

Übungszettel im Netz unter <http://www.tp4.rub.de/hat/>

### Aufgabe 13: Bewegung auf Parabel (14 Punkte)

In der Vorlesung wurde als einfaches Beispiel zur Illustration des Lagrange-Formalismus das mathematische Pendel untersucht. Dabei bewegt sich ein Massenpunkt auf einem Kreis.

In dieser Aufgabe soll eine ähnliches Problem angegangen werden:

Ein Massenpunkt der Masse  $m$  soll sich nur auf einer Parabel  $y = x^2$  im Schwerfeld der Erde ( $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$ ) bewegen können.

a) Wie viele verallgemeinerte Koordinaten benötigt man, um die Bewegung des Massenpunkts beschreiben zu können?

b) Stellen Sie nun, entsprechend der Anzahl der generalisierten Koordinaten, die zugehörigen Lagrangefunktionen  $L = T - V$  für dieses Problem auf.

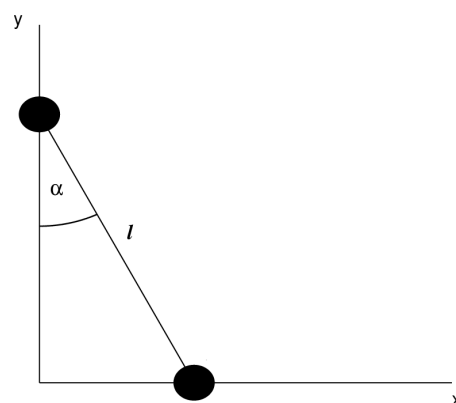
c) Bestimmen Sie dann aus den Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

durch Bildung der entsprechenden Ableitungen die resultierenden Bewegungsgleichungen.

### Aufgabe 14: Hantel (16 Punkte)

Eine Hantel, d.h. zwei punktförmige Gewichte der Masse  $m$ , die durch eine Stange der Länge  $l$  mit vernachlässigbarer Masse verbunden sind, sei so montiert, dass sich das eine Gewicht nur entlang der  $y$ -Achse und das andere Gewicht nur entlang der  $x$ -Achse bewegen kann. Die Schwerkraft zeige in negative  $y$ -Richtung.



(a) Überlegen Sie, warum die mögliche Bewegung auf

$$x \in [-l; l] \quad \text{und} \quad y \in [-l; l]$$

beschränkt ist und erläutern Sie die Anzahl der Freiheitsgrade.

(b) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion  $L$ .

(c) Zeigen Sie, dass sich mit Hilfe der Lagrangegleichungen die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\alpha} = \frac{g}{l} \sin \alpha$$

ergibt, wobei  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichnet. Welche Bewegungsformen sind möglich?

(d) Zeigen Sie, dass man aus der Bewegungsgleichung eine Konstante der Bewegung erhalten kann, indem man die Bewegungsgleichung (vgl. Aufgabenteil (b)) mit  $\dot{\alpha}$  multipliziert und anschließend integriert.

(e) Welche Bahn beschreibt der Mittelpunkt der Hantel?