Übung Grundlagen Quantenmechanik & Statistische Physik (SoSe 2012)
Vorlesung: Jun-Prof Dr. J. Becker
Übungsgruppen:
a: Florian Schuppan & Natalie Fedrau; **b:** Michaela Voth & Natalie Fedrau
c: Jens Dreyer & Christian Ahlborn

Anwesenheitsübung III [17.04.2012]

Aufgabe 1:Mathematischer Ausflug - Fouriertransformationen

Die Fouriertransformation ordnet jeder Zeitfunktion $f(t)$ eine Frequenzfunktion $F(\omega)$ zu. Sie ist durch

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \exp\left(-i \cdot \omega \cdot t\right)\, dt \tag{1}$$

gegeben. Sie existiert für Funktionen f, die stückweise stetig differenzierbar sind und für die $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ gilt. Eine gebräuchliche Schreibweise für die Zuordnung ist $\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega)$. Sehr häufig ist in physikalischen Zusammenhängen eine Transformation in den Fourierraum, also den Frequenzraum, sinnvoll, da man dort leichter eine Lösung für die Differentialgleichung des Problems finden kann. Mit einer inversen Fouriertransformation kann man dann mit Hilfe der Lösung im Fourierraum die zeitabhängige Lösung finden. Hier soll das Verhalten der Transformation an einigen Beispielen untersucht werden.

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \quad |t| < T \\ 0 & : \quad |t| > T \end{cases} \tag{2}$$

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Gaußfunktion (es gilt $k > 0$):

$$f(x) = \exp(-k^2\, x^2/2)\,. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass für $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ die Fouriertransformierte der Ableitung einer Funktion durch

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = (i\omega) \cdot F(\omega) \tag{4}$$

gegeben ist.