Übungsblatt IV [AUSGABE: 03.05.2011; ABGABE: 10.05.2011]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 10: Planetenbewegung (14 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Planetenbewegung genauer begutachtet werden. In der Vorlesung wurde die Bahn eines Planeten um die Sonne in Abhängigkeit des Winkels φ als Kegelschnittgleichung hergeleitet:

$$r(\varphi) = \frac{P}{1 + e \cdot \cos(\varphi)} . \tag{1}$$

Für $0 < e < 1$ ergaben sich elliptische Bahnen. Die Parameter P und e, sowie die große und kleine Halbachse (a respektive b) wurden in der Vorlesung definiert.

(a) Machen Sie sich zunächst den Zusammenhang der großen bzw. der kleinen Halbachse mit der Energie und dem Impuls des Systems klar.

(i) Beschreiben Sie, wie sich die Ellipsenbahnen gleicher Energie $E = E_0 = konst$ für verschiedene Drehimpulse L ändert und fertigen Sie eine Zeichnung an. Fangen Sie mit dem Spezialfall des Kreises an (also $L = L_K$) und verändern schließlich den Drehimpuls auf die Werte $L = 2L_K/3$, $L_K/3$ und $0,001L_K$. Die Sonne soll sich dabei im Mittelpunkt des Kreises bzw. in einem der Brennpunkte der Ellipse befinden. Was verändert sich?

(ii) Nehmen Sie nun einen konstanten Drehimpuls $L = L_0 = konst$ an und zeichnen die Ellipsenbahnen für unterschiedliche Werte der Energie E an. Starten Sie auch hier mit dem Kreis ($E = E_K$) und verändern die Energie dann auf die Werte $E = 4E_K/9$, $E_K/9$ und schließlich $E = 0$. Auch hier soll sich die Sonne im Mittelpunkt bzw. Brennpunkt befinden. Was ist der Unterschied zu Aufgabenteil (i)?

Hinweis: Überlegen Sie, wie sich die Parameter, die eine Ellipse beschreiben, mit der Änderung von L bzw. E verhalten.

(b) Bereits in der Anwesenheitsübung haben Sie den **Lenz-Runge Vektor** kennengelernt,

$$\vec{\Lambda} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m} + V(r)\, \vec{r}\right) = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{\alpha\, m} - \frac{\vec{r}}{r} . \tag{2}$$

Nutzen Sie nun den Lenz-Runge Vektor zur Herleitung der Bahngleichung aus Stellen Sie mit seiner Hilfe die Bahngleichung Gleichung (1):

(i) Bilden Sie hierzu $\vec{\Lambda} \cdot \vec{r} = |\Lambda| \cdot r \cdot \cos(\varphi)$ (wobei φ der Winkel zwischen $\vec{\Lambda}$ und $\vec{r}$ ist), und lösen Sie nach $r(\varphi)$ auf.

(ii) Bestimmen Sie die Parameter P und e in Abhängigkeit von L, M, m, G und $|\Lambda|$. Hier soll $\alpha = G \cdot M \cdot m$ verwendet werden. Wie hängt der Betrag des Lenz-Runge Vektors mit der Exzentrizität e zusammen?

Aufgabe 11: Rechnen in Krummlinigen Koordinaten (8 Punkte)

Häufig werden Rechnungen in krummlinigen Koordinaten durchgeführt. Daher sei hier an Kugelkoordinaten erinnert:

(a) In Kugelkoordinaten ist der Ortsvektor durch $\vec{r} = r\vec{e}_r$ gegeben. Die Bahn eines Massenpunktes wird daher durch $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$ beschrieben. Bestätigen Sie folgenden Ausdruck für die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

(b) Zeigen Sie, dass die Beschleunigung in Kugelkoordinaten durch

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}(t) &= [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2]\vec{e}_r \\ &+ [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2]\vec{e}_\theta \\ &+ [(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\theta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta)]\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

gegeben ist.

(c) Wie lautet die kinetische Energie T eines Massenpunktes mit der Masse m in Kugelkoordinaten?

Aufgabe 12: Verständnisfragen (8 Punkte)

(8 Punkte, Punkte ab vier korrekten Antworten)

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit '*Ja*' oder '*Nein*' (Weiter Kommentare am Rand **nicht** zugelassen!):

		Ja	Nein
(1)	Gilt in Systemen ohne äußeres Drehmoment stets die Impulserhaltung?	○	○
(2)	Sind alle Bahnen im zentralen Gravitationsfeld Kegelschnitte?	○	○
(3)	Erfüllt die reduzierte Masse μ beim Zweikörperproblem die Gleichung $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$?	○	○
(4)	Befinden sich Teilchen mit negativer Energie im Gravitationspotential immer auf einer gebundenen Bahn?	○	○
(5)	Sind Arbeit und Potential identisch?	○	○
(6)	Kommt es bei Oszillationen mit treibender Kraft zur Resonanzkatastrophe, wenn die Frequenz der ï¿½uï¿½eren Kraft ein beliebiges Vielfaches der Eigenfrequenz ist?	○	○
(7)	Beschreibt die Lagrangefunktion eine Erhaltungsgröße?	○	○