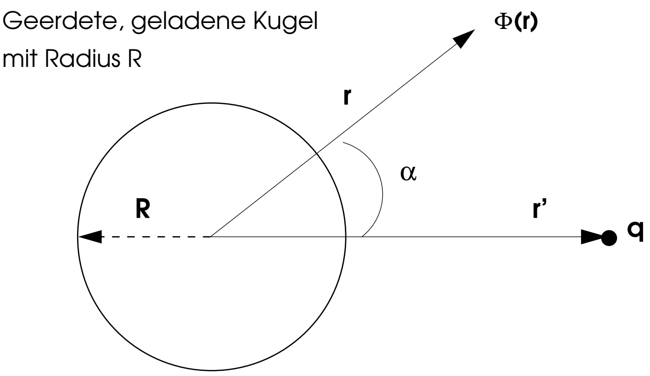
Übung Grundlagen Mechanik & Elektrodynamik (SoSe 2011)
Jun-Prof Dr. J. Becker
Übungsgruppen:
I: Dr. Udo Arendt, Tobias Wiengarten; **II:** Katharina Brodatzki & Christopher Körber
III: Tobias Wiengarten & Denis Wittor; **IV:** Isaac Saba & Philipp Graeser

Übungsblatt X [Ausgabe: 28.06.2011; Abgabe: 05.07.2011]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 26: Punktladung bei geerdeter Metallkugel (10 Punkte)

Eine Punktladung q befinde sich an der Position $\vec{r}\,'$. Eine geerdete Metallkugel mit Radius R befinde sich mit ihrem Zentrum im Ursprung (siehe Zeichnung). Da die Metallkugel geerdet ist, gilt bei $|\vec{r}| = r = R$, dass das Potential $\Phi(r = R) = 0$ ist.



(a) Stellen Sie den Ausdruck für das Potential außerhalb der geerdeten Metallkugel mit Hilfe der Spiegelladungsmethode auf, indem Sie eine virtuelle Spiegelladung q_s an der Position $\vec{r}_s\,'$ anbringen.

(b) Zeigen Sie, dass durch die Randbedingung des Problems folgt:

$$\frac{q}{R} = -\frac{q_s}{|\vec{r}_s\,'|} \quad \text{und} \quad \frac{|\vec{r}\,'|}{R} = \frac{R}{|\vec{r}_s\,'|}\,. \qquad (1)$$

(c) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch: Was passiert mit der Spiegelladung, wenn man den Abstand der Punktladung q von der Kugel selbst ändert?

(d) Bestimmen Sie hieraus das Potential $\Phi(\vec{r})$.

Aufgabe 27: Geladener Ellipsoid (10 Punkte)

Ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c trage die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{z}{c}\,\rho_0\,, \quad \text{mit} \quad \rho_0 = const.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen des Ellipsoids $\mathcal{E} := \left\{(x,y,z) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ gegeben ist durch

$$V = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c\,.$$

Verwenden Sie die verallgemeinerten Kugelkoordinaten

$$x = a\, r \sin\vartheta\, \cos\varphi\,, \quad y = b\, r \sin\vartheta\, \sin\varphi\,, \quad z = c\, r\cos\vartheta\,.$$

Hinweis: Die gesamte Dimensionsinformation der Größen x, y und z steckt nicht wie bei den schon bekannten Kugelkoordinaten im Radius r sondern in den Konstanten a, b und c.
Somit gilt: $[r] = 1$ und $[a] = [b] = [c] =$ Länge

b.w.

(b) Berechnen Sie die Gesamtladung Q.

(c) Berechnen Sie das *Dipolmoment* $\vec{p} = \displaystyle\int \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,d^3r$.

Hinweis: Unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften (Achsen- bzw. Punktsymmetrie) der Integranden, sind die Integrationen in Aufgabenteil (b) und (c) deutlich einfacher!

Aufgabe 28: Magnetostatik (10 Punkte)

Betrachten Sie einen unendlich langen geraden Leiter mit Radius R, der von einem Strom mit der Stromdichte $\vec{j} = j_0\, f(r)\, \vec{e}_z$ durchflossen wird (Zylinderkoordinaten).

(a) Berechnen Sie für $f(r) = r/R$ durch Anwendung von

$$\int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} \;=\; \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a}$$

das vom Strom erzeugte Magnetfeld.

(b) Für den Fall $f(r) = 1$ ergibt sich das Magnetfeld $\vec{B} = B_\varphi\, \vec{e}_\varphi$ mit

$$B_\varphi = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{2}\, j\, r & : \quad r \leq R \\ & : \\ \dfrac{\mu_0}{2r}\, j\, R^2 & : \quad r > R. \end{cases}$$

Skizzieren Sie beide Magnetfelder $B_\varphi(r)$ (für $f(r) = 1$ und $f(r) = r/R$) und interpretieren Sie die Unterschiede.