Übung Grundlagen Mechanik & Elektrodynamik (SoSe 2011)
Jun-Prof Dr. J. Becker
Übungsgruppen:
I: Dr. Udo Arendt, Tobias Wiengarten; **II:** Katharina Brodatzki & Christopher Körber
III: Tobias Wiengarten & Denis Wittor; **IV:** Isaac Saba & Philipp Graeser

Übungsblatt III [Ausgabe: 26.04.2011; Abgabe: 03.05.2011]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 7: Kraftfelder (6 Punkte)

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (yz, zx, xy)$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten.

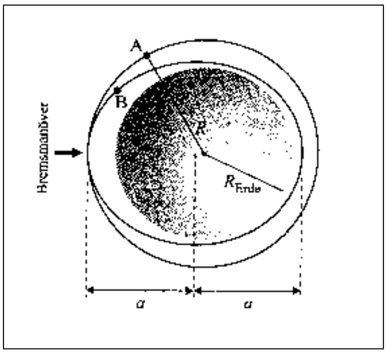
(a) Prüfen Sie, ob das Kraftfeld konservativ ist.

(b) Berechnen Sie mit $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ das Integral $-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ entlang eines Weges Ihrer Wahl.

(c) Bestimmen Sie die Äquipotentialflächen, und skizzieren Sie deren Schnittlinien mit der Ebene $z = 1$.

Aufgabe 8: Rendevous zweier Satelliten (12 Punkte)

Die Satelliten A und B werden von demselben Weltraumbahnhof mit einem Zeitabstand von 12 Minuten in dieselbe kreisförmige Erdumlaufbahn mit Bahnradius R und den Umlaufgeschwindigkeiten $v_A = v_B = 7$ km/s geschossen.



Um ein Rendezvous zu erreichen, wird der später abgeschossene Satellit B in der Erdumlaufbahn durch Zünden der Bremsraketen kurz abgebremst. Dadurch verliert er Energie und nimmt eine Ellipsenbahn mit großer Halbachse $a < R$ ein (siehe Skizze).

Das Zusammentreffen soll erfolgen, wenn der Satellit B nach der Abbremsung die *erste* Ellipsenbahn vollständig durchlaufen hat und im Aphel seine alte Kreisbahn kurz berührt. Die Umlaufzeit der Ellipse muss daher 12 Minuten kürzer sein als die Umlaufzeit der Kreisbahn.

Um welche Geschwindigkeit muss der Satellit B abgebremst werden?

Gehen Sie dafür wie folgt vor:

(a) Überlegen Sie, unter welchen Bedingungen sich eine Kreisbahn einstellt, und leiten Sie daraus den Radius der Kreisbahn ab (Stichwort: Kräftegleichgewicht).

(b) Leiten Sie aus dem dritten Keplerschen Gesetz die große Halbachse der Ellipsenbahn her.

(c) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des Satelliten B im Aphel, indem Sie die durch das Bremsmanöver ausgelöste Energieänderung ΔE berechnen.

Hinweis: Gravitationskonstante $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}, Erdradius $R_{Erde} \approx 6370$ km, Erdmasse $m \approx 5,98 \cdot 10^{24}$ kg.

Aufgabe 9: Sturz der Erde auf die Sonne (12 Punkte)

In dieser Aufgabe soll noch einmal die Nützlichkeit der Keplerschen Gesetze gezeigt werden. Dafür sei die extreme Situation angenommen, dass unsere Erde plötzlich – wodurch auch immer – auf Geschwindigkeit Null abgebremst wird. Dann stellt sich die Frage, wieviel Zeit wir haben, um beispielsweise zum Mars zu fliehen, bevor die Erde auf die Sonne trifft. Nehmen Sie dazu an, dass es sich bei der Sonne um eine Punktmasse handelt – die Ausdehnung der Sonne soll also nicht in die Rechnungen eingehen. Als Erstes soll diese Aufgabe mit Hilfe des Energiesatzes gelöst werden, um danach zu zeigen, dass man mit Hilfe der Keplerschen Gesetze viel leichter zum selben Ergebnis gelangen kann.

(a) (i) Stellen Sie als Erstes den Energiesatz für die Fallbewegung der Erde von der Erdbahn zur Sonne auf. Beachten Sie dabei, dass die Erde zu Anfang im Abstand $R_0 = 1$ AU von der Sonne natürlich nur noch potentielle Energie innehat. Zeigen Sie schließlich, dass durch Auflösen nach der Geschwindigkeit:

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM_\odot}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)^{1/2} \tag{1}$$

für diese Bewegung folgt.

(ii) Die Fallzeit der Erde lässt sich ermitteln, indem Formel (1) über die Zeit integriert wird. Da es sich dabei um eine Gleichung mit getrennten Variablen handelt, lässt sich diese leicht integrieren (Separation der Variablen). Finden Sie damit die Fallzeit, indem Sie die Gleichung nun von R_0 bis 0 integrieren. *Hinweis:* Es gilt $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \pi/2$.

(b) In diesem Aufgabenteil soll schließlich die Nützlichkeit der Keplerschen Gesetze demonstriert werden. Allein das dritte davon ausnutzend kann man nämlich leicht zum selben Ergebnis wie in den vorhergehenden Aufgabenteilen gelangen.

(i) Betrachten Sie dazu die Sturzbahn als eine extreme Ellipse mit verschwindender kleiner Halbachse ($b \to 0$) mit der Sonne in einem Brennpunkt. Wie groß ist somit die große Halbachse?

(ii) Ermitteln Sie dann mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes die Fallzeit, wenn Sie berücksichtigen, dass für ungestörte Bahn und Sturzbahn gleiche Konstanten vorliegen.