Übung Grundlagen Mechanik & Elektrodynamik (SoSe 2011)
Jun-Prof Dr. J. Becker
Übungsgruppen:
I: Dr. Udo Arendt, Tobias Wiengarten; **II:** Katharina Brodatzki & Christopher Körber
III: Tobias Wiengarten & Denis Wittor; **IV:** Isaac Saba & Philipp Graeser

Übungsblatt II [Ausgabe: 19.04.2011; Abgabe: 26.04.2011]

Übungszettel im Netz unter *http://www.tp4.rub.de/hat/*

Aufgabe 4: Erzwungene Schwingung (12 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie untersuchen, wie sich eine äußere Kraft auf einen ungedämpften harmonischen Oszillator auswirkt. Dazu stelle man sich ein (näherungsweise) reibungsfrei schwingendes Spinnennetz vor, dass mit einer externen Kraft der Form $\vec{F}_E = A\,\sin(\omega t)\,\vec{e}_x$ in Schwingung versetzt werde, wobei A und ω konstant seien.

(a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für das so bewegte Netz?

(b) Lösen Sie die in (a) aufgestellte Differentialgleichung für das Spinnennetz mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -A/2\omega$.
Hinweis 1: Zur Bestimmung der partikulären (=speziellen) Lösung benutze man die Methode der Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$x_s(t) = c_1(t) \cdot \exp(i\omega t) + c_2(t) \cdot \exp(-i\omega t) \tag{1}$$

und den Bedingungen:

$$\frac{dc_1}{dt} \cdot \exp(i\omega\, t) + \frac{dc_2}{dt} \cdot \exp(-i\omega\, t) \quad = \quad 0 \tag{2}$$

$$\frac{dc_1}{dt} \cdot i\,\omega\, \exp(i\omega\, t) - i \cdot \omega \frac{dc_2}{dt} \cdot \exp(-i\omega\, t) \quad = \quad A \cdot \sin(\omega\, t)\,, \tag{3}$$

welche zur Bestimmung der Koeffizienten verwendet werden können.
Hinweis 2: $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$

(c) Skizzieren Sie die in (b) bestimmte Lösung, und erklären Sie die physikalische Bedeutung des Ergebnisses.

Aufgabe 5: Kräfte (8 Punkte)

Gegeben sein ein Kraftfeld

$$\vec{F} = y \cdot x \cdot \vec{e}_x + p \cdot x^2 \cdot \vec{e}_y\,. \tag{4}$$

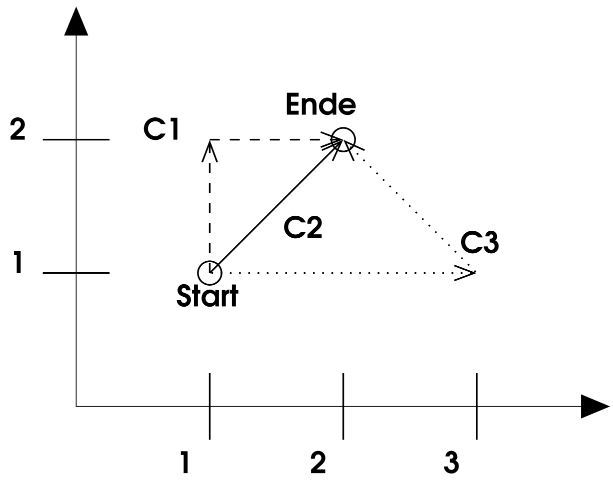
(a) Man berechne die Arbeit, die auf den Wegen C_1, C_2 und C_3 gewonnen wird (siehe Skizze).

(b) Für welchen Wert der Konstanten p ist die Arbeit vom Weg unabhängig?

Aufgabe 6: Wassertropfen im Schwerefeld (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir den Fall eines Wassertropfens im Schwerefeld unter dem Einfluss von Newtonscher Reibung untersucht. In dieser Übungsaufgabe soll nun das gleiche Problem unter dem Einfluss von größenabhängiger Reibung untersucht werden:

$$\vec{F}_{Reibung} = \beta \cdot R^2 \cdot \vec{v}\,. \tag{5}$$



Hier ist β eine Konstante, $\vec{v} = (0,\, 0,\, -v) = \dot{\vec{r}}(t)$ die Geschwindigkeit des Tropfens und $R = R(t)$ sein Radius. Der Regentropfen soll hier als kugelförmig angenommen werden. Desweiteren soll berücksichtigt werden, dass das Volumen des Tropfens mit der Zeit durch Kondensation von Wasserdampf in der Atmosphäre proportional zu seiner Oberfläche zunimmt:

$$\frac{dV}{dt} = \gamma \cdot 4\pi \cdot R^2(t)\,. \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Radius wie folgt von der Zeit abhängt:

$$R(t) = R_0 + \gamma \cdot t\,. \tag{7}$$

Hier sei $R(t = 0) =: R_0$ der Radius zur Anfangszeit $t = 0$.

(b) Die Dichte des Wassertropfens ρ bleibe konstant, so dass die Masse des Tropfens m mit der Zeit zunimmt. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{3}{R} \cdot \gamma\,. \tag{8}$$

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Tropfen in Abhängigkeit der Höhe $z(t)$ auf. *Hinweis:* Hier ist zu beachten, dass $\dot{m} \neq 0$.

(d) Formen Sie die in (c) erhaltene Differentialgleichung um, und überführen Sie sie in eine Differentialgleichung für $v(R)$.
Hinweis 1: Hierzu sollen die Ableitungen d/dt in Ableitungen d/dR überführt werden.
Hinweis 2: Als Endergebnis dieser Teilaufgabe erhalten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dR} + \frac{\epsilon}{\gamma \cdot R} \cdot v = -\frac{g}{\gamma}\,, \tag{9}$$

wobei ϵ eine von Ihnen zu bestimmende Konstante darstellt.

(e) Bestimmen Sie die Lösung $v(R)$ der Differentialgleichung, indem Sie die allgemeine und spezielle Lösung finden und die Anfangswerte $v(t = 0) = 0$ sowie $R(t = 0) = R_0$ verwenden.

(f) Bestimmen Sie schließlich $v(t)$ durch Einsetzen von $R(t)$.

<u>Bonusfrage (2 Punkte):</u> Wie lauten die Grenzwerte von $v(t)$ für $\gamma \cdot t << R_0$ und $\gamma \cdot t >> R_0$?