Übungsgruppen:
I: Dr. Udo Arendt, Tobias Wiengarten; **II:** Katharina Brodatzki & Christopher Körber
III: Tobias Wiengarten & Denis Wittor; **IV:** Isaac Saba & Philipp Graeser

Übungsblatt XI [Ausgabe: 05.07.2011; Abgabe: 12.07.2011]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

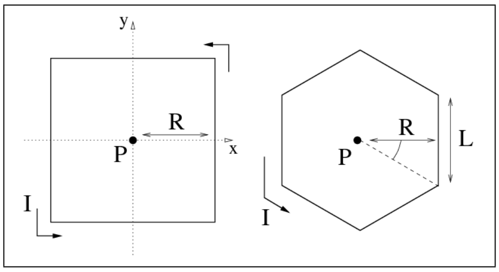
Aufgabe 29: Biot-Savart (10 Punkte)

Berechnen Sie das Magnetfeld auf der Achse einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius R, die vom Strom I durchflossen werden möge, mit Hilfe des Biot-Savart Gesetzes.

Aufgabe 30: N-Eck (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Magnetfeld im Zentrum P des abgebildeten quadratischen Leiters, der von einem Strom I durchflossen ist.

(b) Wie lautet das Magnetfeld im entsprechenden Punkt eines symmetrischen n-Ecks mit n gleich langen Seiten?



Hinweis:
Eine einzelne Kante L eines n-Ecks erfüllt die Gleichung

$$L = 2\,R\,\tan(\pi/n)$$

(siehe Skizze für $n = 6$).

(c) Bilden Sie den Grenzwert $n \to \infty$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem des Zentrums der Kreisschleife.

Aufgabe 31: Die Wellengleichung (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die auslaufende Kugelwelle $f(r,t) = \frac{1}{r}\exp(i[kr - \omega t])$ eine Lösung der 3-dimensionalen Wellengleichung $\Box f = 0$ ist. Es gelte die Dispersionsrelation $\omega = kc$.

Hinweis:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad \text{(Laplace-Operator in Kugelkoord.)}$$

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad \text{(d'Alembert- bzw. Quabla-Operator)}$$

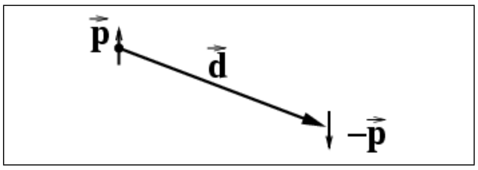
BONUSAUFGABE 32: Quadrupol (10 Extrapunkte)

In der Vorlesung wird der Dipol als Anordnung aus zwei Ladungen eingeführt. Dabei wird gezeigt, wie man mittels einer Taylorentwicklung einen Näherungsausdruck für das Dipolpotential erhalten kann.

In dieser Aufgabe sollen Sie eine ähnliche Rechnung für eine Anordnung von zwei Dipolen durchführen.

Das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p}$ im Ursprung ist gegeben durch:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, \vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right).$$



(a) Ein Dipol mit Dipolmoment $\vec{p}$ möge sich im Ursprung befinden und ein anderer Dipol mit Dipolmoment $-\vec{p}$ bei $\vec{d}$ (siehe dazu auch den oberen Teil der Abbildung). Benutzen Sie die Näherung

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|} \approx \frac{1}{r} - \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \quad ; \qquad \frac{d}{r} \ll 1$$

und zeigen Sie, dass das Potential dieser Anordnung durch

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{p}\cdot\left(\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{d})\vec{r} - r^2\vec{d}}{r^5}\right)$$

gegeben ist. Erläutern Sie kurz die Herkunft der angegebenen Näherung.

(b) Wie lauten die Komponenten des *Quadrupoltensors* q_{ij}, wenn Sie das Ergebnis in kartesischen Koordinaten als

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{q_{ij}}{r^5}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})$$

schreiben?