Übungsblatt VIII Ausgabe: [07.06.2011]; Abgabe: [21.06.2011]

Aufgabe 20: Nützliche Rechenregeln II (8 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Gradienten von r und $1/r$, wobei r den Betrag der Ortsvektors darstellt.

(b) Zeigen Sie, dass für beliebiges $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ und $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ und $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ folgende Relationen gelten:

i) $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{v} + \vec{u}\, \mathrm{div}\, \vec{v} - \vec{v}\, \mathrm{div}\, \vec{u}$,

ii) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \vec{v}) - \triangle \vec{v}$.

Warum ist bei i) die *bac-cab*-Regel $\big(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})\big)$ nicht gültig?

Hinweis: Hier reicht es, die Gültigkeit dieser Relationen für nur eine Komponente (z.B. x) zu zeigen. Die anderen Komponenten folgen durch Vertauschen von x, y und z.

Aufgabe 21: Gaußscher Satz (10 Punkte)

Wir haben bereits gesehen, dass die Vektoranalysis für die Theoretische Physik ein Arsenal an wesentlichen Hilfsmitteln bereitstellt. Insbesondere sind die sogenannten Integralsätze unverzichtbar. Da sie insbesondere in der Elektrodynamik (und damit in den kommenden Wochen im Rahmen der Vorlesung) äußerst hilfreich sind, sei mit dieser Aufgabe die Anwendung des Satzes von Gauß geübt. Dieser lautet folgendermaßen:

$$\oint\limits_{O_V} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \int\limits_{V} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) dV \tag{1}$$

Zeigen Sie seine Gültigkeit am Beispiel des Vektorfeldes

$$\vec{A}(x, y, z) = ax^3\, \vec{e}_x + by\, \vec{e}_y + cz\, \vec{e}_z \tag{2}$$

durch Berechnung der entsprechenden Integrale. Das Integrationsgebiet sei eine Kugel mit konstantem Radius R, für die gilt: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Aufgabe 22: Geladene Kugelschale (12 Punkte)

Die Ladungsdichte einer homogen geladenen Kugelschale sei gegeben durch

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 = const. & , r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes.

(b) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Potential ($\Phi = -\int E\, dr$) so, dass es im Unendlichen verschwindet. Beachten Sie, dass das Potential in dieser Konfiguration stetig sein muss.

(c) Skizzieren Sie sowohl das elektrische Feld $E(r)$ als auch das elektrische Potential $\Phi(r)$.