Übungsblatt IX [Ausgabe: 21.06.2011; Abgabe: 28.06.2011]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 23: Anwendung der Delta-Distribution (10 Punkte)

Die (kugelsymmetrische) Ladungsdichte für ein Wasserstoffatom im Grundzustand kann man im Bohrschen Atommodell wie folgt beschreiben:

$$\rho(r) = \frac{e}{4\pi r^2}\,\delta(r) - \frac{e}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) .$$

Sie wird also als positive Punktladung im Ursprung (Kernladung) umgeben von einer negativen Raumladung (Elektronenladungsdichte) genähert. Hier bezeichnen e die Elementarladung, a den Bohrschen Radius und r den Abstand vom Ursprung.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld des Wasserstoffatoms durch direkte Lösung der Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

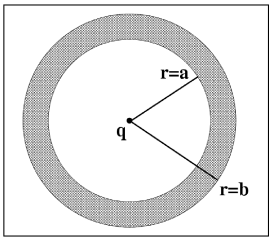
Beachten Sie dazu die sphärische Symmetrie des Problems, also

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 E(r)\right] .$$

(b) Vereinfachen Sie das elektrische Feld für die Grenzfälle $r \gg a$ und $r \ll a$ und diskutieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 24: Sphärischer Leiter (10 Punkte)

Gegeben seien die Oberflächenladungen σ_a und σ_b, die von einer positiven Punktladung q im Zentrum eines sphärischen Leiters auf dessen Innen– und Außenseite (siehe nebenstehende Abbildung) induziert werden. Für diese gilt:



$$\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2} \quad \text{und} \quad \sigma_b = \frac{q}{4\pi b^2}$$

(a) Berechnen Sie für diese Anordnung das elektrische Potential ϕ, welches im Unendlichen verschwinden solle.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass für dieses Potential im Innen– und Außenbereich zunächst ganz allgemein

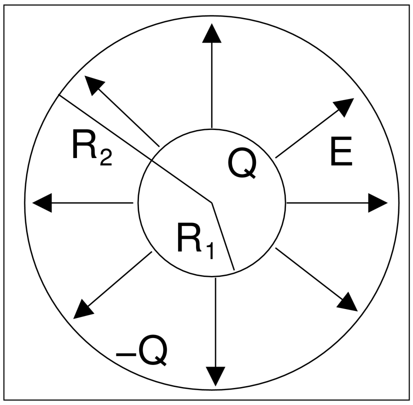
$$\phi(r) = \begin{cases} k_i/r + c_i & \text{mit } k_i, c_i = const \quad \text{für } r > b \\ k_a/r + c_a & \text{mit } k_a, c_a = const \quad \text{für } r < a \end{cases}$$

gilt und nutzen Sie darüber hinaus die aus der Vorlesung bekannte Beziehung $\vec{n}\cdot\left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right) = 4\pi\sigma$ zur Beschreibung des Verhaltens elektrischer Felder an Grenzflächen (hier: $r = a$ und $r = b$), sowie die Stetigkeit des Potentials $\phi(r)$.

(b) Bestimmen Sie davon ausgehend das zugehörige elektrische Feld in den Bereichen $r < a$, $a < r < b$ und $r > b$.

(c) Skizzieren Sie den Potential– und Feldverlauf.

Aufgabe 25: Kugelkondensator (10 Punkte)



Ein Kugelkondensator habe eine Innenkugel mit dem Radius R_1, die mit der Ladung $+Q$ belegt ist, und eine konzentrische Aussenkugel mit dem Radius R_2 mit der Ladung $-Q$. Die entsprechende Ladungsdichte sei gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\,\delta(r - R_1) - \frac{Q}{4\pi R_2^2}\,\delta(r - R_2)$$

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ mit Hilfe der integralen Form der Maxwellgleichung

(b) Bestimmen Sie die elektrische Energiedichte $w = \frac{\epsilon_0}{2}\left|\vec{E}\right|^2$ als Funktion von $\vec{r}$.

(c) Berechnen Sie aus dem elektrischen Feld das Potential Φ und die Spannung $U = \Phi(R_1) - \Phi(R_2)$, die zwischen den beiden Kugelschalen anliegt. Beachten Sie dabei, dass das Potential bei $r = R_1$ und $r = R_2$ stetig ist und im Unendlichen verschwinden soll.

(c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie W, die im Kondensator gespeichert ist. Vergleichen Sie dieses Resultat mit demjenigen, das man mit $W = \frac{1}{2}QU$ erhält.