Rahmen der statistischen Mechanik ist die Beschreibung von makroskopischen Systemen mit so genannten Verteilungsfunktionen, die i. Allg. von den Phasenraumkoordinaten Ort $\mathbf{r}$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, sowie der Zeit t abhängen.
Ein Beispiel für eine solche Verteilungsfunktion ist die (zeitunabhängige) Maxwell-Verteilung

$$f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = n(\mathbf{r}) \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2k_B T} \right),$$

in der $n(\mathbf{r})$ die Teilchenzahldichte und $\mathbf{u}$ die Strömungsgeschwindigkeit bedeuten. Die Größen m, k_B und T bezeichnen die Teilchenmasse, Boltzmann-Konstante und die Temperatur. Diese Funktion beschreibt die Verteilung (identischer) Teilchen eines Gases im Orts- und Geschwindigkeitsraum derart, dass der Ausdruck $f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3v$ angibt, wieviele Teilchen sich im Volumenelement d^3r befinden und eine Geschwindigkeit im Intervall $[\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v}]$ haben. Ein makroskopisches System wird auf diese Weise nicht über die (mikroskopischen) Einzelteilchenorte bzw. -geschwindigkeiten beschrieben, sondern mit Hilfe der (mesoskopischen) Eigenschaften des gesamten Teilchenensembles.



James Clerk Maxwell (1831-1879) interessierte sich nicht nur für die kinetische Gastheorie und insbesondere die Elektrodynamik, sondern auch für 'The Motion of Saturn's Rings' (1857) und zeigte, dass die Ringe aus vielen Einzelteilchen bestehen müssen.

Aus der Messung solcher Verteilungsfunktionen können makroskopische Kenngrößen eines Gases gewonnen werden, indem man so gennante Geschwindigkeitsmomente bildet.

Hier sollen die innere Engergie U des Teilchenensembles und der Druck p berechnet werden. Verwenden sie dazu:

$$U = \sum \text{kin. Teilchenenergien} = \frac{m}{2} \iint (\mathbf{v}-\mathbf{u})^2 f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathrm{d}^3v\mathrm{d}^3r$$

$$p = \frac{m}{3} \int (\mathbf{v}-\mathbf{u})^2 f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathrm{d}^3v$$