

**Grundlagen der
Mechanik und Elektrodynamik**
März 2011

Vorbemerkung: Dieses Skript basiert auf der Vorlesung „Grundlagen der Mechanik und Elektrodynamik“ aus dem Wintersemester 2005/2006 und den Sommersemestern 2006, 2008, 2009 und 2010 an der Ruhr-Universität Bochum, gehalten von PD Dr. Horst Fichtner und Dr. Udo Arendt. Es wurde in der vorliegenden LaTeX-Version von Alexander Aab, Caroline Fink, Steffen Meyer und David L. Pohl erstellt.

Das vorliegende Skript kann (und soll ©) kein Lehrbuch ersetzen. Insbesondere ist es nicht so gründlich Korrektur gelesen wie manches Buch. Daher sind wir dankbar für jeden Hinweis auf Fehler!

Inhaltsverzeichnis

I	Theoretische Mechanik	1
1	Historische Einführung	3
2	Newton'sche Mechanik	7
2.1	Moderne Formulierung der Newton'schen Axiome	7
2.2	Inertialsysteme und Galilei-Transformation	9
2.3	Wechselwirkungen und Kräfte	10
2.3.1	Wechselwirkungen	10
2.3.2	Kräfte	10
2.4	Einfache Anwendung der Newton'schen Mechanik	11
2.4.1	Senkrechter Wurf im Erdschwerefeld	11
2.4.2	Fallender Regentropfen	12
2.4.3	Schwingendes Spinnennetz	14
2.5	Schwingungen	15
2.5.1	Freie, harmonische Schwingung	16
2.5.2	Freie, gedämpfte Schwingung	18
2.5.3	Erzwungene, gedämpfte Schwingung	20
2.6	Erhaltungssätze	21
2.6.1	Impulserhaltung	21
2.6.2	Energieerhaltung	21
2.6.3	Drehimpulserhaltung	23
2.7	Bewegung im konservativen Zentralkraftfeld	24
3	Das Zweikörperproblem	31
3.1	Allgemeines zu Mehrteilchensystemen	31
3.2	Erhaltungssätze für Mehrteilchensystem	32
3.2.1	Impulserhaltung	32
3.2.2	Energieerhaltung	33
3.3	Das Zweiteilchensystem	34
3.4	Planetenbewegung als Zweikörperproblem	36
4	Lagrange-Mechanik	37
4.1	Generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten	37
4.2	Die Lagrange-Gleichungen 2. Art	38
4.3	Anwendungsbeispiele	40
4.3.1	Das freie Teilchen ($s=3$)	40
4.3.2	Der schiefe Wurf ($s=3$)	40
4.3.3	Atwood'sche Fallmaschine ($s=1$)	40
4.4	Erhaltungssätze und Symmetrien	41
4.4.1	Anzahl der Erhaltungsgrößen	41
4.4.2	Zyklische Koordinaten	41
4.4.3	Energieerhaltung	42
4.4.4	Impulserhaltung	43

4.5	Das Hamilton-Prinzip	44
5	Der starre Körper	47
5.1	Freiheitsgrade und Bewegung eines starren Körpers	47
5.2	Kinetische Energie und Trägheitstensor eines starren Körpers	48
5.2.1	Kinetische Energie	48
5.2.2	Trägheitstensor	49
5.3	Drehimpuls und Drehimpulssatz	54
5.4	Die Eulerschen Gleichungen	56
5.5	Lagrangefunktion des Starren Körpers	58
II	Theoretische Elektrodynamik	61
1	Historische Einführung	63
2	Die Maxwell-Gleichungen	65
2.1	Die Grundgesetze der Elektrodynamik	65
2.1.1	Das Coulomb-Gesetz	65
2.1.2	Das Ampère-Gesetz	67
2.1.3	Das Faraday-Gesetz	67
2.1.4	Quellenfreiheit des Magnetfeldes	68
2.2	Mathematischer Exkurs: Vektoranalysis	68
2.2.1	Der Nabla-Operator und die vektoranalytischen Operatoren	68
2.2.2	Der Gauß'sche Satz	69
2.2.3	Der Stokes'sche Satz	70
2.3	Anwendung der Sätze von Gauß und Stokes	71
2.4	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	71
2.5	Die Maxwell-Gleichungen	72
3	Elektrostatik	75
3.1	Anwendung des Gauß'schen Satzes	75
3.2	Direkte Lösung der 1. Maxwell-Gleichung	76
3.3	Superpositionsprinzip und Coulomb-Gesetz	77
3.4	Das elektrische Potential	78
3.5	Die mathematische Beschreibung einer Punktladung: die δ -Funktion	80
3.6	Randwertprobleme	82
3.6.1	Verhalten von $\vec{E}(\vec{r})$ und $\Phi(\vec{r})$ an Grenzflächen	83
3.6.2	Poisson- und Laplace-Gleichungen	85
3.6.3	Die Methode der Spiegelladung(en)	86
3.7	Der elektrische Dipol	89
4	Magnetostatik	91
4.1	Anwendung des Stokes'schen Satzes	91
4.2	Direkte Lösung der Maxwell-Gleichungen	92
4.3	Das magnetische Vektorpotential	94
4.4	Das Biot-Savart-Gesetz	96
4.5	Die Kraft auf einen Strom im Magnetfeld	98
4.6	Verhalten von $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ an Grenzflächen	99
5	Elektrodynamik	101
5.1	Die elektrodynamischen Potentiale	101
5.2	Eichtransformationen	103

5.3	Erhaltungssätze in der Elektrodynamik	104
5.4	Ein kurzer Überblick über elektromag. Wellen im Vakuum	106
5.4.1	Homogene Wellengleichung	106
5.4.2	Ebene Wellen	106
5.4.3	Polarisation ebener Wellen	109
III Spezielle Relativitätstheorie		113
1	Grundlagen	115
1.1	Michelson-Morley-Experiment	115
1.2	Die Lorentztransformation	116
1.2.1	Lineare Transformation	116
2	Folgerungen	119
2.1	Gleichzeitigkeit	119
2.2	Zeitdilataion	119
2.3	Längenkontraktion	120
2.4	Geschwindigkeitsaddition	120
3	Kovariante Formulierung	123
3.1	Der Minkowski-Raum	123
3.1.1	Vierervektoren	123
3.1.2	Die Eigenzeit	125
3.2	Vierergeschwindigkeit, Viererimpuls und Viererkraft	125
3.3	Viererstromdichte und Viererpotential	126
3.4	Der Feldstärketensor	127
3.5	Die Lorentz-Transformation der Felder	129

Teil I

Theoretische Mechanik

1 Historische Einführung

- Die Mechanik nimmt ihren **Anfang** mit Aristoteles (384 - 322 v. Chr.).
- Die erste Entwicklung der Mechanik erfolgte **aufgrund und in Übereinstimmung mit der Alltagserfahrung**; die wesentlichen Aussagen des Aristoteles waren:
 - (1) Zur Aufrechterhaltung einer Bewegung wird eine Kraft benötigt.
 - (2) Die Geschwindigkeit ist proportional zur Kraft.
 - (3) Bewegung ist ein Prozess (kein Zustand)

Diese Feststellungen sind zwar anschaulich bzw. der Alltagserfahrung gemäß „plausibel“, aber **falsch** und eignen sich nicht als Axiome oder Grundgesetze der Mechanik.

Bemerkung: Schon Aristoteles schloss, dass es im Vakuum keinen Grund für die Änderung der Bewegung eines Körpers gibt: „... entweder ständige Ruhe oder aber ... unendlich fortgehende Bewegung“. Er betrachtete das aber als absurd und glaubte so die Unmöglichkeit des Vakuums begründen zu können - nicht ahnend, dass er das erste Newtonsche Axiom (s.u.) fast 2000 Jahre vor diesem formuliert hatte!

Die „Frühgeschichte“ der Mechanik lässt sich fortsetzen mit:

- (1) **Archimedes** (3. Jhdt. v. Chr.), Syrakus (Sizilien)
 - Statik, Hebelgesetze, archimedisches Prinzip \cong $\left\{ \begin{array}{l} \text{ältestes noch ungeändert gel-} \\ \text{tendes physikalisches Gesetz} \end{array} \right.$
- (2) **Hipparch** (2. Jhdt. v. Chr.), Rhodos (Ägäisinsel)
 - astronomische Beobachtungen, Helligkeitsskala
- (3) **Ptolemäus** (2. Jhdt. n. Chr.), Alexandria (Ägypten)
 - Beschreibung des Weltsystems im „Almagest“
- (4) **Heron** (2. Jhdt. n. Chr.), Alexandria (Ägypten)
 - „einfache“ Maschinen: Hebel, Schraube, Flaschenzug
- (5) **Pappus** (3./4. Jhdt.), Alexandria (Ägypten)
 - schiefe Ebene: Bewegung, Gleichgewicht
- (6) **Johannes Philoponus** (6./7. Jhdt.), Byzanz (Türkei)
 - Zweifel an Aristotelischer Mechanik (am Bsp. des freien Falls)

(7) **Jordamus Nemorarius** (13. Jhdt.), (Deutschland)

- erste Ansätze zum Energieerhaltungssatz
- „Ist irgendeine Wirkung fähig eine Last um eine gegebene Strecke zu heben, dann kann sie die n -fache Last auf die $1/n$ -fache Höhe heben.“ (sinngemäßes Zitat)

Bemerkung: Erster selbstständiger Schritt der europäischen Wissenschaft nach der Antike und nach den von den Arabern verfeinerten Erkenntnissen

(8) **Nikolaus Kopernikus** (1473 - 1543), Frauenburg (Polen)

- heliozentrisches Weltbild

(9) **Simon Stevin** (1548 - 1620), Leiden (Niederlande)

- Einführung des Kräfteparallelogramms

(10) **Johannes Kepler** (1571 - 1630), Graz/Linz (Österreich) und Prag (Tschechoslowakei)

- Gesetze der Planetenbewegung

(11) **Galileo Galilei** (1564 - 1642), Florenz (Italien)

- Fallgesetze

(12) **Christian Huygens** (1629 - 1695), Den Haag (Niederlande)

- Trägheitsprinzip, Relativitätsprinzip, Zykloidenpendel

(13) **Isaac Newton** (1643 - 1727), Cambridge (England)

- Axiome der modernen Mechanik
- Gravitationsgesetz

Beginn der „**modernen**“ **Mechanik** mit Isaac Newton bzw. der Veröffentlichung seiner „Principia“ (1687), in der die **Grundgesetze der Mechanik** als **Axiome** formuliert sind:

- (1) Jeder Körper verharrt in einem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.
- (2) Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegten Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.
- (3) Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich;
oder: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Bemerkung: Teile der „Principia“ online: <http://members.tripod.com/~gravitee/>

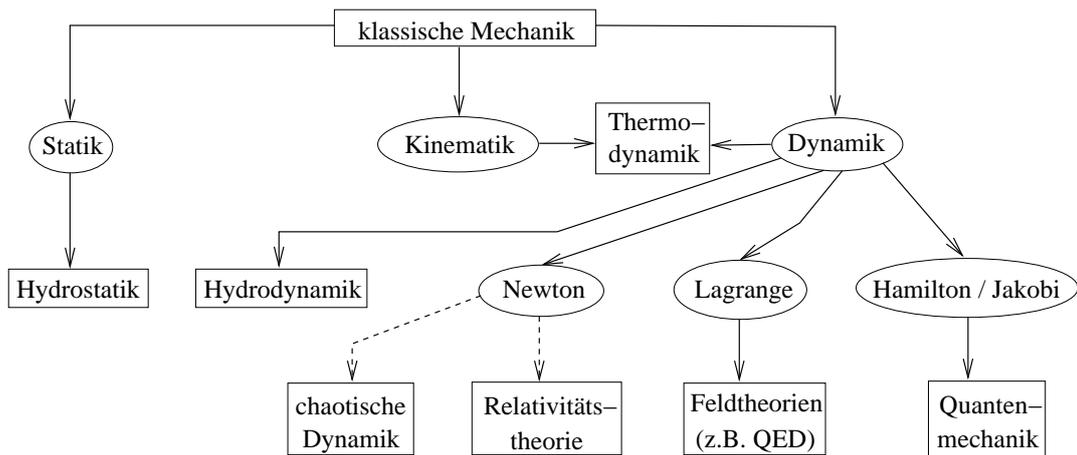


Abbildung 1.1: Der Aufbau der Theoretischen Physik

Bemerkung: Zitat aus **Leonardo da Vinci's** (1452-1519) Tagebuch: „Die Mechanik ist das Prinzip der mathematischen Wissenschaften, weil man mit ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt.“

2 Newton'sche Mechanik

2.1 Moderne Formulierung der Newton'schen Axiome

Die Theorie der Mechanik beruht auf den drei Newton'schen Axiomen und einem Zusatz (Korollar). In moderner Formulierung lauten diese Grundgesetze:

Axiom 1 ($\hat{=}$ lex prima $\hat{=}$ Galilei'sches Trägheitsgesetz)

Es gibt Bezugs- oder Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreie Körper (Massenpunkt) im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt.

Axiom 2 ($\hat{=}$ lex secunda $\hat{=}$ Bewegungsgesetz)

Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegendes Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}) \underset{\substack{\text{wenn} \\ m \neq m(t)}}{=} m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \dot{\vec{v}} = m \vec{a}$$

Axiom 3 ($\hat{=}$ lex tertia $\hat{=}$ Reaktionsprinzip)

Sei \vec{F}_{12} (\vec{F}_{21}) die Kraft des Körpers 1 (2) auf den Körper 2 (1), dann gilt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Korollar ($\hat{=}$ lex quarta $\hat{=}$ Superpositionsprinzip)

Wirken auf einen Körper (Massenpunkt) mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, so addieren sich diese vektoriell zu einer resultierenden Kraft \vec{F} gemäß:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Zum vollen Verständnis dieser Axiome sind folgende **Definitionen** erforderlich:

- (1) Kraft bzw. Kraftvektor \vec{F} $\hat{=}$ diejenige „Anstrengung“, die erforderlich ist, den Bewegungszustand oder die Gestalt eines Körpers zu ändern
- (2) Masse m $\hat{=}$ skalare Materialeigenschaft eines Körpers, die seinen Trägheitswiderstand gegenüber Bewegungsänderungen bestimmt
- (3) Massenpunkt (MP) $\hat{=}$ physikalischer Körper der Masse m mit allseitig vernachlässigbarer Ausdehnung
- (4) kräftefreier MP $\hat{=}$ ein MP, der keiner äußeren Einwirkung unterliegt
- (5) Geschwindigkeit bzw. Geschwindigkeitsvektor \vec{v} $\hat{=}$ zeitliche Änderung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ eines Körpers:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$
- (6) Beschleunigung bzw. Beschleunigungsvektor \vec{a} $\hat{=}$ zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors eines Körpers:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$
- (7) (linearer) Impuls bzw. Impulsvektor \vec{p} $\hat{=}$ Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsvektor eines Körpers:

$$\vec{p} = m \vec{v} = m \dot{\vec{r}}$$

Bemerkung: Die Gültigkeit der Newton-Axiome erfordert die Existenz einer **absoluten Zeit** und eines **absoluten Raumes** (beide existieren aber gemäß der Relativitätstheorie (s.u.) nicht!)

Bemerkung: $\vec{F} = m \vec{a}$ ist die **dynamische Grundgleichung** der Newton'schen Mechanik und setzt $m \neq m(t)$ voraus (Allgemein: $m = m(t)$ für viele Anwendungen wie z.B. Auto, Rakete oder Relativitätstheorie)

Bemerkung: Axiom I ist ein Spezialfall von Axiom II, denn es gilt:

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{const.}$$

Bemerkung: Das Korollar beschreibt das Kräfteparallelogramm. In Newtons Worten: „Ein Körper, auf den zwei Kräfte gleichzeitig wirken, bewegt sich entlang der Diagonalen eines Parallelogramms in derselben Zeit, in der er sich entlang der Seiten des Parallelogramms unter Einwirkung jeweils nur einer der beiden Kräfte bewegen würde.“

Also:

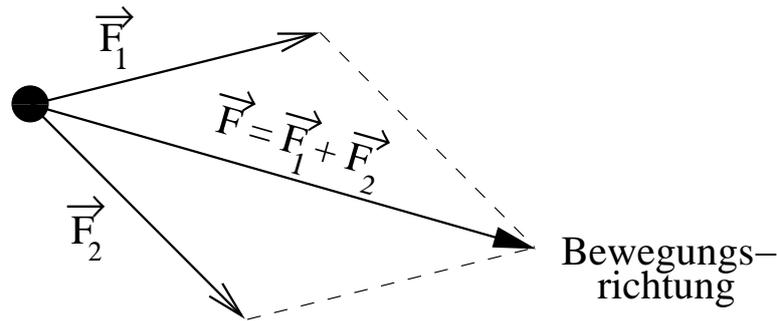


Abbildung 2.1: Kräfteparallelogramm

2.2 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Definition: Gelten in einem Bezugs- oder Koordinaten-System die Newton'schen Axiome, dann bezeichnet man dieses als **Inertialsystem**.

Bemerkung: Nicht alle Bezugssysteme sind Inertialsysteme (z.B. rotierende Systeme).

Damit ist die Frage nach der **Gesamtheit aller Inertialsysteme** sinnvoll: Seien Σ, Σ' zwei Bezugssysteme mit $\Sigma = \Sigma'$ bei $t = 0$. Mit den Annahmen $t = t'$ (absolute Zeit) und $m = m'$ (absolute Masse) gilt $\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'$. Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} &\stackrel{!}{=} \ddot{\vec{r}}' & \Leftrightarrow & \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}' = 0 & \quad \left| \int \dots dt \right. \\
 & & \Rightarrow & \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}' = \vec{v} = \text{const.} & \quad \left| \int \dots dt \right. \\
 & & \Rightarrow & \vec{r} - \vec{r}' = \vec{v} t + \Delta \vec{r}_0 \\
 & & \Leftrightarrow & \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} t - \Delta \vec{r}_0 \\
 & & \Rightarrow & \boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} t \quad ; \quad t' = t} & \quad \text{Galilei-Transformation} \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & \boxed{\Delta \vec{r}_0 = 0 \text{ wegen} \\
 & & & \Sigma = \Sigma' \text{ bei } t = 0} &
 \end{aligned}$$

Sie ist die allgemeinste Transformation, die in der Newtonschen Mechanik von einem Inertialsystem Σ in ein anderes Inertialsystem Σ' überführt. Es gilt also: Wenn Σ ein Inertialsystem ist, dann ist Σ' genau dann ebenfalls ein Inertialsystem, wenn $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} t$ gilt.

Bemerkung: Es gibt unendlich viele Inertialsysteme.

Bemerkung: Prinzipiell ist bei der Galilei-Transformation auch eine Drehung um einen zeit-unabhängigen Winkel möglich (siehe z.B. Fließbach: Mechanik), d.h. die Achsen zweier Inertialsysteme müssen nicht paarweise orthogonal sein.

2.3 Wechselwirkungen und Kräfte

... sollten begrifflich unterschieden werden, da Folgendes gilt:

2.3.1 Wechselwirkungen

Die scheinbar zahlreichen in der Natur beobachtbaren Wechselwirkungen lassen sich auf **vier fundamentale Wechselwirkungen** zurückführen:

- (1) Gravitative Wechselwirkung
- (2) Elektromagnetische Wechselwirkung
- (3) Schwache Wechselwirkung
- (4) Starke Wechselwirkung

Es besteht die begründete **Hoffnung**, diese fundamentalen Wechselwirkungen auf **eine** Wechselwirkung zurückzuführen.

2.3.2 Kräfte

(A) Die den zwei „makroskopischen“ (Alltagserfahrung!) fundamentalen Wechselwirkungen zugeordneten Kräfte:

Gravitationskraft (Newton): $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$

(mit der Gravitationskonstante $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$)

Coulomb-Kraft (Coulomb): $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$

(mit der Dielektrizitätskonstante [des Vakuums] $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{Vm}}$)

Lorentz-Kraft (Lorentz): $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

(wobei \vec{v} die Geschwindigkeit der Ladung q bezeichnet)

Bemerkung: Für Bewegungen nahe der Erdoberfläche gilt für die Gravitationskraft:

$$\boxed{h \ll R_E}$$

$$|\vec{F}| = F = m \frac{G M_E}{(R_E + h)^2} \Big|_{h \ll R_E} \approx m \frac{G M_E}{R_E^2} =: m g ; \quad g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Messung von $g = \frac{G M_E}{R_E^2}$ erlaubt die Bestimmung der Erdmasse!

(B) Beispiele für weitere Kräfte:

Reibung zwischen Festkörpern:

Haftreibung: $|\vec{F}| = \mu_s |\vec{N}|$ (statische Reibungskraft)

Gleitreibung: $|\vec{F}| = \mu_k |\vec{N}|$ (kinematische Reibungskraft)

mit \vec{N} als die die reibenden Flächen zusammenhaltende Normalkraft. μ_s und μ_k sind Materialkonstanten.

Reibung in Gasen oder Flüssigkeiten:

Es gilt: $\vec{F} = -\mu(v) \vec{v}$ mit $v = |\vec{v}|$ und

$$\begin{aligned} \mu(v) &= \text{const.} && \hat{=} \text{ Stokes'sche Reibung} \\ \mu(v) &= \alpha |\vec{v}| = \alpha v && \hat{=} \text{ Newton'sche Reibung} \end{aligned}$$

Bemerkung: Reibungskräfte sind bis heute nicht vollständig verstanden, d. h. die Ansätze zu ihrer Beschreibung sind oft empirisch.

lineare Rückstellkraft:

In vielen physikalischen Systemen (z.B. Feder, Bogensehne) erfährt ein Körper bei einer Auslenkung $\Delta \vec{r}$ aus seiner Gleichgewichtslage ($\vec{r} = 0$) eine Kraft (Hooke'sches Gesetz):

$$\vec{F} = -k \Delta \vec{r} \quad ; \quad k = \text{const.} > 0$$

Bemerkung: Wegen der dann oft resultierenden harmonischen Schwingung wird ein so beschriebenes System **harmonischer Oszillator** genannt. Dieser ist wichtig wegen

- seiner mathematisch strengen Behandelbarkeit
- seiner Funktion als gute Approximation für viele Situationen (z.B. kleine Störungen)
- seines entsprechend häufigen Auftretens in der Mechanik, Elektrodynamik und Quantenmechanik

2.4 Einfache Anwendung der Newton'schen Mechanik

2.4.1 Senkrechter Wurf im Erdschwerefeld

Ein Stein der Masse m werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ aus einer Höhe $h_0 > 0$ über dem Boden senkrecht nach oben geworfen. Wie lautet die Bahnkurve $h(t)$ und wann schlägt der Stein mit welcher Geschwindigkeit auf den Boden auf?

Unter Vernachlässigung der Luftreibung gilt:

Dynamische Grundgleichung

Betrachtung nur der z-Koordinate: $\vec{r} = h \vec{e}_z$	↓	\Leftrightarrow	$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$	\Leftrightarrow	$m \ddot{h} = -mg$	\Leftrightarrow	$\ddot{h} = -g$	Bewegungsgleichung
\Rightarrow	$\dot{h} = -gt + v_0$	\Rightarrow	$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$		\Rightarrow	Bahnkurve		

Aufschlagzeitpunkt:

$$\begin{aligned}
 h(t) \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + h_0 = 0 \\
 &\Leftrightarrow t^2 - \left(\frac{2v_0}{g}\right) t - \left(\frac{2h_0}{g}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h_0}{g}} \\
 &\stackrel{\boxed{t>0}}{\Rightarrow} t_{\text{Aufschlag}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h_0}{g}} \quad \text{Aufschlagzeitpunkt}
 \end{aligned}$$

Aufschlaggeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{Aufschlag}} &= \dot{h}(t_A) = -gt_A + v_0 \\
 &= -v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} + v_0 = -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \quad \text{Aufschlaggeschwindigkeit}
 \end{aligned}$$

2.4.2 Fallender Regentropfen

Ein Regentropfen der Masse m löse sich zum Zeitpunkt t_0 in der Höhe $h_0 > 0$ mit der Fallgeschwindigkeit $v_0 < 0$ aus (s)einer Wolke. Auf den Tropfen wirke eine Newton'sche Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha |\vec{v}| \vec{v}$; $\alpha = \text{const} > 0$. Zu bestimmen sind die Funktionen $h(t)$, $v(t) = \dot{h}(t)$, die asymptotische Fallgeschwindigkeit v_∞ , sowie die typische Zeitdauer bis letztere erreicht ist.

Dynamische Grundgleichung:

$$\begin{aligned}
 m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} &\Leftrightarrow m \ddot{\vec{r}} = m \vec{g} - \alpha |\vec{v}| \vec{v} \Leftrightarrow \boxed{m \ddot{h} = -m g + \alpha v^2} \quad \text{Bewegungsgleichung} \\
 &\quad \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \quad \quad \boxed{\vec{r} = h \vec{e}_z}
 \end{aligned}$$

Asymptotische Fallgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 v \stackrel{!}{=} \text{const} &\Leftrightarrow \dot{h} = \text{const} \Rightarrow \ddot{h} = 0 \Leftrightarrow -m g + \alpha v_\infty^2 = 0 \\
 &\Rightarrow v_\infty = -\sqrt{\frac{m g}{\alpha}} \quad (< 0, \text{ da } \vec{v} \text{ nach unten gerichtet ist!})
 \end{aligned}$$

Geschwindigkeitsverlauf:

$$\begin{aligned}
m \ddot{h} &= -m g + \alpha v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{\alpha} \dot{v} = v^2 - v_\infty^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{\alpha} \frac{dv}{dt} = v^2 - v_\infty^2 \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{v^2 - v_\infty^2} \frac{dv}{dt} &= \frac{\alpha}{m} \quad \Bigg| \quad \int_{t_0}^t \dots dt \\
\Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{v'^2 - v_\infty^2} &= \frac{\alpha}{m} \int_{t_0}^t dt' \quad \Leftrightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{2 v_\infty} \left(\frac{1}{v' - v_\infty} - \frac{1}{v' + v_\infty} \right) dv' = \frac{\alpha}{m} (t - t_0) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2 v_\infty} \left\{ \left(\ln |v - v_\infty| - \ln |v + v_\infty| \right) - \left(\ln |v_0 - v_\infty| - \ln |v_0 + v_\infty| \right) \right\} &= \frac{\alpha}{m} (t - t_0) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2 v_\infty} \ln \left\{ \left(-\frac{v_\infty - v}{v + v_\infty} \right) \left(-\frac{v_0 + v_\infty}{v_\infty - v_0} \right) \right\} &= \frac{\alpha}{m} (t - t_0) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2 v_\infty} \ln \left\{ A \left(\frac{v - v_\infty}{v + v_\infty} \right) \right\} &= \frac{\alpha}{m} (t - t_0); \quad A := \frac{v_0 + v_\infty}{v_0 - v_\infty} < 0 \\
\Leftrightarrow \quad v - v_\infty &= \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{2 \alpha v_\infty}{m} (t - t_0) \right\} (v + v_\infty) \\
\Leftrightarrow \quad v \left(1 - \frac{1}{A} \exp \{ \dots \} \right) &= v_\infty \left(1 + \frac{1}{A} \exp \{ \dots \} \right) \quad \Bigg| \cdot (v_0 + v_\infty) \\
\Rightarrow v(t) &= v_\infty \frac{(v_0 + v_\infty) + (v_0 - v_\infty) \exp \{ \dots \}}{(v_0 + v_\infty) - (v_0 - v_\infty) \exp \{ \dots \}} = v_\infty \frac{v_0 (1 + \exp \{ \dots \}) + v_\infty (1 - \exp \{ \dots \})}{v_0 (1 - \exp \{ \dots \}) + v_\infty (1 + \exp \{ \dots \})}
\end{aligned}$$

Grenzfälle:

$$\begin{aligned}
t = t_0 &\Rightarrow v(t_0) = v_\infty \frac{2 v_0}{2 v_\infty} = v_0 \\
t \rightarrow \infty &\Rightarrow v(t \rightarrow \infty) = v_\infty \frac{v_0 + v_\infty}{v_0 + v_\infty} = v_\infty
\end{aligned}$$

Zeitdauer, nach der v_∞ erreicht wird:

$$\Delta t = t - t_0 \geq \frac{m}{2 \alpha |v_\infty|} = \frac{|v_\infty|}{2 g} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}$$

Grenzfälle:

$$\begin{aligned}
\alpha \rightarrow 0 &\Rightarrow \Delta t \rightarrow \infty \\
\alpha \rightarrow \infty &\Rightarrow \Delta t \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Bahnkurve:

$$v(t) = v_\infty \frac{B + C \exp \{ \dots \}}{B - C \exp \{ \dots \}} = v_\infty \left\{ 1 + \frac{2 C \exp \{ \dots \}}{B - C \exp \{ \dots \}} \right\}; \quad \begin{array}{l} B = v_0 + v_\infty \\ C = v_0 - v_\infty \end{array}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\dot{h} = \frac{dh}{dt} = v &\Rightarrow dh = v dt \\
\Rightarrow h(t) - h_0 &= \int_{t_0}^t v(t) dt = \int_{t_0}^t \left\{ 1 + \frac{2 C \exp \{ \dots \}}{B - C \exp \{ \dots \}} \right\} dt \\
&= v_\infty \left[t + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln |B - C \exp \{ \dots \}| \right]_{t_0}^t
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(t) = h_0 + v_\infty \left\{ t + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln \left[C \exp \{ \dots \} - B \right] - t_0 - \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln [C - B] \right\}$$

$$\Rightarrow h(t) = h_0 + v_\infty \left\{ t - t_0 + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln \left[\frac{C \exp \left\{ \frac{2\alpha v_\infty}{m} (t - t_0) \right\} - B}{C - B} \right] \right\}$$

Grenzfälle: $h(t_0) = h_0 + v_\infty \left\{ 0 + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln 1 \right\} = h_0$

$t > t_0 + \Delta t \Rightarrow h(t) \approx h_0 + v_\infty \left\{ t - t_0 + \frac{m}{\alpha v_\infty} \ln \left(\frac{-B}{C - B} \right) \right\} \hat{=} \text{lineare Funktion}$

Vergleich mit freiem Fall (siehe 2.4.1):

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + h_0 \\ &= -\frac{1}{2} g \left(t^2 - \frac{2v_0}{g} t \right) + h_0 \\ &= -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} + h_0 \end{aligned}$$

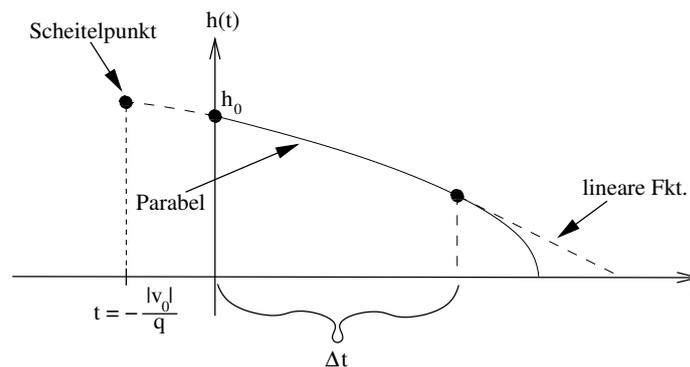


Abbildung 2.2: Der freie Fall

2.4.3 Schwingendes Spinnennetz

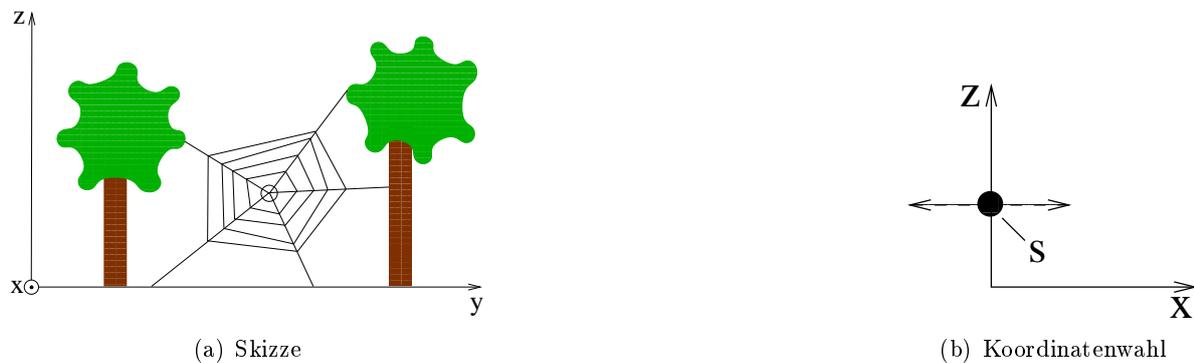


Abbildung 2.3: System einer schwingenden Spinne

Das Spinnennetz schwingt nach dem Windstoß: „Netzform“ bewirkt Rückstellkraft proportional zur Auslenkung (Hooke'sches Gesetz):

$$\vec{F} = -k x \vec{e}_x \quad ; \quad k > 0$$

Masse des Systems „Netz + Spinne“ sei m , betrachtet werde die Bewegung des Schwerpunktes S ohne Luftreibung :

Dynamische Grundgleichung:

$$m \vec{r}'' = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m \ddot{x} = -k x \quad \Leftrightarrow \quad m \ddot{x} + k x = 0 \quad (\star)$$

Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} \text{Da } \ddot{x} \text{ bis auf Konstante gleich } x : \quad & x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ & \dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t) \\ & \ddot{x}(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t) - B \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

In (\star) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -m A \omega^2 \sin(\omega t) - m B \omega^2 \cos(\omega t) + k A \sin(\omega t) + k B \cos(\omega t) = 0 \\ \Leftrightarrow & (-m \omega^2 + k) A \sin(\omega t) + (-m \omega^2 + k) B \cos(\omega t) = 0 \\ \Rightarrow & -m \omega^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \hat{=} \quad \text{„Schwingungsfrequenz“} \end{aligned}$$

Die Amplituden A und B folgen aus den

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Für } t = 0 \text{ gilt:} \quad & x(0) = B \quad \Rightarrow \quad B = x(0) \\ & \dot{x}(0) = A \omega \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\omega} \dot{x}(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + x(0) \cos(\omega t)} \quad \text{Bahnkurve}$$

Also: Netz (+Spinne) schwingt harmonisch, ist also ein „harmonischer Oszillator“

2.5 Schwingungen

Die grundlegenden Schwingungsformen (harmonische, gedämpfte bzw. erzwungene Schwingung) ergeben sich aus folgender dynamischer Grundgleichung:

$$\begin{aligned} m \vec{r}'' &= \vec{F}_H + \vec{F}_R + \vec{F}_E \\ \text{mit: } \vec{F}_H &= \text{Rückstellkraft} \\ \vec{F}_R &= \text{Reibungskraft} \\ \vec{F}_E &= \text{externe (periodische) Kraft} \end{aligned}$$

Um die Notation im Folgenden übersichtlich zu halten, sei der **1-dim. Fall** betrachtet, für den $x = 0$ die Ruhelage sei. Außerdem:

$$\begin{aligned}\vec{F}_H &= -k x \vec{e}_x && ; && k > 0 && \text{(Hooke'sches Gesetz)} \\ \vec{F}_R &= -\mu v_x \vec{e}_x = -\mu \dot{x} \vec{e}_x && ; && \mu > 0 && \text{(Stokes'sche Reibung)} \\ \vec{F}_E &= F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x && ; && F_0 > 0 && \text{(harmonisch variierende Kraft)}\end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Wahl der Kräfte führt auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Eine weitgehende **analytische** Behandlung ist möglich.

Bemerkung: Im Fall der Newton'sche Reibung (s.o.) ergibt sich eine nichtlineare Dgl.

Für den 1-dim. Fall reduziert sich die obige allgemeine Form der dynamischen Grundgleichung mit $\vec{r} = \ddot{x} \vec{e}_x$ auf:

$$\begin{aligned}m \ddot{x} &= -k x - \mu \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) \\ \Leftrightarrow & \boxed{m \ddot{x} + \mu \dot{x} + k x = F_0 \cos(\omega t)}\end{aligned}$$

Man unterscheidet für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}\mu = 0 & ; F_0 = 0 && \hat{=} && \text{freie, harmonische Schwingung} \\ \mu \neq 0 & ; F_0 = 0 && \hat{=} && \text{freie, gedämpfte Schwingung} \\ \mu \neq 0 & ; F_0 \neq 0 && \hat{=} && \text{erzwungene, gedämpfte Schwingung}\end{aligned}$$

die im Folgenden diskutiert werden.

2.5.1 Freie, harmonische Schwingung ($\mu = 0, F_0 = 0$)

Die dynamische Grundgleichung nimmt folgende Form an:

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Lösungsansatz ($a, b \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}x(t) &= a \exp\{bt\} \\ \dot{x}(t) &= ab \exp\{bt\} \\ \ddot{x}(t) &= ab^2 \exp\{bt\}\end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Form des Lösungsansatzes heißt „Euler'scher Ansatz“.

Einsetzen ergibt:

$$b^2 a \exp\{bt\} + \frac{k}{m} a \exp\{bt\} = 0 \Rightarrow b^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow b_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0$$

Form der **allgemeinen Lösung**:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a_1 \exp\{i \omega_0 t\} + a_2 \exp\{-i \omega_0 t\}$$

Da die **physikalische Lösung** reell sein muss, verwende die Euler'sche Formel $\exp\{i \alpha\} = \cos \alpha + i \sin \alpha$:

$$\Rightarrow x(t) = a_1 [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] + a_2 [\cos(-\omega_0 t) + i \sin(-\omega_0 t)]$$

$$= (a_1 + a_2) \cos(\omega_0 t) + i (a_1 - a_2) \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

Da $a_{1,2} \in \mathbb{C}$ und $a_1 \neq a_2$, folgt wegen $x(t) \stackrel{!}{=} \bar{x}(t)$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2) \cos(\omega_0 t) + i (a_1 - a_2) \sin(\omega_0 t) \stackrel{!}{=} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \cos(\omega_0 t) - i (\bar{a}_1 - \bar{a}_2) \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \\ a_1 - a_2 &= -(\bar{a}_1 - \bar{a}_2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{„}\oplus\text{“} : 2a_1 = 2\bar{a}_2 \\ \text{„}\ominus\text{“} : 2a_2 = 2\bar{a}_1 \end{array} \right\} a_1 = \bar{a}_2 \Rightarrow \bar{a}_1 = a_2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_1 + \bar{a}_1 = B \\ a_1 - a_2 &= a_1 - \bar{a}_1 = -iA \end{aligned} \right\} x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}$$

Mit Hilfe von **Anfangsbedingungen** bei $t = 0$ folgt wieder (s.o.)

$$A = \frac{1}{\omega_0} \dot{x}(0), \quad B = x(0)$$

und

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x(0) \cos(\omega_0 t)$$

Skizze:

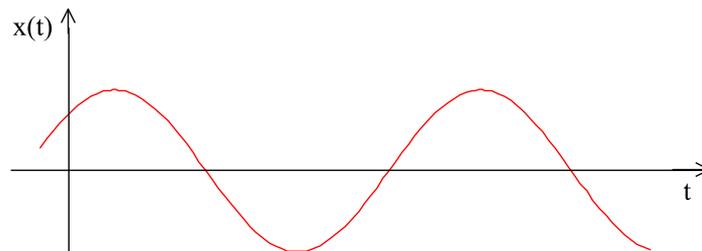


Abbildung 2.4: Freie, harmonische Schwingung

2.5.2 Freie, gedämpfte Schwingung ($\mu \neq 0, F_0 = 0$)

Hier gilt: $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \left(\frac{\mu}{m}\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

Lösungsansatz ($a, b \in \mathbb{C}$):

$$x(t) = a \exp\{bt\} \Rightarrow \dot{x}(t) = ab \exp\{bt\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = ab^2 \exp\{bt\}$$

Einsetzen:

$$b^2 + \left(\frac{\mu}{m}\right)b + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow b_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{D}$$

$$\boxed{D := \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Form der allgemeinen Lösung: $x(t) = a_1 \exp\{b_1 t\} + a_2 \exp\{b_2 t\}$

Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

$$D \left\{ \begin{array}{l} < 0 \hat{=} \text{schwache} \\ = 0 \hat{=} \text{kritische} \\ > 0 \hat{=} \text{starke} \end{array} \right\} \text{ Dämpfung}$$

(1) Schwache Dämpfung $D < 0$:

$$\begin{array}{l} \text{Schwingungsfrequenz:} \\ \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2} = \sqrt{-D} \\ \Rightarrow b_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2} = -\frac{\mu}{2m} \pm i\omega \\ \Rightarrow x(t) = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[a_1 \exp\{i\omega t\} + a_2 \exp\{-i\omega t\} \right] \\ = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[(a_1 + a_2) \cos(\omega t) + i(a_1 - a_2) \sin(\omega t) \right] \end{array}$$

Aus:

$$x(0) = a_1 + a_2 ; \quad \dot{x}(0) = -\frac{\mu}{2m}(a_1 + a_2) + i\omega(a_1 - a_2) = -\frac{\mu}{2m}x(0) + i\omega(a_1 - a_2)$$

folgt: $\boxed{x(t) = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[\left(\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0)\right) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + x(0) \cos(\omega t) \right]}$

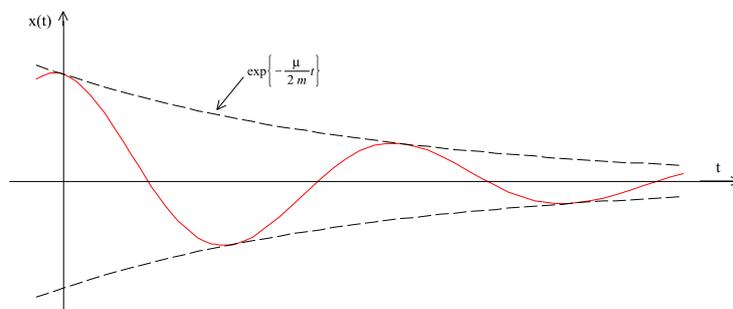


Abbildung 2.5: Schwach gedämpfte Schwingung

(2) **kritische Dämpfung $D = 0$:**

$\Rightarrow b_1 = b_2 = -\frac{\mu}{2m}$; d.h. $\omega = \sqrt{-D} = 0$ und man findet nur eine spezielle Lösung:
 $x_1 = a_1 \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\}$. Die zweite Lösung folgt aus einer Grenzwertbetrachtung der Lösung für $D < 0$:

$$\omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t) \rightarrow 1; \quad \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \rightarrow t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[\left(\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0)\right)t + x(0) \right]}$$

Bemerkung: - da keine Schwingung: „aperiodischer Grenzfall“
 - praktische Anwendung: Zeigermessinstrumente, Türschließung

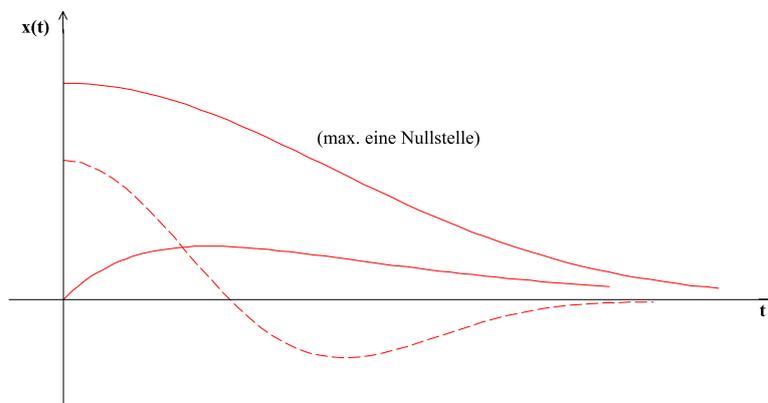


Abbildung 2.6: kritische Dämpfung, aperiodischer Grenzfall

(3) **Starke Dämpfung $D > 0$:**

$$\Rightarrow b_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[a_1 \exp\left\{\sqrt{D}t\right\} + a_2 \exp\left\{-\sqrt{D}t\right\} \right]$$

Aus: $x(0) = a_1 + a_2$; $\dot{x}(0) = -\frac{\mu}{2m}(a_1 + a_2) + \sqrt{D}(a_1 - a_2)$

folgt: $a_{1,2} = \frac{1}{2} \left[x(0) \pm \frac{1}{\sqrt{D}} \left(\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0) \right) \right]$

Damit:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{\mu}{2m}t\right\} \left[\left(x(0) + \frac{1}{\sqrt{D}} \left[\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0) \right] \right) \exp\left\{\sqrt{D}t\right\} + \left(x(0) - \frac{1}{\sqrt{D}} \left[\dot{x}(0) + \frac{\mu}{2m}x(0) \right] \right) \exp\left\{-\sqrt{D}t\right\} \right]}$$

Bemerkung: „Aperiodische Kriechbewegung“ ähnlich zu (2) aber mit kleinerer „Amplitude“ und längerer Rückkehr zur Ruhelage.

2.5.3 Erzwungene, gedämpfte Schwingung

Man hat: $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)}$

Also: inhomogene Dgl. \Rightarrow allgemeine Lösung = allgemeine Lösung der homogenen Dgl. + spezielle (= partikuläre) Lösung der inhomogenen Dgl.

homogene Lösung: siehe 2.5.2

inhomogene Lösung: nach „Einschwingzeit“ schwingt das System mit der Frequenz ω , daher

Ansatz für partikuläre Lösung ($a \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}$):

$$x(t) = a \exp\{i\omega t\} \Rightarrow \dot{x}(t) = i\omega a \exp\{i\omega t\} \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 a \exp\{i\omega t\}$$

$$\cos(\omega t) \mapsto \exp(i\omega t)$$

Einsetzen: $-a\omega^2 m + i\omega \mu a + a k = F_0$

$$\Rightarrow a = \frac{F_0}{k - \omega^2 m + i\omega \mu} \stackrel{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}{=} \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\mu}{m}\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\mu}{m}\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}} \stackrel{!}{=} |a| \exp\{i\phi\}$$

$$\Rightarrow |a| = \sqrt{a\bar{a}} = \frac{F_0}{m} \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}}}$$

$$\Phi = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(a)}{\text{Re}(a)} \right\} = \arctan \left\{ -\frac{\mu \omega / m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} = \arctan \left\{ \frac{\mu \omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \right\}$$

$$\Rightarrow x_{inhomog}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\exp\{i[\omega t + \phi]\}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}}} \hat{=} \text{partikuläre Lösung der inhom. Dgl.}$$

Physikalisch relevant ist der Realteil, daher lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t) = \text{Re} \left(x_{inhomog}(t) \right) + x_{homogen}(t)$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{\boxed{t \gg \frac{2m}{\mu}}} \quad \boxed{x(t) \approx \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2}}}$$

Bemerkung:

- max. Amplitude für $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{2}} \hat{=} \text{Resonanzfrequenz}$
- $\mu = 0 \Rightarrow \omega_R = \omega_0 \Rightarrow |a| = \infty \hat{=} \text{Resonanzkatastrophe}$
- $\frac{\mu^2}{2} > \omega_0^2 \Rightarrow \text{keine Resonanz mehr}$

Skizze:

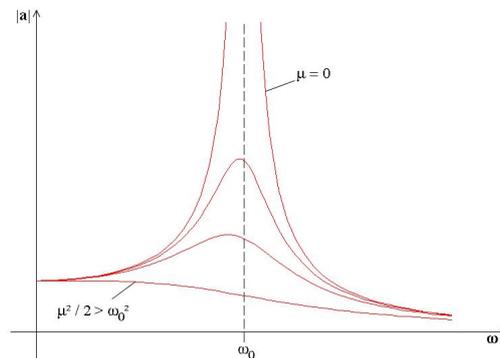


Abbildung 2.7: Grenzfälle bei erzwungener, gedämpfter Schwingung

2.6 Erhaltungssätze

Idee: alternative Problemlösung nicht über die dynamische Grundgleichung

2.6.1 Impulserhaltung

Die Motivation zur Suche nach Erhaltungssätzen ergibt sich für den kräftefreien Fall aus dem 2. Newton'schen Axiom:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \xrightarrow{\vec{F}=0} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.} \quad \hat{=} \quad \text{„Impulserhaltung“}$$

Folgerung: Für den kräftefreien Massenpunkt gilt der Impulserhaltungssatz.

Somit erscheint die Frage nach weiteren Erhaltungsgrößen bzw. -sätzen sinnvoll.

2.6.2 Energieerhaltung

Aus der dynamischen Grundgleichung folgt:

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \quad \Big| \cdot \dot{\vec{r}} \\ \Rightarrow m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{2} \frac{d\dot{\vec{r}}^2}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Big| \int_{t_1}^{t_2} \dots dt \\ \Rightarrow \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}}_2^2 - \dot{\vec{r}}_1^2) &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m v^2} \quad \text{kinetische Energie} \quad \boxed{W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \quad \text{Arbeit}$$

folgt

$$\frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2 = W \quad \Leftrightarrow \quad T_2 - T_1 = W$$

Folgerung: Die Änderung der kinetischen Energie eines Massenpunktes entspricht der an ihm (von außen) geleisteten Arbeit.

Offenbar ist die kinetische Energie keine Erhaltungsgröße. Wir definieren daher "**konservative**" **Kräfte** durch die Wegunabhängigkeit des Integrals:

$$\boxed{V(\vec{r}) = - \int_{P_0}^P \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad \text{Potentielle Energie} \quad \text{oder} \quad \text{Potential}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = V_1 - V_2 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 = W = V_1 - V_2 &\Leftrightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1 \\ \Rightarrow T + V = E = \text{const.} &\hat{=} \text{„Energieerhaltung“} \end{aligned}$$

Folgerung: Für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gilt der Energieerhaltungssatz.

Bemerkung: Für $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ist E i.A. zeitabhängig, also keine Erhaltungsgröße.

Bemerkung: Die Leistung $P = \frac{dW}{dt}$ ist allgemein, also auch für nicht konservative Kräfte, definiert.

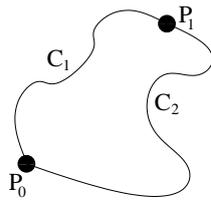
Berechnung von $\vec{F}(\vec{r})$ aus dem Potential $V(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ \Rightarrow \frac{dV(\vec{r})}{dt} &= \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \stackrel{!}{=} -\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \Rightarrow &\boxed{\vec{F} = - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = - \text{grad} V} \quad \text{„konservatives Kraftfeld“} \end{aligned}$$

Beispiel: In kartesischen Koordinaten gilt mit $V = V(x, y, z)$:

$$\vec{F} = - \text{grad} V = - \vec{\nabla} V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \vec{e}_z$$

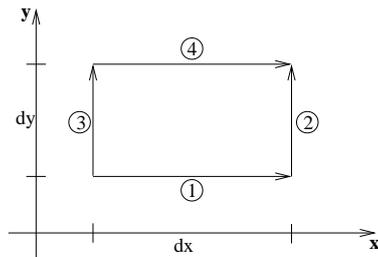
Damit die Definition des Potentials $V(\vec{r})$ als Wegintegral sinnvoll ist, muss das Integral wegunabhängig sein.



$$-\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{!}{=} -\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Abbildung 2.8: Wegunabhängigkeit

Wähle kartesische Koordinaten:



$$\begin{aligned} & \int_{(1)} F_x(x, y) dx + \int_{(2)} F_y(x + dx, y) dy \\ & \stackrel{!}{=} \int_{(3)} F_y(x, y) dy + \int_{(4)} F_x(x, y + dy) dx \end{aligned}$$

Abbildung 2.9: Beispieldreieck

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \int \{F_y(x + dx, y) - F_y(x, y)\} dy - \int \{F_x(x, y + dy) - F_x(x, y)\} dx = 0 \\ \Rightarrow & \iint \frac{F_y(x + dx, y) - F_y(x, y)}{dx} dx dy - \iint \frac{F_x(x, y + dy) - F_x(x, y)}{dy} dy dx = 0 \\ \Rightarrow & \iint \frac{\partial F_y}{\partial x} dx dy - \iint \frac{\partial F_x}{\partial y} dy dx = \iint \left\{ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\} dx dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Gültigkeit für alle Komponenten liefert allgemein:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0}$$

„konservatives Kraftfeld“

2.6.3 Drehimpulserhaltung

Ausgehend von der dynamischen Grundgleichung:

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} &= \vec{F} & \Big| & \vec{r} \times (\dots) \\ \Rightarrow & m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F} \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \{m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})\} = \vec{r} \times \vec{F} & \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F} \\ & \boxed{\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}} \end{aligned}$$

und mit den Definitionen:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \quad \text{Drehimpuls} \quad \boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \quad \text{Drehmoment}$$

folgt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \stackrel{\vec{M}=0}{\Rightarrow} \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.} \hat{=} \text{„Drehimpulserhaltung“}$$

Folgerung: Für einen Massenpunkt im Zentralfeld mit $\vec{F} = F(\vec{r})\vec{e}_r \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = 0$ gilt der Drehimpulserhaltungssatz.

2.7 Bewegung im konservativen Zentralkraftfeld

\vec{F} sei Zentralkraftfeld (vgl. 2.6.3): $\vec{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})\vec{e}_r$

\vec{F} sei konservative Kraft (vgl. 2.6.2): $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}V(\vec{r})$

In sphärischen Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) (Wahl aufgrund der Symmetrie des Problems!) gilt:

$$\begin{aligned} \text{grad}V(\vec{r}) &= \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi \\ \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})\vec{e}_r &\stackrel{!}{=} -\text{grad}V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r - \underbrace{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)\vec{e}_\vartheta}_{\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow V \neq V(\vartheta)} - \underbrace{\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi}_{\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow V \neq V(\varphi)} \\ \Rightarrow F(\vec{r})\vec{e}_r &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r \quad \text{und} \quad V(\vec{r}) = V(r) \\ \Rightarrow F(\vec{r}) &= F(r) \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r} \quad \text{„konservatives Zentralkraftfeld“}$$

Damit lauten dann der Energie- und Drehimpulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \text{const.} \\ \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.} \end{aligned}$$

Es gilt in sphärischen Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Damit:

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &= r\vec{e}_r \times m\dot{\vec{r}} = mr\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= mr^2\dot{\vartheta}\vec{e}_\varphi - mr^2\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\vartheta \stackrel{!}{=} \text{const.} \end{aligned}$$

Da \vec{L} konstant ist, erfolgt die Bewegung wegen $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$ in einer Ebene. Wahl dieser Ebene als $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ($\Rightarrow \dot{\vartheta} = 0$), so dass gilt

$$\vec{L} = -mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_\vartheta \quad \Rightarrow \quad L = |\vec{L}| = mr^2\dot{\varphi}$$

und auch

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Für den Erhaltungssatz gilt dann:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Man schreibt dieses Ergebnis gerne als

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

mit

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}} \quad \text{„Effektives Potential“}$$

Statt die dynamische Grundgleichung zu lösen, kann man die **Bahnkurve** (durch $r(t)$, $\varphi(t)$ bestimmt) aus dem Energiesatz **berechnen**. Aus letzterem folgt:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))} = \frac{dr}{dt} \\ \Rightarrow dt &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}} \Rightarrow \boxed{t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}}} \end{aligned}$$

Integration liefert $t(r)$, die Umkehrung dann $r(t)$. Aus dem Drehimpulserhaltungssatz folgt:

$$\begin{aligned} L = m r^2 \dot{\varphi} &\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m r^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{L}{m r^2} dt \\ \Rightarrow \boxed{\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L}{m r^2} \left(\frac{dt}{dr} \right) dr = \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2m (E - V_{\text{eff}}(r))}}} \end{aligned}$$

Integration liefert $\varphi(r)$, und mit $r(t)$ folgt $\varphi(t)$.

- Folgerung:
- (1) $E < V_{\text{eff}} \Rightarrow$ Diskriminante $< 0 \Rightarrow$ keine reelle Lösung, $\hat{=}$ klassisch nicht mögliche Bahnen
 - (2) $E = V_{\text{eff}} \Rightarrow \dot{r} = 0$ (aber nicht $\dot{\varphi}!$), $\hat{=}$ (klassische) „Umkehrpunkte“ der Bewegung
 - (3) $E > V_{\text{eff}} \Rightarrow$ nicht triviale reelle Lösung existiert, $\hat{=}$ klassisch erlaubte Bewegungen

Bemerkung: In der Quantenmechanik ist ein „Eindringen“ in die klassisch nicht erlaubten Bereiche möglich, man spricht vom **Tunneleffekt**. Man beachte aber, dass in der QM der Bahnbezug seine Bedeutung verliert, so dass das „Eindringen“ besser als „nicht verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit“ bezeichnet wird.

Als **konkrete Anwendung** untersuchen wir die **Planetenbewegung**:

Hier ist die konservative Zentralkraft = Gravitationskraft:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad V(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}V}$$

Dann findet man

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2m \left(E + G \frac{Mm}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} = \sqrt{\frac{1}{2m}} \int \frac{L dr}{r \sqrt{Er^2 - GMmr - \frac{L^2}{2m}}}$$

$$\stackrel{\text{z.B. Bronstein}}{\underset{=}{\Rightarrow}} \sqrt{\frac{1}{2m}} \frac{L\sqrt{2m}}{L} \arcsin \left\{ \frac{GMmr - L^2/m}{r \sqrt{G^2 M^2 m^2 + \frac{2EL^2}{m}}} \right\} + const.$$

$$\boxed{\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 + const.} \Rightarrow \varphi - \tilde{\varphi}_0 = \arcsin \left\{ \frac{\frac{GMm^2}{L} - \frac{L}{r}}{\sqrt{2mE + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^2}}} \right\}$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi - \tilde{\varphi}_0) = \frac{\frac{GMm^2}{L} - \frac{L}{r}}{\frac{GMm^2}{L} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}} = \frac{1 - \left(\frac{L^2}{GMm^2} \right) \frac{1}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}}$$

Mit den Definitionen

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} \quad ; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$$

und der Wahl

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{3}{2}\pi$$

erhält man

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}} \quad \text{Kegelschnittgleichung}$$

Daraus folgt man für die **Bahnkurve**:

$$\begin{aligned} e = 0 &\hat{=} \text{Kreis} && (\text{Planeten}) \\ e < 1 &\hat{=} \text{Ellipse} && (\text{Planeten}) \\ e = 1 &\hat{=} \text{Parabel} && (\text{Kometen}) \\ e > 1 &\hat{=} \text{Hyperbel} && (\text{Kometen}) \end{aligned}$$

Aus diesen Überlegungen folgen die **Kepler'schen Gesetze**:

1. *Gesetz (1609)*: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Offenbar gilt für unser obiges Ergebnis:

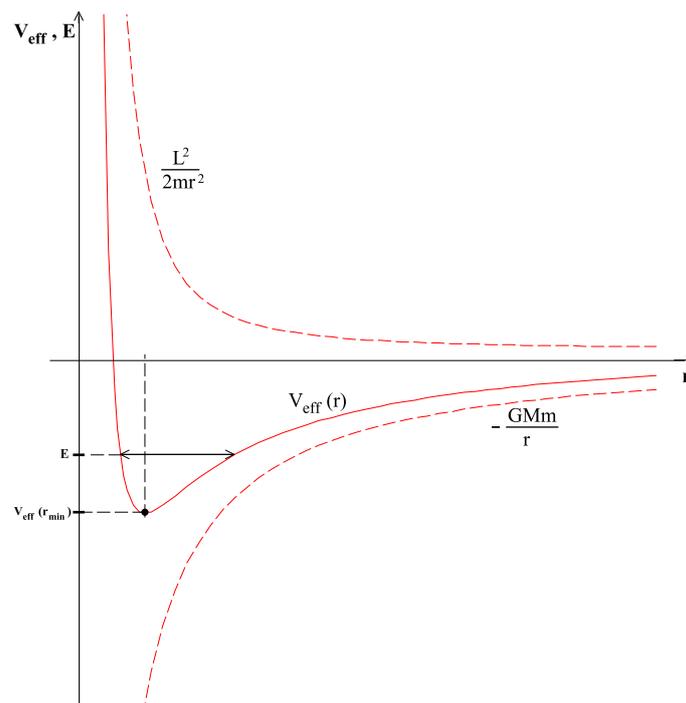


Abbildung 2.10: Effektives Potenzial

Die Kurvenform ist klar wegen:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}} &= \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{2GMm^2} \\
 V'_{\text{eff}} &= -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_{\text{min}} = \frac{L^2}{GMm^2} = 2r_0 \\
 \Rightarrow V_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) &= -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow gebundene Bewegung für $V_{\text{eff}} \leq E < 0$

$\Rightarrow 0 \leq e < 1 \Rightarrow$ **Ellipsen** (Kreise für $e = 0$) mit **Sonne im Ursprung** (=Brennpunkt)

Es gilt auch:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{p}{1-e^2} = \frac{GMm}{2|E|} && \text{große Halbachse} \\
 b &= \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2|E|m}} = \frac{L}{m} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{GM}} && \text{kleine Halbachse}
 \end{aligned}$$

Für $E = V_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2}$ gilt z. B.:

$$e = 0; \quad a = b = \frac{L^2}{GMm^2} \hat{=} \text{Kreisbahn}$$

2. Gesetz (1609): Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Betrachte:

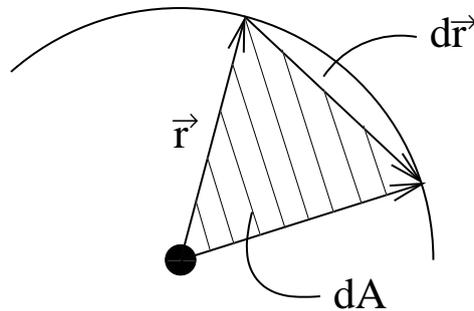


Abbildung 2.11: überstrichene Fläche

$$\begin{aligned} \Rightarrow dA &= \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}| dt = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| dt = \frac{L}{2m} dt \\ \Rightarrow &\boxed{\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{L}{2m} = const.} \quad \text{Flächensatz} \end{aligned}$$

\dot{A} heißt **Flächengeschwindigkeit**.

3. Gesetz (1619) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen der Ellipsen.

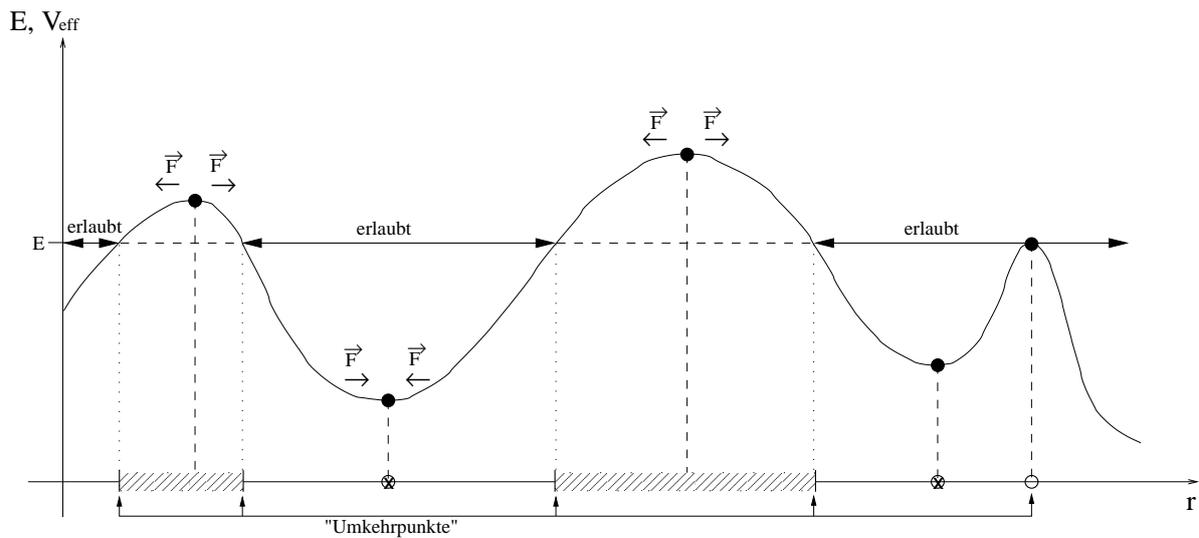
Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{L}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad 2m \dot{A} = L \quad \left| \int_0^T \dots dt \right. \\ \Rightarrow \quad 2m [A(T) - A(0)] &= L \cdot T \\ \boxed{\text{Ellipsenfläche} = \pi ab} & \quad \boxed{\text{siehe oben}} \\ \Leftrightarrow \quad 2m \pi ab = L \cdot T & \quad \Leftrightarrow \quad 2m \pi \frac{L}{m \sqrt{GM}} a^{3/2} = L \cdot T \\ \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} = T & \quad \Rightarrow \quad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3 \end{aligned}$$

Da die Konstante $\frac{4\pi^2}{GM}$ für alle Planeten gleich ist, folgt:

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

Veranschaulichung:



/// ≙ klassisch nicht erlaubte Bereiche

○ ≙ instabile Gleichgewichtslagen: $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$; $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} < 0$

⊗ ≙ stabile Gleichgewichtslage: $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$; $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} > 0$

Abbildung 2.12: Potential und Teilchenenergie

Bemerkung: Hier wird wieder die Bedeutung des harmonischen Oszillators offenbar. Die Taylor-Entwicklung des Potentials liefert:

$$V(r) = V(r_0) + V'(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)(r - r_0)^2$$

so dass in einer Gleichgewichtslage r_0 (mit $V'(r_0) = 0$) für kleine Auslenkungen $x = r - r_0$ gilt:

$$V(r_0 + x) \approx V(r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)x^2$$

Damit gilt für die Kraft an der Stelle $r = r_0 + x$:

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -V''(r_0)x \vec{e}_r$$

Wenn: $V''(r_0) < 0 \Rightarrow \vec{F}$ in Richtung der Auslenkung
 $\hat{=}$ Instabilität

$V''(r_0) > 0 \Rightarrow \vec{F}$ der Auslenkung entgegen gerichtet
 $\hat{=}$ Stabilität

3 Das Zweikörperproblem

Bisher: Behandlung eines einzelnen Teilchens (Körper, Massenpunkt)

Nötig: Erweiterung auf Teilchensysteme

3.1 Allgemeines zu Mehrteilchensystemen

Ausgangspunkt: Newton-Axiome müssen für jeden einzelnen Massenpunkt gültig sein

Also:

Dynamische Grundgleichung(en) ($\hat{=}$ Axiom 2):

$$\underbrace{\dot{\vec{p}}_i}_{m_i \neq m_i(t)} = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{ext,i} + \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ges,i}$$

mit den Bezeichnungen:

- $m_i \hat{=}$ Masse des i-ten Teilchen
- $\vec{r}_i \hat{=}$ Ortsvektor des i-ten Teilchen
- $\vec{F}_{ext,i} \hat{=}$ externe Kraft auf das i-te Teilchen
- $\vec{F}_{ij} \hat{=}$ (interne) Kraft des j-ten auf das i-te Teilchen
- $\vec{F}_{ges,i} \hat{=}$ auf das i-te Teilchen wirkende Gesamtkraft

Reaktionsprinzip ($\hat{=}$ Axiom 3):

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \vec{F}_{ii} = 0$$

Bemerkung: Axiom 1 als Spezialfall von Axiom 2 erfüllt (vgl. 2.1)

Bemerkung: Wenn keine externen Kräfte auf ein Teilchensystem wirken, also $\vec{F}_{ext,i} = 0$ gilt, dann heißt das System **abgeschlossen**.

Bemerkung: Die internen Kräfte \vec{F}_{ij} sind zumeist „**Zweikörperkräfte**“, d.h. sie hängen lediglich von der Lage (und evtl. den Geschwindigkeiten) zweier Teilchen ab.

3.2 Erhaltungssätze für Mehrteilchensystem

Zusätzliche Schwierigkeit bei Mehrteilchensystemen: die Zahl der Bewegungsgleichungen kann sehr groß sein

- ⇒ explizite Lösung aller Bewegungsgleichungen ist nicht nötig
- ⇒ Idee: Berechnung von Bahnkurven aus Erhaltungssätzen (vgl. 2.6)

3.2.1 Impulserhaltung

Idee: Summation aller dynamischen Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \left(\vec{F}_{ext,i} + \sum_j \vec{F}_{ij} \right) = \sum_i \vec{F}_{ext,i} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} \\ &= \sum_i \vec{F}_{ext,i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \underbrace{(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})}_{=0} = \sum_i \vec{F}_{ext,i} \end{aligned}$$

Mit den **Definitionen:**

$$\begin{aligned} M &= \sum_i m_i && \hat{=} \text{ Gesamtmasse} \\ \vec{R} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i && \hat{=} \text{ Ortsvektor des „Schwerpunktes“} \\ \vec{P} &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} && \hat{=} \text{ Gesamtimpuls} \\ \vec{F}_{ext} &= \sum_i \vec{F}_{ext,i} && \hat{=} \text{ (externe) Gesamtkraft} \end{aligned}$$

folgt:

$$M \dot{\vec{R}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \Rightarrow M \ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{P}} = \vec{F}_{ext} \quad \text{Impuls- oder Schwerpunktsatz}$$

$m_i \neq m_i(t)$

Schwerpunktsatz:

Der Schwerpunkt eines Teilchensystem bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse des Systems in ihm vereinigt ist und die Summe der externen Kräfte auf ihn einwirkt.

Impulserhaltungssatz:

Für ein abgeschlossenes System ($\vec{F}_{ext} = 0$) bleibt der Impuls des Schwerpunktes erhalten:

$$M \ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{P}} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const.}$$

Bemerkung: Die Bewegung eines gesamten Teilchensystems kann also durch die Bewegung **eines** Massenpunktes, nämlich des Schwerpunktes beschrieben werden.

Bemerkung: Mit Hilfe des Schwerpunktsatzes können sogenannte „Relativkoordinaten“ definiert werden: $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{s}_i$

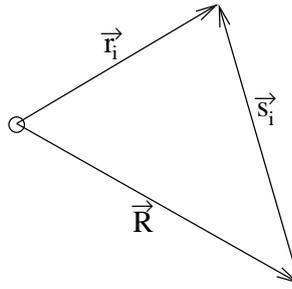


Abbildung 3.1: Relativkoordinaten

Wenn für ein gegebenes System $\vec{R}(t)$ bekannt ist, genügt also zur Angabe der Lage $\vec{r}_i(t)$ aller Teilchen des Systems die Kenntnis ihrer relativen Lage $\vec{s}_i(t)$ in Bezug auf den Schwerpunkt \vec{R} .

3.2.2 Energieerhaltung

Vorüberlegung:

Für konservative Kräfte $\vec{F}_i = \vec{F}_{ext,i} + \sum_j \vec{F}_{ij}$ gilt:

$$\text{rot}_i \vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \times \vec{F}_i = \vec{\nabla}_i \times \vec{F}_i = 0$$

also

- (a) $\vec{F}_{ext,i} = -\vec{\nabla}_i V_{ext,i}$
 (b) Wenn $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ Zentralkraft ($\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$):

$$\begin{aligned} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = V_{ij}(r_{ij}) = V_{ji}(r_{ji}) \\ \Rightarrow \vec{F}_{ij} &= -\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_j} = \frac{\partial V_{ji}}{\partial \vec{r}_j} = \vec{\nabla}_j V_{ji} = -\vec{F}_{ji} \end{aligned}$$

Insgesamt demnach:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V_i = -\vec{\nabla}_i \left(V_{ext,i} + \sum_j V_{ij} \right)$$

Analog zum vorherigen Abschnitt kann daraus hergeleitet werden:

$$\boxed{T + V = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \sum_i \left(V_{ext,i} + \frac{1}{2} \sum_j V_{ij} \right) = const.} \quad \text{Energie(erhaltungs)satz}$$

mit

$$\begin{aligned} T &= \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \\ V &= \sum_i V_i = \sum_i \left(V_{ext,i} + \frac{1}{2} \sum_j V_{ij} \right) \end{aligned}$$

Energieerhaltungssatz:

Für ein Teilchensystem in einem (externen) konservativen Kraftfeld (und konservativen Zentralkräften untereinander) ist die Summe der kinetischen und potentiellen Teilchenenergien zeitlich konstant.

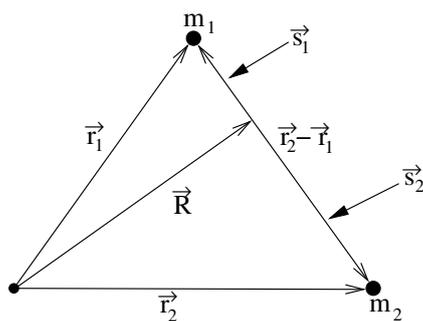
Bemerkung: Es gilt auch ein **Drehimpulssatz** in der Form $\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{M}_{ext,i} = \vec{M}_{ext}$ und die Aussage $2\langle T \rangle = \left\langle \sum_i (\vec{\nabla}_i V_i) \cdot \vec{r}_i \right\rangle$ ($\hat{=}$ „**Virialsatz**“), wobei $\langle \dots \rangle$ ein zeitlicher Mittelwert bedeutet.

3.3 Das Zweiteilchensystem

... ist ein wichtiger Spezialfall eines Mehrteilchensystems. Hier gilt für den **Schwerpunkt**:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Es ist zweckmäßig den **Relativvektor** (Differenzvektor) $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ einzuführen, um das System statt mit $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ äquivalent mit $\vec{R}(t), \vec{r}(t)$ zu beschreiben:



$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} = \vec{R} + \vec{s}_1 \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} = \vec{R} + \vec{s}_2 \end{aligned}$$

Abbildung 3.2: Schwerpunktsystem

Die dynamischen Grundgleichungen lauten dann:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{12} \\ \text{(II)} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{ext,2} + \vec{F}_{21} \end{array} \right\} \text{ „} \oplus \text{“} \Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext}}$$

Dynamische Grundgleichung des Schwerpunktes

sowie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1} \text{(I)} - \frac{1}{m_2} \text{(II)} &\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{ext,1}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{ext,2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} && \text{Dynamische Grundgleichung der Relativbewegung} \\ &= \frac{\vec{F}_{ext,1}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{ext,2}}{m_2} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{\vec{F}_{ext,1}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{ext,2}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{12}}{\mu} \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \\ \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \hat{=} \text{„reduzierte Masse“} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Für ein **abgeschlossenes Zweiteilchensystem** ($\hat{=}$ Zweikörperproblem) gilt dann ($\vec{F}_{ext,i} = 0$):

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \mu\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{12} \sim \vec{r} \end{aligned} \right\} \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{kräftefreie Bewegung des Schwerpunktes} \\ \text{Bewegung einer Masse } \mu \text{ im Zentralfeld } \vec{F}_{12} \end{array} \right.$$

Da die erste Gleichung trivial (\odot) gelöst wird, spricht man hier auch vom „**effektiven Einkörperproblem**“.

Im Zweiteilchensystem gelten folgende **nützliche Zerlegungen**:

Impuls:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} + m_1 \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} - m_2 \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} = M \dot{\vec{R}} \\ \vec{p}_1 &= m_1 \dot{\vec{r}}_1 = m_1 \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}} = m_1 \dot{\vec{R}} + \mu \dot{\vec{r}} \\ \vec{p}_2 &= m_2 \dot{\vec{r}}_2 = m_2 \dot{\vec{R}} - \mu \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} m_1 2 \frac{m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{2} m_2 2 \frac{m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Es treten keine Mischterme $\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}$ auf, was diese Koordinatenwahl vorteilhaft macht.

Potential:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i=1}^2 V_{ext,i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 V_{ij}(r) = V_{ext,1} + V_{ext,2} + V_{12}(r)$$

$V_{11} = V_{22} = 0; V_{21} = V_{12}$

Gesamtenergie:

$$E = T + V = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \underbrace{V_{ext,1}(\vec{R}, \vec{r}) + V_{ext,2}(\vec{R}, \vec{r})}_{=0, \text{ wenn System abgeschlossen}} + V_{12}(r)$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \sum_{i=1}^2 m_i (\vec{s}_i \times \dot{\vec{s}}_i) = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + m_1 \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_2 \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Bemerkung: Es lassen sich also alle wesentliche „Systemgrößen“ in einen **Schwerpunktanteil** ($\vec{R}, \dot{\vec{R}}$) und einen **Relativbewegungsanteil** ($\vec{r}, \dot{\vec{r}}$) separieren (in einem abgeschlossenen Zweiteilchensystem ist diese Separation vollständig).

3.4 Planetenbewegung als Zweikörperproblem

Sei $\vec{r}_1 = \vec{r}_p$ der Ortsvektor eines Planeten mit Masse m_p
 $\vec{r}_2 = \vec{r}_s$ der Ortsvektor der Sonne mit Masse m_s
 und $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_p - \vec{r}_s$ dann gilt:

$V_{ext,i} = 0$ (abgeschlossenes System!)

$$V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_{12}(\vec{r}) = -G \frac{m_s m_p}{r} = -G \frac{M \mu}{r}; \quad \mu = \frac{m_s m_p}{m_s + m_p}; \quad M = m_s + m_p$$

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - G \frac{M \mu}{r} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{L_R^2}{2MR^2} + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{L_r^2}{2\mu r^2} - G \frac{M \mu}{r}$$

$$\text{vgl. 2.7 und 3.3 mit } \vec{L} = \vec{L}_R + \vec{L}_r = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

Im **Schwerpunktsystem** mit $\dot{\vec{R}} = 0, \dot{\vec{R}} = 0$ gilt also

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L_r}{2\mu r^2} - G \frac{M \mu}{r}$$

Nach 2.7 entspricht das gerade der Bewegung einer Masse μ im gravitativen Zentralfeld der (ruhenden) Masse M . Also:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos \phi} \quad (\text{hier } e < 1 \hat{=} \text{Ellipsenbahn})$$

Damit folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{r}_p = \vec{R} + \frac{m_s}{M} \vec{r} \stackrel{\text{Wahl } \vec{R} = 0}{=} \frac{m_s}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_s = \vec{R} - \frac{m_p}{M} \vec{r} \stackrel{\text{Wahl } \vec{R} = 0}{=} -\frac{m_p}{M} \vec{r} \end{array} \right\} \hat{=} \text{Planet **und** Sonne bewegen sich also auf Ellipsen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.}$$

Veranschaulichung:

$$\vec{r}_s = -\frac{m_p}{\mu} \frac{\mu}{m_s} \vec{r}_p = -\frac{m_p}{m_s} \vec{r}_p$$

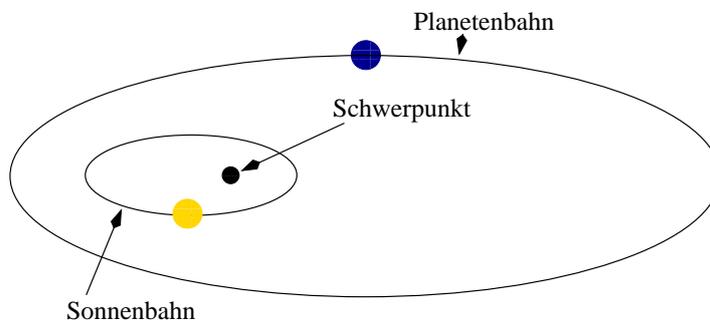


Abbildung 3.3: Planetenbewegung als Zweikörperproblem

Bemerkung: Wegen $m_s \gg m_p$ gilt natürlich in sehr guter Näherung $\vec{r}_p \approx \vec{r}$; $\vec{r}_s \approx 0$ und damit der in 2.7 betrachtete Fall der Keplerbewegung.

4 Lagrange-Mechanik

Neben der bisher behandelten Newton'schen Beschreibung der klassischen Mechanik gibt es noch weitere (vgl. Schema Ende Kapitel 1.1). Von den beiden Alternativen, der **Lagrange-** und der **Hamilton-Mechanik**, behandeln wir hier das Wesentliche der ersten. Basierend auf den bisherigen Verlauf der Vorlesung kann die Lagrange'sche Formulierung der Mechanik wie folgt motiviert werden:

Wir haben gesehen, dass zur Beschreibung eines physikalischen Systems die vektorielle dynamische Grundgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ mitunter durch eine (oder mehrere entkoppelte) skalare Gleichung(en) ersetzt werden kann, siehe die Beispiele in 2.4, 2.5 und 2.7. Man kann also fragen, ob sich die dynamische Grundgleichung direkt in eine (oder mehrere) skalare Gleichungen überführen lässt.

Bemerkung: Die folgende Herleitung der Lagrangegleichungen 2. Art vermeidet die Formulierung der Lagrangegleichungen 1. Art, die Verwendung des sog. d'Alembert'schen Prinzip und damit den Begriff der Zwangskraft und (weitestgehend) der Zwangsbedingung. Diese werden im Rahmen der Hauptvorlesung zur Theoretischen Mechanik behandelt. Hier geht es lediglich um die Vorstellung einer „höheren“ Methode der analytischen Mechanik, die zur Newton'schen Formulierung alternative Lösungen in oft eleganter Weise ermöglicht.

4.1 Generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten

... formalisieren den ersten Schritt zur Lagrange-Formulierung. Daher machen wir folgende

Definition: Wenn die Gesamtheit irgendwelcher skalarer Größen q_1, q_2, \dots, q_s die momentane Lage eines Systems mit s Freiheitsgraden in einem n -dimensionalen Konfigurationsraum eindeutig bestimmt, so nennt man sie **generalisierte** oder **verallgemeinerte Koordinaten** und ihre Ableitungen $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ **generalisierte** oder **verallgemeinerte Geschwindigkeiten**.

Bemerkung: Im Allgemeinen hat ein Teilchen im n -dimensionalen Konfigurationsraum n Freiheitsgrade; ein System aus N Teilchen hat dann nN Freiheitsgrade. Gibt es $0 \leq k \leq nN$ „Zwangsbedingungen“, die die Bewegung(en) des Systems einschränken, reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade auf $nN - k$.

Beispiel: Ebenes Pendel: Die Bewegung ist zunächst auf eine Ebene eingeschränkt, so dass statt sphärischer *ebene* Polarkoordinaten benutzt werden. Im Falle des mathematischen Pendels mit masselosem Pendelarm konstanter Länge erfolgt die Bewegung der Pendelmasse entlang eines Kreises, so dass das System nur einen Freiheitsgrad hat. Also:

$n = 3, (r, \vartheta, \varphi)$ -Koordinaten

$s = 1$: betrachte nur φ als Koordinate, da $r, \vartheta = \text{const.}$

Bemerkung: Generalisierte Koordinaten müssen weder die Dimension einer Länge haben noch geometrisch interpretierbar sein. Damit sind auch die zugehörigen Geschwindigkeiten verallgemeinert. So gilt im Falle des ebenen, mathematischen Pendels z.B.:

generalisierte Koordinate $\varphi \Rightarrow$ generalisierte Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$

$$\boxed{\dot{r} = 0}$$

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 2. Art

Die Ausgangsfrage ist also: Wie gelingt die Herleitung von $s \leq nN$ skalaren Gleichungen aus den $3N$ dynamischen Grundgleichungen $m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$; $i = 1, \dots, N$? Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall $N = 1$, also ein Einteilchensystem. Sei q_k eine der s unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten, dann gilt (mit $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$):

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} & \quad \Big| \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \\ \Rightarrow m \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} - m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (\star) \end{aligned}$$

Da gilt:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_{l=1}^s \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \dot{q}_l \right\} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$$

sowie:

q_l und \dot{q}_l werden als unabhängige Größen aufgefasst!

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} = \sum_{l=1}^s \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right)}_{= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \right)} \cdot \dot{q}_l \right\} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right)}_{= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\sum_{l=1}^s \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_l \right\} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right] = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_k}$$

folgt aus (\star) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\} - m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_k} &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m \frac{\partial \dot{\vec{r}}^2}{\partial \dot{q}_k} \right\} - \frac{m}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^2}{\partial q_k} &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Wegen $T = \frac{1}{2} m \cdot \dot{\vec{r}}^2$ findet man:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

und wenn $V \neq V(\dot{q}_k)$ gilt, schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}}_{\text{„geschickte Null“}} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_k} &= 0 \end{aligned}$$

Mit der Definition der **Lagrangefunktion** $L := T - V$ folgen die

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad \text{Lagrangegleichungen 2. Art für konservative Kräfte}$$

Bemerkung: Im Unterschied zur vektoriellen Newton'schen Bewegungsgleichung (mit i.A. $n = 3$ Komponentengleichungen) handelt es sich bei den Lagrangegleichungen 2. Art um ein System von $s = n - k$ Gleichungen, in denen die die Freiheitsgrade einschränkenden Zwangskräfte bereits implizit berücksichtigt sind.

Bemerkung: Zur Formulierung der Lagrangegleichungen 2. Art ist die Kenntnis der Kräfte nicht explizit erforderlich, sondern lediglich die des Potentials.

Bemerkung: Die Lagrangefunktionen L und $L_1 = \lambda L$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L_2 = L + \frac{dF(q_1, q_2, \dots, q_s, t)}{dt}$ liefern dieselben Bewegungsgleichungen. L_1 ist trivial; für L_2 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L_2}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \right\} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \sum_{l=1}^s \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \right\} - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \right) &= \sum_l \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_l \partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_k} \\ \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) &= \sum_l \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial t} \end{aligned}$$

für zweimal stetig differenzierbare $F(q_1, \dots, q_s, t)$.

4.3 Anwendungsbeispiele

... zur Illustration der Methode:

4.3.1 Das freie Teilchen (s=3)

Koordinatenwahl: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad V = \text{const.} \stackrel{\boxed{\text{O.B.d.A.}}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = m \ddot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} = 0$$

$$\text{Für die anderen Komponenten analog} \Rightarrow \boxed{m \ddot{\vec{r}} = 0}$$

4.3.2 Der schiefe Wurf (s=3)

Koordinatenwahl: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad V = m g z$$

$$\Rightarrow \text{„freies Teilchen“ in Bezug auf } x\text{- und } y\text{-Koordinate: } m \ddot{x} = m \ddot{y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m g z \right\} \right) = m \ddot{z}; \quad \frac{\partial L}{\partial q_3} = \frac{\partial L}{\partial z} = -m g$$

$$\text{Also: } m \ddot{z} + m g = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{z} = -g}$$

4.3.3 Atwood'sche Fallmaschine (s=1)

Koordinatenwahl: $q_1 = z_1 = z$, $z_1 + z_2 + \pi R = l$

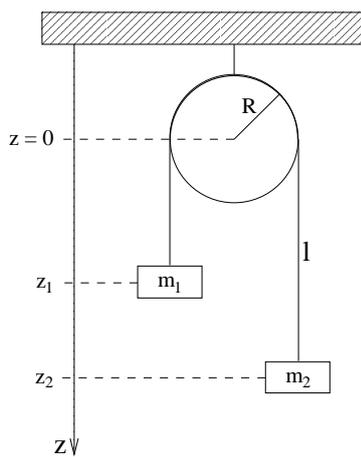


Abb. 4.1: Fallmaschine

$$\Rightarrow z_2 = l - \pi R - z \Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{z}; \quad \dot{z}_2 = -\dot{z}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2$$

$$V = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 = -m_1 g z - m_2 g (l - \pi R - z)$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2 + m_1 g z + m_2 g (l - \pi R - z)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2 + (m_1 - m_2) g z + m_2 g (l - \pi R)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = (m_1 + m_2) \dot{z} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = (m_1 + m_2) \ddot{z}; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = (m_1 - m_2) g$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow (m_1 + m_2) \ddot{z} - (m_1 - m_2) g = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g (t - t_0)^2$$

4.4 Erhaltungssätze und Symmetrien

In der Newton'schen Mechanik haben wir den Impuls-, Energie- und Drehimpulserhaltungssatz kennen und schätzen gelernt. Diese Sätze können natürlich auch im Rahmen der Lagrange-Mechanik hergeleitet werden. Sie bietet aber darüber hinaus einen tieferen Einblick in die Begründung für die Existenz von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir zunächst die

4.4.1 Anzahl der Erhaltungsgrößen

Seien q_1, q_2, \dots, q_s die generalisierten Koordinaten, die zusammen mit den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ den Zustand eines Systems zum Zeitpunkt t bestimmen. Die Integration der Lagrangegleichungen 2. Art erfordert $2s$ Anfangswerte, also $2s$ freie Konstanten, die (geschrieben als Funktionen der q_i und \dot{q}_i) die Erhaltungsgrößen bzw. Bewegungsintegrale sind.

In einem **abgeschlossenen System**, für das die q_i und \dot{q}_i nicht explizit von der Zeit abhängen, kann eine der $2s$ Konstanten als der (beliebige) Zeitnullpunkt gewählt werden, so dass $2s - 1$ Konstanten, also $2s - 1$ **unabhängige Erhaltungsgrößen** existieren.

Beispiele:	Freies Teilchen	Zweikörperproblem	
Freiheitsgrade:	$s = 3$	$s = 6$	
unabh. Erhaltungsgrößen:	$2 \cdot 3 - 1 = 5$	$2 \cdot 6 - 1 = 11$	
Energieerhaltung:	1	1	Konstante
Impulserhaltung:	3	3 (Schwerpunkt)	Konstanten
Drehimpulserhaltung:	3	3	Konstanten
Lenz-Runge-Vektor:	-	3	Konstanten
Summe:	7	10	

⇒ nicht alle Erhaltungsgrößen sind unabhängig oder gleich bedeutsam!

4.4.2 Zyklische Koordinaten

Der einfachste Fall zu einer Erhaltungsgröße zu gelangen liegt vor, wenn $\frac{\partial L}{\partial q_m} = 0$, denn dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \text{const.}$$

Generalisierter oder **verallgemeinerter** oder **kanonischer** oder **konjugierter Impuls**

q_m ist dann eine **zyklische Koordinate**.

Bemerkung: Man wählt also am geschicktesten die verallgemeinerten Koordinaten so, dass möglichst viele zyklisch sind.

Beispiel: **Zweikörperproblem:**

$$1. \text{ Wahl: } (q_1, q_2, q_3) = (x_1, y_1, z_1); \quad (q_4, q_5, q_6) = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$$

$$V = -\frac{Gm_1 m_2}{r}; \quad r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$\Rightarrow L = T - V \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_l} \neq 0 \quad \text{für alle } l$$

\Rightarrow **keine zyklischen Koordinaten**

$$2. \text{ Wahl: } (q_1, q_2, q_3) = (R_x, R_y, R_z) \quad ; \quad (q_4, q_5, q_6) = (r, \vartheta, \varphi)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M (\dot{R}_x^2 + \dot{R}_y^2 + \dot{R}_z^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$V = -\frac{GM\mu}{r}$$

$$\Rightarrow L = T - V \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial R_x} = \frac{\partial L}{\partial R_y} = \frac{\partial L}{\partial R_z} = 0$$

$$\Rightarrow M \ddot{R}_x = M \ddot{R}_y = M \ddot{R}_z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = const.} \hat{=} \text{ kräftefreie Bewegung des Schwerpunktes}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu r^2 \dot{\varphi} = const} \hat{=} \text{ (Relativ-)Drehimpulserhaltung}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = 0$$

da aber bereits $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = 0$ ergibt sich keine weitere Erhaltungsgröße

\Rightarrow Insgesamt erhält man also:

5 zyklische Koordinaten und 4 Erhaltungsgrößen

Neben dem zu einer zyklischen Koordinate gehörenden (erhaltenen) generalisierten Impuls lassen sich in der Lagrange-Mechanik natürlich auch die „üblichen“ Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls formulieren. Mehr noch: die Lagrange-Beschreibung erlaubt einen einfachen Weg einen tiefer liegenden Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrien zu erkennen. So sind die „Haupt-“Erhaltungssätze mit der Homogenität und Isotropie von Raum und Zeit verknüpft. Um das einzusehen betrachten wir zunächst die

4.4.3 Energieerhaltung

Die **Homogenität der Zeit** führt auf die **Energieerhaltung**: Wenn die Lagrange-Funktion eines abgeschlossenen Systems invariant unter zeitlichen Translationen $t' = t + \alpha$ ist, folgt:

$$L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_l \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \ddot{q}_l \right\} = \sum_l \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \ddot{q}_l \right\} = \frac{d}{dt} \sum_l \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_l \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l \right\}}_{=: H \hat{=} \text{Hamiltonfunktion}} - L \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = const.$$

In konservativen Systemen mit $V = V(q_1, \dots, q_s)$ gilt

$$L = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) - V(q_1, \dots, q_s)$$

$$\Rightarrow H = \sum_l \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l \right\} - L = \sum_l \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l \right\} - (T - V) = 2T - T + V = T + V = E$$

T ist homogen, quadratisch in \dot{q}_l , d.h.:
 $T(a\dot{q}_1, \dots, a\dot{q}_s) = a^2 \cdot T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$
 $\Rightarrow \sum_l \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l = 2T$

Damit lässt sich also die Hamilton-Funktion eines abgeschlossenen Systems als die Gesamtenergie $E = T + V$ interpretieren und es gilt die Energieerhaltung.

Bemerkung: Die Hamilton-Funktion ist nicht immer gleich der Gesamtenergie und nicht immer eine Erhaltungsgröße.

4.4.4 Impulserhaltung

Wählt man für die generalisierten Koordinaten eines abgeschlossenen Systems die Ortsvektoren, dann können die Lagrange-Gleichungen 2. Art geschrieben werden als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

Zur Untersuchung der Folgerung aus der **Homogenität des Raumes** betrachten wir eine räumliche Translation $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\epsilon}$, mit der gilt:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i \stackrel{\substack{\delta \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \hat{=} \\ \text{Translation!}}}{=} \vec{\epsilon} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\stackrel{\substack{\text{s.o.} \\ \Rightarrow}}{\Rightarrow} \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \text{const.}$$

Das ist aber gerade der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$ des Systems.

Bemerkung: Aus der Additivität der Lagrange-Funktion (die besagt, dass die Lagrange-Funktion eines Systems, welches aus zwei abgeschlossenen nicht miteinander wechselwirkenden Teilsystemen A und B besteht, durch die Summe der Lagrange-Funktionen $L = L_A + L_B$ der Teilsysteme gegeben ist) folgt die Additivität von Energie und Impuls.

Bemerkung: Auch der Drehimpulserhaltungssatz lässt sich mit einer Symmetrie verknüpfen, nämlich der Isotropie des Raumes. Das heißt die Lagrange-Funktion ist invariant gegenüber (infinitesimalen) Drehungen.

4.5 Das Hamilton-Prinzip

Bisher haben wir „differentielle“ Formulierungen der Mechanik behandelt. Die Mechanik kann aber auch „integral“ formuliert werden, was in der Vorlesung **Theoretische Mechanik** vertieft wird. Hier sei daher das grundlegende Integralprinzip der Mechanik erwähnt, nämlich das **Hamilton-Prinzip**:

Die Bewegung eines mechanischen Systems erfolgt in der Zeitspanne zwischen t_1 und t_2 so, dass das (Linien-)Integral

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) dt$$

stationär ist, also $\delta W = 0$ gilt.

Bemerkung: Aus der Mathematik ist bekannt, dass die Bedingung $\delta W = 0$ auf die Bedingungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

für den Integranden führt, also auf die Lagrangegleichungen 2. Art.

Bemerkung: Das Hamilton-Prinzip ist unabhängig von dem Koordinatensystem, in dem die Lagrangefunktion L formuliert ist.

Bemerkung: Da die Dimension der Lagrangefunktion $L = T - V$ die einer Energie ist, hat W die Dimension $[W] = \text{Energie} \times \text{Zeit} = \mathbf{Wirkung}$.

Bemerkung: Da die Bewegung eines Systems oft (meistens?) so abläuft, dass W minimiert wird, spricht man auch vom **Prinzip der kleinsten Wirkung**. (ursprünglich von Pierre Louis Moreau de Maupertius im Jahre 1744 formuliert)

Bemerkung: Das Hamilton-Prinzip enthält keine neue bzw. weitergehende Physik. Es ist aber formal wichtig, z.B. für die Aufstellung der Quantenmechanik (Stichwort: Schrödinger-Gleichung!). Auch die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik können aus einem Integralprinzip hergeleitet werden.

Anwendungsbeispiel: Ableitung des Fallgesetzes aus dem Hamilton-Prinzip

Ein anfänglich ($t_0 = 0$) ruhender Körper falle aus einer Höhe $h(0) = 20m$ und erreiche den Erdboden nach $t_1 = 2s$.

Alle Fallgesetze der Form

$$h(t) = h(0) - 2^{(1-n)} g t^n ; \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^n} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

sind mit dem Messergebnis verträglich. Welches ist das richtige Fallgesetz?

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 h &= h(0) - 2^{(1-n)} g t^n \Rightarrow \dot{h} = -2^{(1-n)} n g t^{(n-1)} \\
 \Rightarrow L = T - V &= \frac{1}{2} m \dot{h}^2 - m g h = \frac{1}{2} m 2^{2-2n} n^2 g^2 t^{2n-2} - m g \{h(0) - 2^{1-n} g t^n\} \\
 &= m g^2 \left\{ 2^{1-2n} n^2 t^{2n-2} - \frac{m}{g} h(0) + 2^{1-n} t^n \right\}
 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 W(n) &= \int_0^2 L(t) dt = m g^2 \int_0^2 \left(2^{1-2n} n^2 t^{2n-2} - \frac{m}{g} h(0) + 2^{1-n} t^n \right) dt \\
 &= m g^2 \left\{ 2^{1-2n} \left(\frac{n^2}{2n-1} \right) 2^{2n-1} - 2 \frac{m}{g} h(0) + 2^{1-n} \frac{1}{n+1} 2^{n+1} \right\} \\
 &= m g^2 \left\{ \frac{n^2}{2n-1} - 2 \frac{m}{g} h(0) + \frac{4}{n+1} \right\} \\
 \Rightarrow \frac{dW}{dn} &= m g^2 \left\{ \frac{2n(2n-1) - 2n^2}{(2n-1)^2} - \frac{4}{(n+1)^2} \right\} \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow &= (2n^2 - 2n)(n+1)^2 - 4(2n-1)^2 = 0 \Leftrightarrow n^4 + n^3 - 9n^2 + 7n - 2 = 0
 \end{aligned}$$

Lösungen sind Faktoren des konstanten Terms. Wenn ganzzahlig, dann $n \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Test durch Einsetzen bzw. Polynomdivision:

$$(n^4 + n^3 - 9n^2 + 7n - 2) : (n - 2) = n^3 + 3n^2 - 3n + 1$$

Also $\mathbf{n = 2}$ extremiert $W(n)$!

5 Der starre Körper

Bisher: Bewegung von einzelnen (unter Umständen miteinander wechselwirkenden) punktförmigen Körpern (Teilchen, Massenpunkte) ohne Ausdehnung

Jetzt: Beschreibung ausgedehnter Körper

Unter allen denkbaren ausgedehnten Körpern nimmt die Klasse der starren Körper eine besondere Stellung ein, da sie häufig sind und vergleichsweise einfach behandelbar bleiben. Daher zunächst folgende

Definition: Ein starrer Körper ist ein System aus N Massenpunkten, die feste Abstände zueinander haben, d.h. es gilt: $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij} = \text{const.}; \quad i, j \in \{1, \dots, N\}$

Bemerkung: Ausgedehnte Körper mit beweglichen Teilchen sind also keine starren Körper (Auto, Koffer ...)

Bemerkung: Das Konzept des starren Körpers ist eine Idealisierung (Atomkerne z.B. ruhen nicht), die aber in sehr vielen Fällen keine wesentlichen Einschränkung für die Beschreibung makroskopischer Körper nach sich zieht.

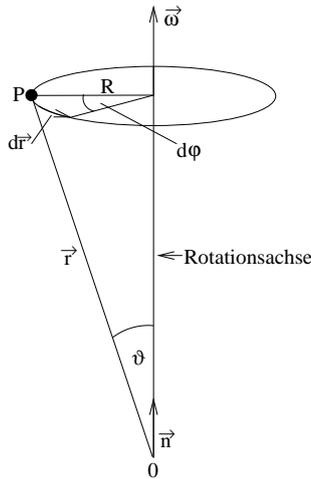
Um die einfache Behandelbarkeit eines starren Körpers einzusehen betrachten wir die

5.1 Freiheitsgrade und Bewegung eines starren Körpers

Die Lage eines starren Körpers ist durch die Ortsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ von drei körperfesten Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt, da dann die Ortsvektoren aller anderen Punkte des Körpers über die Abstandsbedingungen (siehe obige Def.) festgelegt sind. Die Zahl der Freiheitsgrade ergibt sich dann wie folgt: die verbleibenden $3 \cdot 3$ Freiheitsgrade der drei ausgewählten Punkte reduzieren sich um weiterer drei wegen deren Abständen zueinander:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = c_{12}; \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = c_{23}; \quad |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = c_{31}; \quad c_{12}, c_{23}, c_{31} = \text{const.}$$

Also hat ein starrer Körper **sechs Freiheitsgrade**, die einer **Translations- und einer Rotationsbewegung** zugeordnet werden können (Theorem von Chasles). Zur Beschreibung der Rotationsbewegung benötigen wir den Begriff der **Winkelgeschwindigkeit**: betrachten wir die Rotationsbewegung eines einzelnen Punktes:



Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} d\vec{r} \perp \vec{r} \\ d\vec{r} \perp \vec{n} \\ |d\vec{r}| = R d\varphi = r \sin \vartheta d\varphi \end{array} \right\} d\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r} d\varphi$$

$\sin \vartheta = R/r$

Abbildung 5.1: Schwerpunktsystem

Für die **Rotationsgeschwindigkeit** gilt demnach:

$$\vec{v}_{rot} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{n} \times \vec{r}) \frac{d\varphi}{dt} =: (\vec{n} \times \vec{r}) \omega = \omega \vec{n} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \boxed{\vec{\omega} = \omega \vec{n}}$$

Damit gilt allgemein (im nichtrotierenden System):

$$\vec{v} = \vec{v}_{tra} + \vec{v}_{rot} = \vec{v}_{tra} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- \vec{v} : Geschwindigkeit im Inertialsystem
- \vec{v}_{tra} : Translationsgeschwindigkeit
- \vec{v}_{rot} : Rotationsgeschwindigkeit

Daraus folgt

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma} \vec{r} = \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma'} \vec{r}' + \omega \times \vec{r} \quad \xrightarrow[\text{schreibweise}]{\text{Operator-}} \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (\dots)$$

mit \vec{r} im Inertialsystem Σ und \vec{r}' im rotierenden System Σ' .

5.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor eines starren Körpers

5.2.1 Kinetische Energie

In einem Inertialsystem gilt:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{tra} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{tra}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{tra} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \end{aligned}$$

Mit:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i; \quad \vec{v}_{tra} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \stackrel{\text{Spatprodukt}}{=} (\vec{v}_{tra} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{r}_i; \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (\text{Schwerpunkt})$$

folgt:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{v}_{tra}^2}_{\text{Translationsenergie } T_T} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2}_{\text{Rotationsenergie } T_R} + \underbrace{(\vec{v}_{tra} \times \vec{\omega}) \cdot M \vec{R}}_{\text{„wechselseitige“ Energie } T_W, \text{ bestimmt durch Translation } (\vec{v}_{tra}) \text{ und Rotation } (\vec{\omega})}$$

Im **Schwerpunktsystem** ($\vec{R} = 0$) gilt dann:

$$T = T_T + T_R = \frac{1}{2} M \vec{v}_{tra}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \quad \text{kinetische Energie des starren Körpers}$$

Bemerkung: Wird ein starrer Körper in mindestens einem Punkt festgehalten, so reduziert sich seine kinetische Energie auf die Rotationsenergie (Euler Theorem).

5.2.2 Trägheitstensor

Die Rotationsenergie lässt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} & \boxed{(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ T_R &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \stackrel{|}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\omega}^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\left(\sum_{k=1}^3 \omega_k \omega_k \right) \left(\sum_{m=1}^3 r_{im} r_{im} \right) - \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k r_{ik} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\omega_k \omega_l r_{im} r_{im} \delta_{kl}) - \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\omega_k r_{ik} \omega_l r_{il}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left\{ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{m=1}^3 (r_{im} r_{im} \delta_{kl}) - r_{ik} r_{il} \right] \omega_k \omega_l \right\} \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{m=1}^3 (r_{im} r_{im} \delta_{kl}) - r_{ik} r_{il} \right] \right\}}_{=: \mathbf{I}_{kl} \hat{=} \text{Trägheitstensor}} \omega_k \omega_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{kl} \omega_k \omega_l \stackrel{|}{=} \frac{1}{2} I_{kl} \omega_k \omega_l \\ & \quad \boxed{\text{Summenkonvention}} \end{aligned}$$

Bemerkung: „i“ ist der Teilchenindex nicht der Komponentenindex.

Bemerkung: Beachte, dass hier ω_k, ω_l die Komponenten von $\vec{\omega}$ in einem körperfesten KS sind.

Der (diskrete) **Trägheitstensor** lautet explizit:

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} (r_{i2}^2 + r_{i3}^2) & (-r_{i1} r_{i2}) & (-r_{i1} r_{i3}) \\ (-r_{i2} r_{i1}) & (r_{i1}^2 + r_{i3}^2) & (-r_{i2} r_{i3}) \\ (-r_{i3} r_{i1}) & (-r_{i3} r_{i2}) & (r_{i1}^2 + r_{i2}^2) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} r_{iy}^2 + r_{iz}^2 & -r_{ix} r_{iy} & -r_{ix} r_{iz} \\ -r_{iy} r_{ix} & r_{ix}^2 + r_{iz}^2 & -r_{iy} r_{iz} \\ -r_{iz} r_{ix} & -r_{iz} r_{iy} & r_{ix}^2 + r_{iy}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition: Die Diagonalelemente des Trägheitstensors heißen **Trägheitsmomente**, die Nichtdiagonalelemente **Deviationsmomente**

In der Praxis besteht ein starrer Körper aus sehr(!) vielen Massenpunkten, und es ist daher zweckmäßig von einer diskreten auf eine kontinuierliche Darstellung überzugehen d.h. von einer Summation über die einzelnen Massenpunkte auf eine Integration über das Volumen V des starren Körpers:

$$\begin{aligned} I_{kl} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^3 r_{im} r_{im} \right)}_{=\vec{r}_i^2} \delta_{kl} - r_{ik} r_{il} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 \delta_{kl} - r_{ik} r_{il}) \end{aligned}$$

Der Übergang zur kontinuierlichen Darstellung gelingt mit der Einführung der Massendichte $\rho(\vec{r})$ mit $M = \int \rho(\vec{r}) dV$ als (Gesamt-) Masse des starren Körpers:

$$\begin{aligned} I_{kl} &= \int_V \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{kl} - r_k r_l) dV \\ &= \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) \left(\sum_{m=1}^3 x_m x_m \delta_{kl} - x_k x_l \right) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

z.B. kartesische Koordinaten

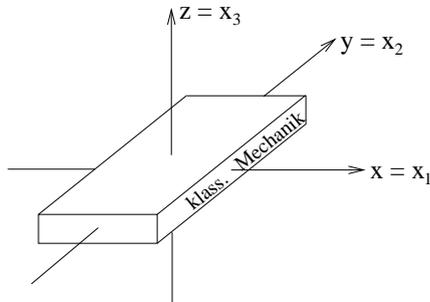
Bemerkung: Im (oft vorliegenden) Fall einer konstanten Massendichte gilt natürlich:

$$I_{kl} = \bar{\rho} \int_V (\vec{r}^2 \delta_{kl} - r_k r_l) dV ; \quad \bar{\rho} = \frac{M}{V}$$

Bemerkung: Wie die Bezeichnung „Trägheitstensor“ andeutet, beschreibt der Tensor die Trägheit eines starren Körpers bei seiner Bewegung. Damit kommt \vec{I} diejenige Rolle zu, die die Masse bei der Beschreibung der Bewegung einer Punktmasse hat. Offensichtlich ist der Trägheitstensor durch die Massenverteilung in einem starren Körper bestimmt.

Anwendungsbeispiele:**(A) Bewegung eines geworfenen Buches (Steins, Pakets):**

Translationsbewegung ($\hat{=}$ Wurfparabel) und Rotationsbewegung. Letztere ist durch den Trägheitstensor bestimmt. In Bezug auf den Schwerpunkt gilt mit $\rho = \text{const.}$:



$$I_{kl} = \rho \int_V \left(\sum_{m=1}^3 x_m^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right) dV$$

$$= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(\sum_{m=1}^3 x_m^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Abb. 5.2: Buchschwerpunkt

Trägheitsmomente:

$$I_{11} = I_{xx} = \rho \iiint \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{11} - x_1 x_1 \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \rho \iiint (x_2^2 + x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) dy dz = \rho a \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \left[\frac{1}{3} y^3 + z^2 y \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz$$

$$= \rho a \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{b}{2} \right)^3 + z^2 b \right] dz = \rho a \left[\frac{2}{3} \left(\frac{b}{2} \right)^3 c + \frac{2}{3} \left(\frac{c}{2} \right)^3 b \right]$$

$$= \rho a \left[\frac{1}{12} b^3 c + \frac{1}{12} c^3 b \right] = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{abc}$$

Analog: $I_{22} = I_{yy} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2); \quad I_{33} = I_{zz} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$

Deviationsmomente:

$$I_{12} = I_{xy} = \rho \iiint \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{12} - x_1 x_2 \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= -\rho \iiint x_1 x_2 dx_1 dx_2 dx_3 = -\rho \iiint x y dx dy dz$$

$$= -\rho c \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy = -\rho c \int 0 dy = 0$$

Analog verschwinden alle anderen Deviationsmomente.

⇒ Die Achsen eines kantenparallelen Koordinatensystems (hier mit Ursprung im Schwerpunkt des starren Körpers) sind **Hauptträgheitsachsen** (s.u.) des Buches:

$$\vec{I}_s = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

(B) Anders ist die Situation, wenn die Drehung des Buches z.B. um eine Achse durch einen Eckpunkt erfolgt ($\rho = \text{const.}$):

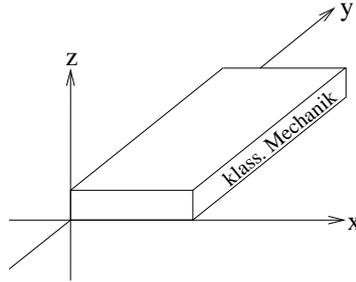


Abbildung 5.3: Eckpunktaufhängung

Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho a \int_0^c \left[\frac{1}{3} b^3 + z^2 b \right] dz \\ &= \rho a \left[\frac{1}{3} b^3 c + \frac{1}{3} b c^3 \right] = \frac{M}{3} (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$\rho = \frac{M}{abc}$

Analog ergibt sich:

$$I_{22} = \frac{M}{3} (a^2 + c^2) ; \quad I_{33} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2)$$

Deviationsmomente:

$$I_{12} = -\rho \iiint x y dx dy dz = -\rho c \int_0^b \frac{1}{2} a^2 y dy = -\rho c \frac{1}{2} a^2 \frac{1}{2} b^2 = -\frac{M}{4} a b$$

$\rho = \frac{M}{abc}$

(andere analog)

Insgesamt also:

$$\vec{I}_{Eck} = M \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(b^2 + c^2) & -\frac{1}{4} a b & -\frac{1}{4} a c \\ -\frac{1}{4} a b & \frac{1}{3}(a^2 + c^2) & -\frac{1}{4} b c \\ -\frac{1}{4} a c & -\frac{1}{4} b c & \frac{1}{3}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Statt beide Trägheitstensoren direkt zu berechnen kann man auch den **Steiner'schen Satz** ausnutzen, der einen Zusammenhang zwischen Trägheitstensoren eines starren Körpers, die in achsenparallelen Koordinatensystemen berechnet werden, herstellt. Sei \vec{a} ein Verschiebungsvektor mit

$$\tilde{x}_1 = x_1 + a_1 ; \quad \tilde{x}_2 = x_2 + a_2 ; \quad \tilde{x}_3 = x_3 + a_3 ; \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \text{const.}$$

dann gilt:

$$\overleftrightarrow{I}_{0+\vec{a}} = \overleftrightarrow{I}_0 + M \begin{pmatrix} a_2^2 + a_3^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 \\ -a_2 a_1 & a_1^2 + a_3^2 & -a_2 a_3 \\ -a_3 a_1 & -a_3 a_2 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}$$

bzw:

$$\left(\overleftrightarrow{I}_{0+\vec{a}} \right)_{kl} = \left(\overleftrightarrow{I}_0 \right)_{kl} + M \left(\sum_{m=1}^3 a_m^2 \delta_{kl} - a_k a_l \right)$$

Bemerkung: Der Trägheitstensor ist symmetrisch, d.h. es gilt $I_{kl} = I_{lk}$. Diese Symmetrie impliziert, dass er stets auf Diagonalform gebracht werden kann (im Prinzip durch Einführung eines neuen, gedrehten Koordinatensystems, siehe aber auch den folgenden Abschnitt), also $I'_{kl} = I'_{kl} \delta_{kl}$. Die neuen Koordinatenachsen heißen **Hauptträgheitsachsen** und die Elemente in

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

heißen **Hauptträgheitsmomente**

Um Ordnung in die Fülle der möglichen Bewegungen starrer Körper zu bringen, sind folgende Begriffsbildungen hilfreich:

Definition: Ein rotierender starrer Körper heißt **Kreisel**. Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich (z.B. $I_1 = I_2 \neq I_3$), spricht man von einem **symmetrischen Kreisel** (z.B. Zylinder, Scheibe). Gilt sogar $I_1 = I_2 = I_3$ handelt es sich um einen **Kugelkreisel** (z.B. Würfel, Kugel). Wirken äußere Kräfte liegt ein **schwerer Kreisel** vor, sonst ein **freier Kreisel**.

Zur weiteren Beschreibung eines starren Körpers sind wichtig der ...

5.3 Drehimpuls und Drehimpulssatz

Für einen starren Körper, der nur rotiert, gilt:

$$\vec{L}_E = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i)^2 - \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$$

In kartesischen Koordinaten hat man

$$\begin{pmatrix} L_{E_x} \\ L_{E_y} \\ L_{E_z} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = I_{kl} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Der Gesamtdrehimpuls ist $\vec{L} = \vec{L}_B + \vec{L}_E$, mit $\vec{L}_B \hat{=} \mathbf{Bahndrehimpuls}$

Der **Eigendrehimpuls** kann also mit dem Trägheitstensor in Verbindung gebracht werden:

$$\boxed{\vec{L}_E = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}} \quad \mathbf{Eigendrehimpuls des starren Körpers}$$

Bemerkung: Der Eigendrehimpuls ist im Allgemeinen nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit \Rightarrow mathematisch schwierige Behandlung.

Bemerkung: Im Unterschied zu einem einzelnen MP verschwindet die Wirkung der auf einen Körper einwirkenden Kräfte nicht notwendigerweise dann, wenn die Summe der Kräfte verschwindet, sondern es kann zu einem resultierenden Drehmoment kommen:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} \neq 0, \text{ wenn } \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$$

Ein starrer Körper ist also nur dann im Gleichgewicht, wenn

$$\sum_{i=1} \vec{F}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0.$$

Natürlich gilt auch der **Drehimpulssatz**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = \vec{M}_{ext} = \vec{M}$$

Insbesondere gilt (bezogen auf den Schwerpunkt):

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_E = \vec{M}} \quad \mathbf{Schwerer Kreisel} \quad \boxed{\dot{\vec{L}}_E = 0} \quad \mathbf{Freier Kreisel}$$

Der Zusammenhang zwischen Eigendrehimpuls und Winkelgeschwindigkeit bietet einen einfachen Weg, die Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers zu bestimmen. Es gilt nämlich:

$$\vec{L}_E = \vec{I}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

wenn
 $\vec{L}_E \parallel \vec{\omega}$

und damit für diesen Spezialfall

$$\boxed{\vec{L}_E = \vec{I}\vec{\omega} = I\vec{\omega}} \quad \text{Eigenwertgleichung für den Tensor } \vec{I} \text{ und seine (skalaren) Eigenwerte } I_\lambda$$

Das heißt weiter:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 &= I\omega_1 \\ I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 &= I\omega_2 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 &= I\omega_3 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} (I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 &= 0 \\ I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 &= 0 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 &= 0 \end{cases}$$

Die Hauptträgheitsmomente $I_{1,2,3}$ folgen dann aus der Lösbarkeitsbedingung

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0$$

also als **Lösungen einer kubischen Gleichung**. Man kann dann zeigen, dass die zugehörigen Drehachsen orthogonal zueinander sind (**Hauptachsen**).

Als ein **Beispiel für eine typische Kreiselbewegung** betrachten wir den **gyroskopischen Effekt** ($\hat{=}$ „Präzession“): offenbar erfolgt die Änderung des Eigendrehimpulses in Richtung des einwirkenden Drehmoments, d.h.:

$$\dot{\vec{L}}_E = \frac{d\vec{L}_E}{dt} = \vec{M} \Rightarrow d\vec{L}_E = \vec{M}dt$$

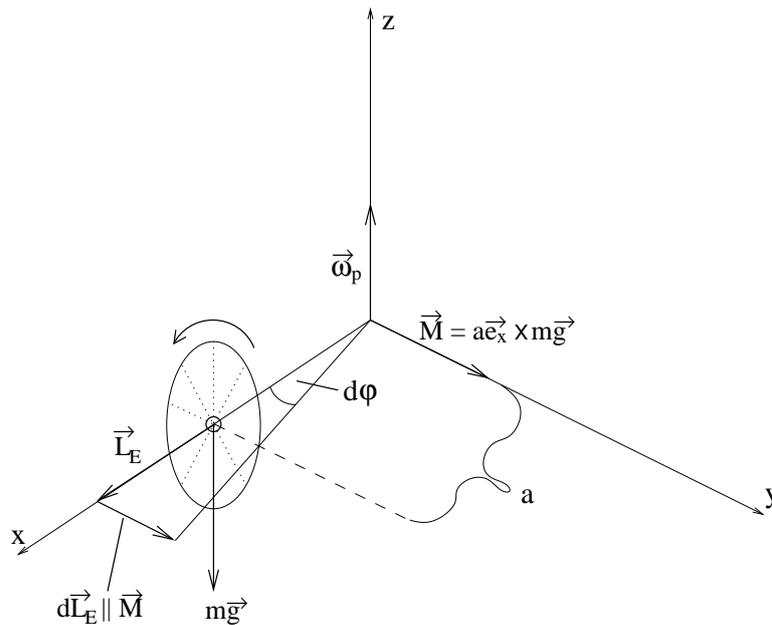


Abbildung 5.4: Gyroskopischer Effekt

Für ein **drehendes Rad auf einem Hebelarm** der Länge a gilt dann:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = a \vec{e}_x \times (-mg) \vec{e}_z = a m g \vec{e}_y \\ \Rightarrow |\vec{M}| &= M = a m g \quad \Rightarrow \quad d\vec{L}_E = M dt \vec{e}_y\end{aligned}$$

Mit $d\varphi = \frac{dL_E}{L_E} = \frac{M}{L_E} dt$ folgt: $\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L_E}$ „Präzessionsfrequenz“

und es gilt vektoriell: $\vec{\omega}_p \times \vec{L}_E = \vec{M}$.

Ähnlich gilt für die **Präzession der Erde**:

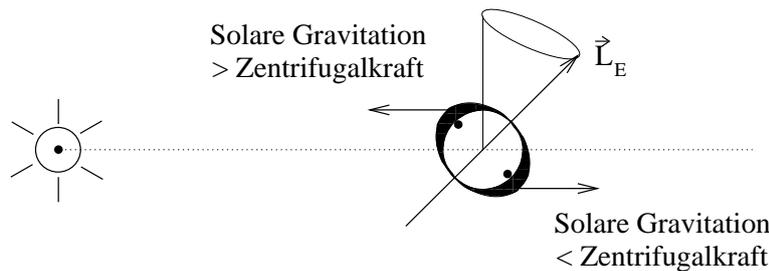


Abbildung 5.5: Präzession der Erde

Gesamtdrehmoment führt zur Rotation von Drehimpulsvektor \vec{L}_E mit $\omega_p \approx 26000$ Jahren („Platonisches Jahr“)

Zur systematischen Untersuchung der Kreisbewegung betrachtet man ...

5.4 Die Eulerschen Gleichungen

Der Drehimpulssatz für den starren Körper $\dot{\vec{L}}_E = \vec{M}$ in einem Inertialsystem Σ lautet im rotierenden System Σ' :

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma'} \vec{L}_E + \vec{\omega} \times \vec{L}_E = \vec{M}$$

Mit $\vec{L}_E = \overleftrightarrow{I} \vec{\omega}$ folgt

$$\overleftrightarrow{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\overleftrightarrow{I} \vec{\omega}) = \vec{M}$$

Insbesondere gilt im Hauptachsensystem:

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases} \quad \text{Euler'sche Gleichungen}$$

Bemerkung: Die Euler'schen Gleichungen sind nichtlinear. Einfach analytische Lösungen lassen sich lediglich für den Fall des freien Kreisels ($\vec{M} = 0$) angeben

Beispiel: **Symmetrischer freier Kreisel**

$$I_1 = I_2 \neq I_3 ; \quad \vec{M} = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \omega_3 = \text{const.} \quad \left| \frac{d}{dt}(\dots) \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} I_1 \ddot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \dot{\omega}_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array}$$

(II) in (I):

$$\Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \left[\frac{(I_3 - I_1)^2}{I_1^2} \omega_3^2 \right] \omega_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\omega}_1 + \omega_0^2 \omega_1 = 0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3}$$

Folglich führt die Rotationsachse in den Komponenten ω_1 und ω_2 harmonische Schwingungen mit der Eigenfrequenz ω_0 aus.

Bemerkung: Für einen Kugelkreisel $I_1 = I_2 = I_3$ folgt $\omega_0 = 0$, d.h. es ergibt sich keine Schwingung.

Anwendung: Polbewegung der Erde

Wegen der Abplattung des Erdkörpers ist die Erde kein Kugelkreisel, sondern ein symmetrischer Kreisel, der als Rotationsellipsoid genähert werden kann. Die Hauptträgheitsmomente eines Rotationsellipsoids sind: $I_1 = I_2 = \frac{M}{5}(b^2 + c^2)$; $I_3 = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \frac{a^2 + b^2 - b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \omega_3 = \frac{a^2 - c^2}{b^2 + c^2} \omega_3$$

Mit $\omega_3 = 2\pi/24$ Stunden und $a = b = 6378$ km (Äquator) und $c = 6357$ km (Pol) folgt die sogenannte **Chandler'sche Periode** zu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 304 \text{ Tage}$$

Die Abweichung von der tatsächlich beobachteten Periode ~ 433 Tagen beruht auf dem Umstand, dass die Erde nicht wirklich ein starrer Körper ist.

5.5 Lagrangefunktion des Starren Körpers

Geeignete generalisierte Koordinaten q_s (s.o.) sind die sogenannten **Eulerschen Winkel**, die (bei Beschränkung auf Rotation) die Orientierung eines körperfesten Koordinatensystems relativ zu einem (ruhenden) Inertialsystem angeben. Haben beide Koordinatensysteme ihren Ursprung im festen Punkt eines starren Körpers, so gilt

$$\vec{r}''' = A^{-1} \vec{r} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}}_{\text{körperfestes System}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } z''\text{-Achse}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } x'\text{-Achse}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } z\text{-Achse}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Inertialsystem}}$$

Die Drehwinkel φ, ϑ, ψ heißen **Euler'sche Winkel**.

Für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ hat man die Darstellung:

$$\vec{\omega} = \omega_\varphi \vec{e}_z + \omega_\vartheta \vec{e}_{x'} + \omega_\psi \vec{e}_{z''} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\vartheta} \vec{e}_{x'} + \dot{\psi} \vec{e}_{z''}$$

Da im körperfesten System $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_{x'''} + \omega_2 \vec{e}_{y'''} + \omega_3 \vec{e}_{z''}'$ folgt (mit A):

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi ; \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi ; \quad \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}$$

Da die Rotationsenergie durch $T_R = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$ gegeben ist, folgt für die Lagrangefunktion:

$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \right)^2 + \frac{1}{2} I_2 \left(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \right)^2 + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \right)^2 - V(\varphi, \vartheta, \psi)$	Lagrangefunktion des rotierenden starren Körpers (Kreisels)
--	--

Bemerkung: Wählt man $(\varphi, \vartheta, \psi)$ so, dass $-\frac{\partial V}{\partial \psi} = M_3$ das Drehmoment um die z''' -Achse angibt, folgt die 3. Euler'sche Gleichung (s.o.). Die beiden anderen Lagrange-Gleichungen 2. Art sind **nicht** identisch mit den beiden anderen Euler'schen Gleichungen.

Teil II

Theoretische Elektrodynamik

1 Historische Einführung

Elektrische und magnetische Wechselwirkungen waren bereits im alten Griechenland (v.Chr.) bekannt:

- Reibungselektrizität bei Bernstein (gr.: “ $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$ “ = “Elektron“)
- Eisenanziehung durch Magnetstein (aus der Provinz “ $\mu\alpha\gamma\nu\eta\sigma\iota\alpha$ “ = “Magnesia“)

⋮

1186	Alexander Neckham:	erste geschriebene Erwähnung eines Kompass
1269	Pierre de Maricourt:	Magnet-„Pole“ (Experiment mit kugelförmigen Magneten)
1600	William Gilbert:	- Erde ist selbst ein Magnet \Rightarrow Erklärung für den Kompass - nicht nur Bernstein zeigt „Reibungsanziehung“ - Vorschlag diese Kraft „elektrisch“ zu nennen
1663	Otto von Guericke:	ebenfalls elektrische Abstoßung
1785	Charles Aug. Coulomb:	$\vec{F} \sim \frac{qQ}{ \vec{r}-\vec{r}_q ^3}(\vec{r}-\vec{r}_q)$
1820	Hans Chr. Oersted:	elektrischer Strom hat magnetische Wirkung
1830	André-Marie Ampère:	$\vec{\nabla} \times \vec{B} \sim \vec{j}$
1831	Michael Faraday:	$\vec{\nabla} \times \vec{E} \sim \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
1873	James Clerk Maxwell:	Maxwell-Gleichungen
1881	Joseph John Thompson:	$\vec{F} = \frac{1}{2} q (\vec{v} \times \vec{B})$
1889	Oliver Heaviside:	$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$
1891	Hendrik A. Lorentz:	$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Bemerkung: Der Aufbau der Vorlesung erfolgt nach der Formulierung der Maxwell-Gleichungen analog zur geschichtlichen Entwicklung:

- Aufstellung der Maxwell-Gleichungen
- Elektrostatik ($\rho \neq 0, \vec{j} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- Magnetostatik ($\rho \neq 0, \vec{j} \neq 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- Elektrodynamik ($\rho \neq 0, \vec{j} \neq 0, \frac{\partial}{\partial t} \neq 0$)

Zur Einordnung der Elektrodynamik

... ins Studium:

Eine der vier Theorievorlesungen:

klassische Mechanik, klassische Elektrodynamik, Quantenmechanik, statistische Physik

... in die Physik:

Beschreibung einer der vier fundamentalen Wechselwirkungen:

gravitative W.:	Alltagserfahrung, Planetensystem, ...	} „makroskopisch“
elektromagn. W.:	Alltagserfahrung, Atombau, Technik, ...	
schwache W.:	β -Zerfall, Neutrinooszillationen	} „mikroskopisch“
starke W.:	Kernkräfte	

... in die Vereinheitlichung physikalischer Theorien:

Erste gelungene Vereinheitlichung ursprünglich verschiedener Gesetze der Physik:

klassische Elektrodynamik $\hat{=}$ Theorie der Elektrizität, des Magnetismus und der Optik

... in die Feldtheorie:

Existenz **elektromagnetischer Strahlung** belegt die „Realität“ von elektrischen und magnetischen Feldern (unabhängig von ihren Quellen). Statt der Untersuchung der Kräfte zwischen elektrischen Ladungen steht die Untersuchung der elektrischen und magnetischen Felder selbst im Vordergrund.

2 Die Maxwell-Gleichungen

2.1 Die Grundgesetze der Elektrodynamik

Vor der Aufstellung der Maxwell-Gleichungen wurden die Grundgesetze der Elektrodynamik zunächst individuell formuliert:

2.1.1 Das Coulomb-Gesetz

Coulomb fand 1785 experimentell für die Kraft zwischen geladenen Kugeln mit der Ladung q und Q :

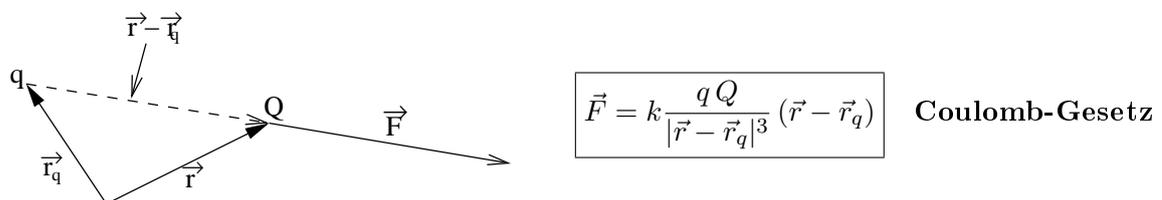


Abbildung 2.1: Kraftrichtung

falls q und Q sich abstoßen, also, wie bereits früher erwähnt (vgl. Mechanik Kapitel 2.3.2), eine zum Gravitationsgesetz analoge Form, die aber (je nach Vorzeichen von q und Q) beide Kraftrichtungen zulässt.

Bemerkung: Die Gültigkeit des Coulomb-Gesetzes ist gut bestätigt (siehe z.B. Rebhan 12.1.7, S.427):

- $\vec{E} = 0$ innerhalb eines Faraday'schen Käfigs
- QED: $m = 0 \Leftrightarrow |\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$
- Messung: $m \lesssim 8 \cdot 10^{-52}$ kg, gültig bis $r \approx 2,5 \cdot 10^8$ m
- Abstand von Spektrallinien liefert Gültigkeit bis $r \approx 10^{-17}$ m

Daraus folgt, dass das Coulomb-Gesetz über mindestens 25 Größenordnungen gültig ist.

Bemerkung: Ein Wort zu den Einheiten (siehe z.B. Jackson): Man unterscheidet das **cgs- bzw. Gauß-System**: $k = 1$
Ladungseinheit („statcoulomb“) ist aus cm, g, s abgeleitet
SI- bzw. MKSA-System: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$; $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
Ladungseinheit („Coulomb“): $1 C = 1 As$

Um die elektrische Wechselwirkung mit den anderen fundamentalen Wechselwirkungen zu vergleichen (vgl. Mechanik Kapitel 2.3.1), ist eine Energiebetrachtung hilfreich:

Idee: $\text{Energie} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Man hat für

- die **elektrostatische Wechselwirkungsenergie** zweier Ladungen $q = Q = e$ im Abstand r voneinander: $W_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$
- die **typische Bindungsenergie der Kernkraft** mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ und dem Planck'schen Wirkungsquantum $h = 6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$:
 $W_e = \frac{h \cdot c}{2\pi r} = \hbar \frac{c}{r}$
- die gravitative Energie zwischen zwei Protonen: $W_g = G \frac{m_p^2}{r}$

so dass

$$\frac{W_e}{W_k} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \alpha \approx \frac{1}{137} \quad (\hat{=} \text{Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante})$$

$$\frac{W_e}{W_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_p^2} = 1,23 \cdot 10^{36}$$

also $W_g \ll W_e \ll W_k$ gilt.

Bemerkung: Die Tatsache, dass die Gravitation trotz ihrer Schwäche im Alltag bedeutsam ist, deutet auf einen extrem guten Ladungsausgleich hin.

Bereits hier lässt sich der Begriff der **elektrischen Felder** einführen, wenn man nämlich die Coulomb-Kraft als Wirkung eines Feldes (der Ladung q) auf die Ladung Q interpretiert:

$$\vec{F} = Q \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{E}(\vec{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

Die Felddefinition erfolgt hier formal aus „praktischen“ Gründen, sagt aber nichts über die tatsächliche Existenz von elektrischen Feldern aus. Das wird erst mit dem Nachweis elektromagnetischer Wellen möglich (vgl. Elektrodynamik).

Mit Hilfe des Feldbegriffs lässt sich auch eine **Integraldarstellung** des Coulomb-Gesetzes angeben. Der „Feldfluss“ durch eine geschlossene Fläche um eine „felderzeugende“ Ladung q (im Ursprung) ist gegeben durch ($\partial V \hat{=}$ Oberfläche eines Volumens V):

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{e}_r r^2 d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$V = V_{\text{Kugel}}$

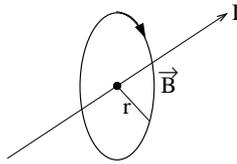
gegeben. Verallgemeinert man noch von einer auf mehrere Ladungen, so gilt gemäß des (experimentell gefundenen) Superpositionsprinzips:

$$\epsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \sum q_i = \int_V \rho dV = Q_V$$

Das ist die **Integralform des Coulomb-Gesetzes**.

2.1.2 Das Ampère-Gesetz

Oersted fand 1820, dass ein stationärer elektrischer Strom magnetische Wirkung erzeugt. Ampère formulierte diesen Befund zehn Jahre später mathematisch. Für einen unendlich langen, geraden, vom Strom $\vec{I} = I\vec{e}_z$ durchflossenen Leiter gilt:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \hat{=} \text{Permeabilität des Vakuums}$$

Abbildung 2.2: Magnetfeldrichtung

Allgemeiner gilt für die „Zirkulation“ des Magnetfeldes \vec{B} :



$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_C \frac{1}{r} r d\varphi = \mu_0 I$$

Ampère-Gesetz

Abb. 2.3: Zirkulation

Für beliebige, ausgedehnte Ströme gilt mit der **Stromdichte** \vec{j} :

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad \text{mit:} \quad I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

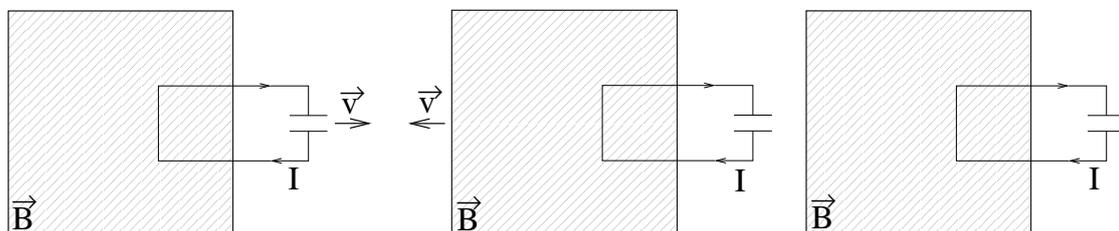
Das ist die **Integralform des Ampère-Gesetzes**. Es zeigt sich weiter, dass für das magnetische Feld immer gilt:

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

im Unterschied zum elektrischen Feld also keine magnetischen Ladungen existieren.

2.1.3 Das Faraday-Gesetz

1831 beobachtete Faraday, dass durch zeitlich veränderliche Ströme in benachbarten Stromkreisen ein Strom induziert wird. Faraday betrachtete drei Anordnungen:



(a) Bewegter Stromkreis im Magnetfeld

(b) Bewegter Magnet und ruhender Stromkreis

(c) Veränderliches Feld eines ruhenden Magneten und ruhender Stromkreis

Abbildung 2.4: Verschiedene Anordnungen

In allen drei Fällen fließt im Stromkreis ein Strom I als Folge der zeitlichen Änderungen des magnetischen Flusses $\phi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$, und Faraday fand für das den Strom erzeugende elektrische Feld

$$\int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Diese Gleichung ist das **Faraday-Gesetz**.

Bemerkung: Maxwell postulierte später, dass das Faraday-Gesetz unabhängig von der Leiterschleife existiert, also ein zeitlich veränderliches Magnetfeld grundsätzlich ein elektrisches Feld induziert.

2.1.4 Quellenfreiheit des Magnetfeldes

Coulomb und Zeitgenossen glaubten zunächst, dass auch Magnetfelder durch magnetische Ladungen erzeugt würden und formulierten eine „magnetische Version“ des Coulomb-Gesetzes. Ampère war der Erste, der der Idee nachging, dass alle magnetischen Effekte auf bewegte elektrische Ladungen zurückgeführt werden können, d.h. dass magnetische Ladungen nicht existieren. Der 2. Teil der Aussage ist soweit bisher bekannt korrekt. Dies bedeutet (in Analogie zur Integralform des Coulomb-Gesetzes, vgl. E-Dynamik Kapitel 2.1.1), dass gilt:

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

d.h. $\rho_{mag} = 0$ bzw. $Q_{V,mag} = 0$.

Bemerkung: Die Aussage der obigen Gleichungen kann man sich mit der Vorstellung veranschaulichen, dass jede magnetische Feldlinie eine geschlossene Kurve ist (ggf. erfolgt die Schließung „im Unendlichen“) bzw. dass der magnetische Fluss ϕ_m durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet.

2.2 Mathematischer Exkurs: Vektoranalysis

Ein unverzichtbares Hilfsmittel der Theoretischen Physik und (im Vergleich zur klassischen Mechanik) besonders für die Elektrodynamik ist die Vektoranalysis. Für letztere äußerst nützlich ist

2.2.1 Der Nabla-Operator und die vektoranalytischen Operatoren

Erinnerung: Zur Beschreibung von Feldern und der Untersuchung ihrer Eigenschaften wird der Nabla-Operator definiert:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{kartesische Koordinaten}) \\ &= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{Zylinder-Koord.}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Mit Hilfe des $\vec{\nabla}$ -Operators bildet man

- den Gradient eines skalaren Feldes: $\text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi$
- die Divergenz eines Vektorfeldes: $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- die Rotation eines Vektorfeldes: $\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
- den Laplace-Operator: $\text{div grad } \Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \Delta \Phi$

und es gilt anschaulich:

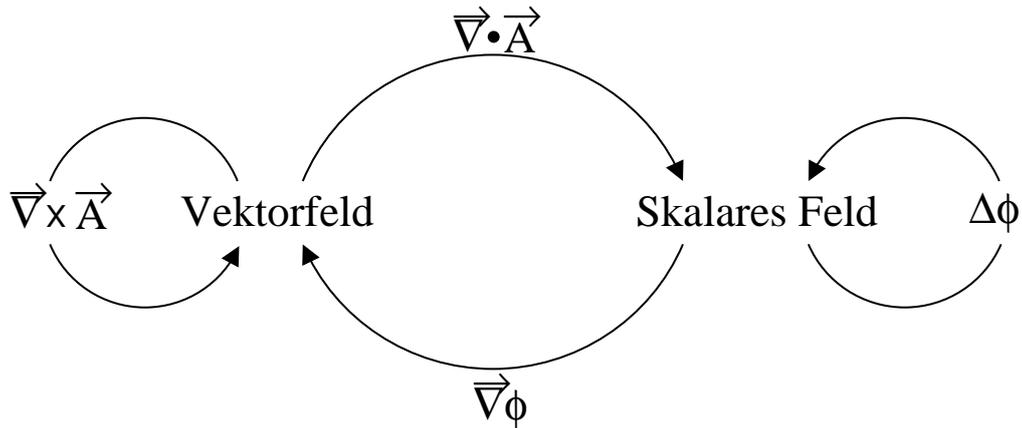


Abbildung 2.5: Der Nabla-Operator

(vgl. mathematische Methoden der Physik)

2.2.2 Der Gauß'sche Satz

... kann wie folgt anschaulich motiviert werden (vgl. 2.1.1 und 2.1.4): $\Phi = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\partial V}$ ist der Fluss des Vektorfeldes \vec{A} durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V . Man kann sich diesen Fluss zusammengesetzt denken aus den Flüssen Φ_{ix} , Φ_{iy} und Φ_{iz} durch die Seiten kleiner, das Volumen V ergebende („Elementar-“)Würfel mit Volumen $\Delta\tau$, also:

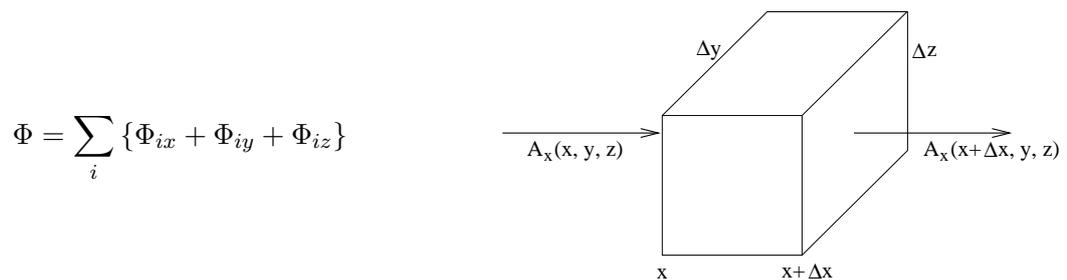


Abbildung 2.6: Fluss durch Quader

Für einen Würfel ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$) gilt:

$$\Phi_{ix} = [A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)] \Delta x \Delta y = \frac{\Delta A_x}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Da das Gleiche für die y - und z -Richtung gilt folgt mit der Wahl $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta\tau$:

$$\Phi_i = \Phi_{ix} + \Phi_{iy} + \Phi_{iz} = \left\{ \frac{\Delta A_x}{\Delta x} + \frac{\Delta A_y}{\Delta y} + \frac{\Delta A_z}{\Delta z} \right\} \Delta\tau$$

Nimmt man alle Würfel zusammen und berücksichtigt, dass sich die Beiträge der „innenliegenden“ Seiten wegheben, erhält man im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$:

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum_i \left\{ \frac{\Delta A_x}{\Delta x} + \frac{\Delta A_y}{\Delta y} + \frac{\Delta A_z}{\Delta z} \right\} \Delta \tau = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV \quad \text{Gauß'scher Satz}$$

2.2.3 Der Stokes'sche Satz

... kann ebenso einfach motiviert werden (vgl. II.2.1.2): $Z_F = \int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s}$ ist die Zirkulation des Feldes \vec{A} um die Fläche F herum. Zerlegt man letztere in („Elementar-“) Quadrate mit Fläche $(\Delta F)_i$, so gilt

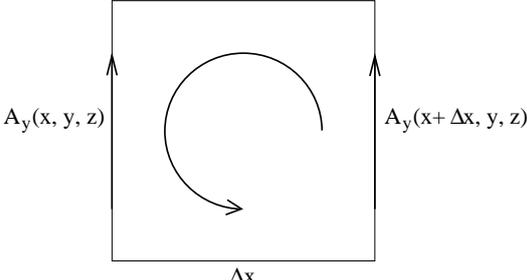
$$\begin{aligned} Z_F &= \sum_i Z_{F_i} = \sum_i \int_{(\Delta F)_i} \vec{A} \cdot d\vec{s} \\ &= \sum_i (Z_{F_{ix}} + Z_{F_{iy}}) \end{aligned}$$


Abbildung 2.7: Zirkulation um Fläche

Für ein Quadrat gilt:

$$\begin{aligned} Z_{F_{iy}} &= [A_y(x + \Delta x, y, z) - A_y(x, y, z)] \Delta y = \frac{\Delta A_y}{\Delta x} \Delta x \Delta y \\ Z_{F_{ix}} &= [-A_x(x, y + \Delta y, z) + A_x(x, y, z)] \Delta x = -\frac{\Delta A_x}{\Delta y} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

und somit

$$Z_{F_i} = \left\{ \frac{\Delta A_y}{\Delta x} - \frac{\Delta A_x}{\Delta y} \right\} \Delta x \Delta y = \left\{ \frac{\Delta A_y}{\Delta x} - \frac{\Delta A_x}{\Delta y} \right\} \vec{e}_z \cdot \Delta F_i \vec{e}_z$$

$\Delta F_i = \Delta x \Delta y$

was verallgemeinert werden kann zu:

$$\begin{aligned} Z_{F_i} &= \vec{A}' \cdot \Delta \vec{F}_i \quad \text{mit} \quad \vec{A}' = \left\{ \frac{\Delta A_z}{\Delta y} - \frac{\Delta A_y}{\Delta z} \right\} \vec{e}_x + \left\{ \frac{\Delta A_x}{\Delta z} - \frac{\Delta A_z}{\Delta x} \right\} \vec{e}_y + \left\{ \frac{\Delta A_y}{\Delta x} - \frac{\Delta A_x}{\Delta y} \right\} \vec{e}_z \\ \text{und} \quad \Delta \vec{F}_i &= \Delta y \Delta z \vec{e}_x + \Delta z \Delta x \vec{e}_y + \Delta x \Delta y \vec{e}_z \end{aligned}$$

Daraus erhält man im Grenzfall $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ insgesamt (nach Sum.):

$$\boxed{\int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{F}} \quad \text{Stokes'scher Satz}$$

2.3 Anwendung der Sätze von Gauß und Stokes

Aus der Integralform des Coulomb-Gesetzes folgt mit dem Gauß'schem Satz:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{f} &= \int_V \rho \, dV = \varepsilon_0 \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV \\ \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} & \quad \text{Gauß'sches Gesetz}\end{aligned}$$

Analog folgt für ein Magnetfeld:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= 0 = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV \\ \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} & \quad \text{keine magnetischen Ladungen}\end{aligned}$$

Aus der Integralform des Ampère-Gesetzes folgt mit dem Stokes'schen Satz:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \int_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} & \quad \text{Ampère'sches Gesetz}\end{aligned}$$

Analog folgt für ein elektrisches Feld:

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} & \quad \text{Faraday'sches Gesetz}\end{aligned}$$

Damit sind die Grundgesetze der Elektrodynamik in differentieller Form bereitgestellt.

2.4 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Die in 2.3 formulierten Differentialgleichungen für das elektrische und magnetische Feld enthalten noch einen inneren Widerspruch. Aufgrund der Erfahrungstatsache (Messung!), dass die Ladung eine Erhaltungsgröße ist, gilt ($\vec{j} = \rho \vec{v}$)

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV$$

also

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Nun ist aber wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Das bedeutet, diese Gleichung kann nur für stationäre Systeme gelten. Maxwell's Idee war es nun wegen $\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ zu schreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left\{ \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} = 0$$

und die rechte Seite des Ampère'schen Gesetzes entsprechend zu erweitern:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Der Term $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ wird **Maxwell'scher Verschiebungsstrom** genannt.

Bemerkung: Eine entsprechende Überlegung für $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ liefert keinen Widerspruch, denn

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

2.5 Die Maxwell-Gleichungen

... die also lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

und die **Lorentz-Kraft**

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = q \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$$

sind die **vollständigen Grundgleichungen der Elektrodynamik im „Vakuum“** (Beachte: $\rho \neq 0, \vec{j} \neq 0$).

Bemerkung: Die **Maxwell-Gleichungen in Materie** lauten (nicht weiter in der Vorlesung behandelt):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t) & \vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 & & \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \text{Material-Gleichungen} & \\ \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Die Größe ε und μ werden als „Dielektrizitätskonstante“ bzw. „Permeabilität“ bezeichnet und können im Allgemeinen auch Tensoren sein. Für $\varepsilon = \mu = 1$ erhält man offenbar die Vakuum-Gleichungen. Die **Lorentzkraft-Gleichung** schreibt man für den Materiefall zweckmäßig als Kraftdichte-Gleichung:

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$$

Bemerkung: Lorentzkraft „anschaulich“ plausibel:
 Die Bewegung von q erzeugt einen Strom entlang \vec{v} . Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld um \vec{v} herum, das ein äußerlich anliegendes homogenes Magnetfeld auf der einen Seite verstärkt und auf der anderen Seite schwächt.
 Der dadurch erzeugte Symmetriebruch macht eine seitliche Kraft plausibel.

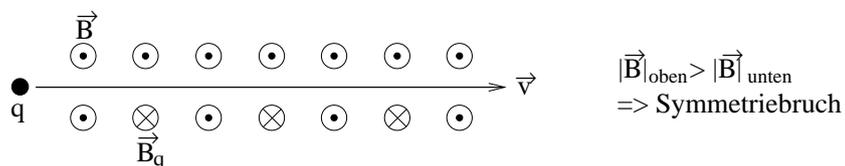


Abbildung 2.8: Lorentzkraft

Bemerkung: Eine eindeutige Lösung der Maxwell-Gleichungen erfordert Randbedingungen. Diese sind grundsätzlich durch

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{E}(\vec{r}) = 0 ; \quad \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

gegeben. Zusätzlich gibt es Randbedingungen an (physikalisch oder mathematisch motivierten) „Grenzflächen“ an Orten $|\vec{r}| < \infty$. Die damit verbundenen **Randwertprobleme** werden später behandelt.

3 Elektrostatik

... ist charakterisiert durch $\rho \neq 0, \vec{j} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$, so dass die Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = 0 \quad (\text{wegen Randbedingung})$$

Es gibt also nur ein (statisches) elektrisches Quellenfeld \vec{E} mit verschwindender Rotation, und es gibt verschiedene **Möglichkeiten zur Berechnung von $\vec{E}(\vec{r})$** :

- (i) mit Hilfe des Gauß'schen Satzes aus dem Coulomb-Gesetz
- (ii) durch direkte Lösung der 1. Maxwell-Gleichung
- (iii) durch Anwendung des Superpositionsprinzips auf das Coulomb-Gesetz
- (iv) aus dem zu einem Problem gehörenden elektrostatischen Potential

Diese Alternativen seien zunächst allg. und dann jeweils an einem konkreten Beispiel erläutert.

3.1 Anwendung des Gauß'schen Satzes

Offenbar gilt (vgl. 2.2.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV \\ \Leftrightarrow \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{q_V}{\epsilon_0}; \quad d\vec{f} = df \vec{n}; \quad \vec{n} \hat{=} \text{Flächennormaleneinheitsvektor} \end{aligned}$$

Gelingt es nun, die Oberfläche ∂V des Volumens V mit der eingeschlossenen Ladung q_V so zu wählen, dass auf ihr $\vec{E} = E \vec{n}$ mit $E = |\vec{E}| = \text{const.}$ gilt, ist das Problem gelöst, denn:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E \int_{\partial V} df = \frac{q_V}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_V}{\epsilon_0 O_V} \vec{n}$$

Beispiel: **Homogen geladene Kugel**

$$\rho = \begin{cases} \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3} = \text{const.} & ; |\vec{r}| \leq R \\ 0 & ; |\vec{r}| > R \end{cases}$$

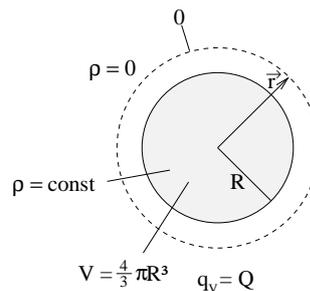


Abbildung 3.1: Kugel

Entsprechend unterscheidet man zweckmäßigerweise:

- das Feld im Innenraum ($|\vec{r}| \leq R$)
- das Feld im Außenraum ($|\vec{r}| > R$)

Für Letzteres gilt ($V =$ Kugel mit beliebigem Radius r)

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E_a \int_{\partial V} r^2 d\Omega = E_a 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$\vec{E} = E_a \vec{e}_r; d\vec{f} = r^2 \vec{e}_r d\Omega$

Für den Innenraum ($|\vec{r}| \leq R$) findet man:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E_i 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \int_{\partial V} dV = \frac{3Q}{\varepsilon_0 4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$$

Also insgesamt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| > R \end{cases}$$

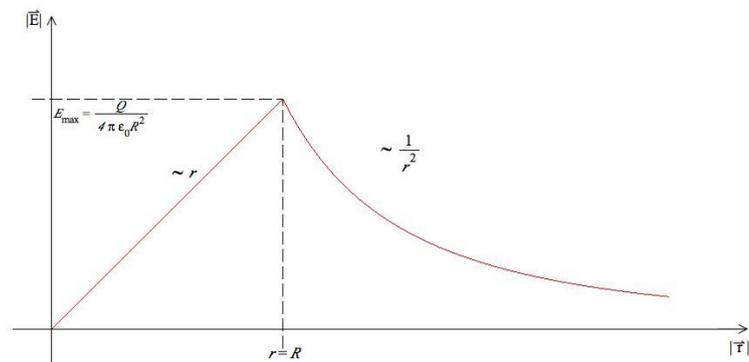


Abbildung 3.2: E-Feldverlauf

Bemerkung: Dieses Feld verwendet man u.a. als einfaches Modell für einen Atomkern.

3.2 Direkte Lösung der 1. Maxwell-Gleichung

Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

Lösung (wie immer!) durch Wahl geeigneter Koordinaten mit den jeweiligen Randbedingungen.

Beispiel: **Homogen geladene Kugel (s.o.)**

Wähle sphärische Polarkoordinaten ($\hat{=}$ Kugelkoordinaten):

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \{r^2 E(r)\}$$

Damit gilt für den Innenraum ($|\vec{r}| \leq R$):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_i) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} (r^2 E_i) = \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 E_i = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{1}{3} r^3 \quad \Rightarrow \quad E_i = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{r}{3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$$

$\rho = \text{const.}$

Für den Außenbereich ($|\vec{r}| > R$) findet man:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} (r^2 E_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 E_a = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad E_a = \frac{\text{const.}}{r^2}$$

Die Anschlussbedingung (siehe 3.6.1) $E_a \stackrel{!}{=} E_i$ bei $|\vec{r}| = R$ liefert:

$$\frac{\text{const.}}{R^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \text{const.} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Also wie vorher:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| > R \end{cases}$$

3.3 Superpositionsprinzip und Coulomb-Gesetz

Das Coulomb-Gesetz für die Kraft \vec{F} , die eine Ladung q auf eine Testladung Q ausübt, lautet wie gesehen (vgl. 2.1.1):

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

was die (von Q unabhängige) Definition des elektrischen Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

der Ladung q nahe legt. Für das Gesamtfeld mehrerer (N) Ladungen gilt gemäß des Superpositionsprinzips:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Daraus folgt schließlich für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

Bemerkung: Die Kraft auf eine Ladungsverteilung ist somit

$$\vec{F} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) d^3r$$

wobei die Gesamtladung durch

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) d^3r$$

gegeben ist.

Beispiel: **Homogen geladene Kugel (s.o.)**

Im Innenraum ($|\vec{r}| \leq R$) gilt:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} r'^2 \sin\vartheta dr' d\vartheta d\varphi \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \rho = \text{const.} \end{array} \right. \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^R \frac{(\vec{r} - \vec{r}') r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta}^3} dr' d\cos\vartheta \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_z \parallel \vec{r} \end{array} \right. \\ &= \dots \end{aligned}$$

Man erhält also einen vergleichsweise komplizierten Ausdruck, in dem nicht zuletzt Vektoren die Integration verkomplizieren. Daher neue Idee:

3.4 Das elektrische Potential

Aus der (bisher nicht benutzten) Gleichung $\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ folgt, dass $\vec{E}(\vec{r}) \sim \text{grad } \Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$. Dieses skalare Feld $\Phi(\vec{r})$ kann aus (vgl. 3.3):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

mit der vektoranalytischen Identität

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\rho(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} d^3r' \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \end{aligned}$$

Demnach gilt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \text{const.}}$$

Damit lautet die 1. Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ in der Elektrostatik äquivalent ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$):

$$\boxed{\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

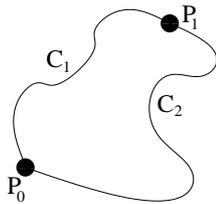
und ist als **Poisson-Gleichung** bekannt.

Die Umkehrung von $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ führt auf die nützliche Beziehung

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}$$

Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ist das Integral wegunabhängig:

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{gleich für Weg (I) und (II)}$$

Abbildung 3.3: Beliebige Wege

Bemerkung: Die Kenntnis des elektrostatischen Potentials $\Phi(\vec{r})$ ist äquivalent zur Kenntnis des elektrostatischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$. Die Tatsache, dass ein skalares Feld ($\Phi(\vec{r})$) dieselbe Information enthält wie ein vektorielles ($\vec{E}(\vec{r})$), liegt hier an der speziellen Form des Vektorfeldes, welches nicht beliebig ist, sondern $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ erfüllt.

Beispiel: **Homogen geladene Kugel (s.o.)**

Es gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} r'^2 \sin\vartheta \, dr' \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R \int_{-1}^1 \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta}} \, d\cos\vartheta \, dr' \\ &\quad \boxed{\vec{e}_z \parallel \vec{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Trick!}}{=} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R \int_{-1}^1 r'^2 \frac{d}{d\cos\vartheta} \left\{ \sqrt{\dots} \left(-\frac{1}{rr'} \right) \right\} d\cos\vartheta dr' \\
&= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} \int_0^R r' \underbrace{\{|r-r'| - |r+r'|\}}_{= \begin{cases} -2rr' & ; r < r' \\ -2r'^2 & ; r \geq r' \end{cases}} dr' \\
&= \frac{\rho}{\varepsilon_0 r} \begin{cases} \int_0^r r'^2 dr' + \int_r^R rr' dr' & ; r \leq R \\ \int_0^R r'^2 dr' & ; r > R \end{cases} \\
& \stackrel{\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}}{=} \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{r^2}{R^3} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right) \right\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right\} & ; r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} & ; r > R \end{cases}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für das elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r & ; |\vec{r}| > R \end{cases}$$

3.5 Die mathematische Beschreibung einer Punktladung: die δ -Funktion

Zur formalen Beschreibung des elektrostatischen Feldes und Potentials einer Punktladung q ist es notwendig, die entsprechende Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ zu definieren. Offenbar gilt im Falle einer Punktladung am Ort \vec{r}_q , dass $\rho(\vec{r})$ nur an einem Punkt ungleich Null ist, also:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & ; \vec{r} \neq \vec{r}_q \\ ? & ; \vec{r} = \vec{r}_q \end{cases}$$

mit

$$\int_V \rho(\vec{r}) d^3r = \begin{cases} q & ; \text{falls } \vec{r}_q \text{ in } V \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Das Gewünschte leistet die (Dirac'sche) Delta-Funktion:

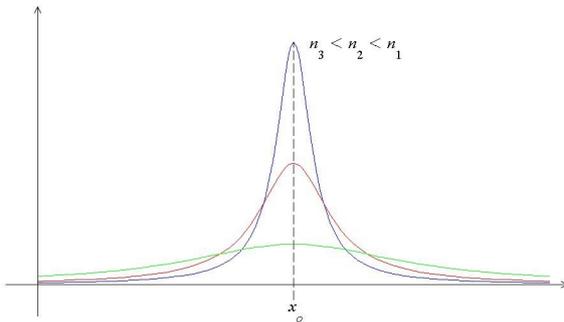
$$\rho(\vec{r}) = q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q) \quad \text{mit} \quad \int_V \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q) d^3r = \begin{cases} 1 & ; \text{falls } \vec{r}_q \text{ in } V \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Demnach ist $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q) = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{r}_q$ (und anschaulich(!) gilt $\delta^3(0) = \infty$). Es gibt verschiedene Darstellungen der Delta-Funktion als Grenzwert von Funktionenfolgen. Am Anschaulichsten ist der eindimensionale Fall, wo z.B. gilt:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x_0)^2}$$

In der Tat gilt hier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x_0)^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\eta}\right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$



$$\hat{=} \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & ; x \neq x_0 \\ \infty & ; x = x_0 \end{cases}$$

Abbildung 3.4: Funktionenfolge

Es gelten folgende **Beziehungen für die eindimensionale δ -Funktion**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x - a) dx = \begin{cases} f(a) & ; \text{ falls } x_1 < a < x_2 \\ 0 & ; \text{ sonst (also } a < x_1 \vee a > x_2) \end{cases}$$

$$\text{aber } \int_0^{r_1} f(r) \delta(r) dx = f(0) \quad \text{für } r_1 > 0 \text{ in Polarkoordinaten}$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

$x_i =$ einfache Nullstelle von $f(x)$: $f(x_i) = 0$, $f'(x_i) \neq 0$

$$\delta(x - a) = \frac{d}{dx} H(x - a)$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

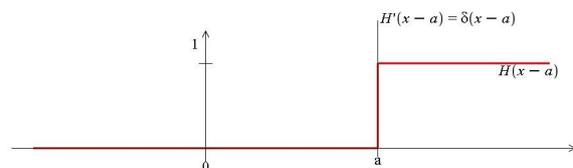


Abbildung 3.5: Heaviside-Funktion

und für die 3-D δ^3 -Funktion:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{a}) d^3r = f(\vec{a})$$

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \stackrel{\boxed{\vec{r}' = \text{const.}}}{=} \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \stackrel{\boxed{\vec{r}' = 0}}{=} \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left\{ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right\}$$

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta_{\vec{r}} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}$$

Damit gilt formal für Feld und Potential einer Punktladung q bei $\vec{r}' = \vec{r}_q$ (vgl. 3.3 und 3.4):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$\stackrel{\boxed{\rho(\vec{r}') = q \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q)}}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q)(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

bzw.:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}$$

3.6 Randwertprobleme

Wie bereits in 2.5 bemerkt, erfordert eine eindeutige Lösung der Maxwell-Gleichungen (oder der im Falle der Elektrostatik äquivalenten Poisson-Gleichung) Randbedingungen. Neben den grundsätzlichen („natürlichen“) elektrostatischen Randbedingungen

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0$$

gibt es häufig physikalisch bedingte oder mathematisch motivierte zusätzliche Randbedingungen an Grenzflächen innerhalb des Integrationsgebietes bei $0 < |\vec{r}| < \infty$. Diese sind stets „künstlich“ und müssen mit den Maxwell-Gleichungen verträglich sein, das heißt aus denselben folgen. Dazu betrachten wir das

3.6.1 Verhalten von $\vec{E}(\vec{r})$ und $\Phi(\vec{r})$ an Grenzflächen

Grenzflächen treten auf, wenn sich Materie im Integrationsgebiet befindet. Man unterscheidet prinzipiell:

- Leiter** $\hat{=}$ Materialien, in denen sich ein oder mehrere Elektronen pro Atom frei bewegen können.
- Isolatoren** $\hat{=}$ Materialien, in denen jedes Elektron an ein bestimmtes Atom gebunden ist und bleibt.

Wir beschränken uns hier auf Leiter und leitende Grenzflächen. Die Isolatoren (ein Beispiel ist die homogen geladene Kugel) werden in der so genannten „Elektrodynamik in Materie“ behandelt (siehe Hauptvorlesung).

Für einen **Leiter** gelten folgende Aussagen:

- (i) **$\vec{E}(\vec{r}) = 0$ innerhalb des Leiters:**
 Aufgrund eines äußeren Feldes \vec{E}_0 werden die freien Elektronen verschoben mit dem Effekt des Aufbaus einer positiven und negativen Ladungsanhäufung am Leiterrand. Die Elektronenbewegung verschwindet, wenn das durch die induzierten Ladungen erzeugte Feld \vec{E}_i im Leiter das äußere Feld \vec{E}_0 gerade kompensiert. Damit ist im **elektrostatistischen** Fall $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$ im Inneren des Leiters, einschließlich seiner Oberfläche.

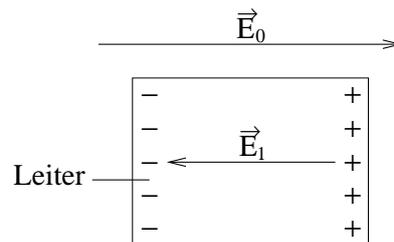


Abbildung 3.6: Leiter im elektrostatischen Feld

- (ii) **$\rho(\vec{r}) = 0$ innerhalb des Leiters:**
 Wegen $\text{div } \vec{E} = \text{div } \vec{0} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = 0$
- (iii) **Die gesamte Nettoladung befindet sich an der Leiteroberfläche:**
 Das ist der einzige Ort, wo sie sein kann...
- (iv) **Ein Leiter ist ein „Äquipotential“, d.h. $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$ im Leiter einschließlich der Oberfläche.** Wegen $\vec{E} = 0 = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow \Phi = \text{const.}$
- (v) **$\vec{E}(\vec{r})$ ist direkt außerhalb des Leiters senkrecht zu seiner Oberfläche:**
 Andernfalls gäbe es eine Komponente parallel zur / an der Oberfläche im Widerspruch zu (i).

Bemerkung: Aussage (v) folgt auch aus (iv), denn Feldlinien stehen gemäß $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ stets senkrecht auf Äquipotentialflächen.

Bemerkung: Die Aussagen (i) und (ii) gelten insbesondere auch für „ausgehöhlte“ Leiter: der Hohlraum ist feld- und ladungsfrei ($\hat{=}$ „Faraday’scher Käfig“).

Mit Aussage (iii) ist erstmals der Begriff der **Flächenladung** motiviert. Das Beispiel der Leiteroberfläche zeigt, dass $\vec{E}(\vec{r})$ am Ort einer Flächenladung „springt“ (hier von $\vec{E} = \vec{E}_i = 0$ auf $\vec{E} = \vec{E}_a \neq 0$). Dieses unstetige Verhalten kann allgemein mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen bestimmt werden:

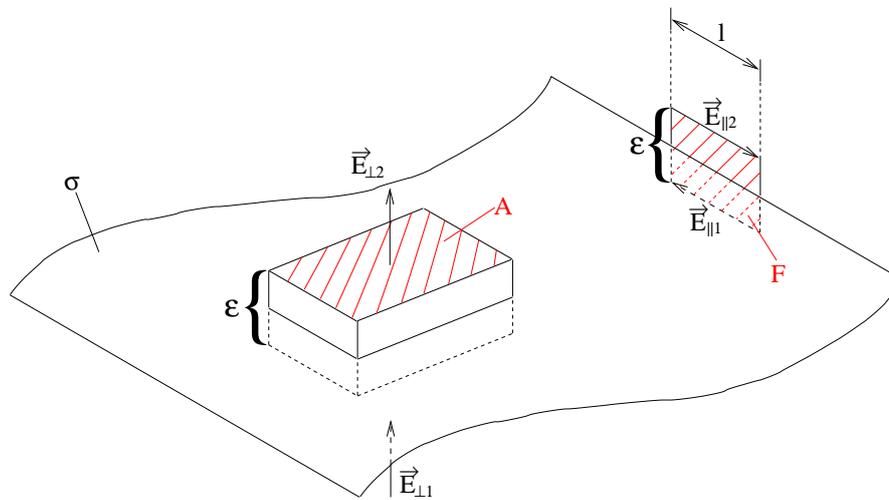


Abbildung 3.7: Flächenladung

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{E}_1 = \vec{E}_{\parallel 1} + \vec{E}_{\perp 1} &\hat{=} \text{ Feld unterhalb der Flächenladungsdichte } \sigma \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{\parallel 2} + \vec{E}_{\perp 2} &\hat{=} \text{ Feld oberhalb der Flächenladungsdichte } \sigma \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Gauß'schen Satzes auf ein hinreichend kleines quaderförmiges Volumen $V = A \cdot \epsilon$ findet man:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{Q_V}{\epsilon_0} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\Leftrightarrow} (E_{\perp 2} - E_{\perp 1}) A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \\ \Rightarrow \boxed{E_{\perp 2} - E_{\perp 1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} &\hat{=} \text{ Unstetigkeit der Senkrechtkomponente, wenn } \sigma \neq 0 \end{aligned}$$

Anwendung des Stokes'schen Satzes auf eine hinreichend kleine Fläche liefert:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 &\Rightarrow \oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\Leftrightarrow} E_{\parallel 2} l - E_{\parallel 1} l = 0 \\ \Rightarrow \boxed{E_{\parallel 2} = E_{\parallel 1}} &\hat{=} \text{ Parallelkomponente immer stetig} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt demnach ($\vec{n} \hat{=} \text{Flächennormaleneinheitsvektor}$):

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}} \quad \text{Verhalten des elektrischen Feldes an Grenzflächen}$$

Für das elektrische Potential folgt sofort:

$$\boxed{\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0} \quad \text{Stetigkeit des Potentials}$$

da die Weglänge gleich Null wird. Das Potential ist also stetig an geladenen Grenzflächen. Nicht so sein Gradient, denn wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ gilt natürlich:

$$\vec{\nabla}\Phi_2 - \vec{\nabla}\Phi_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Bemerkung: Obige Ergebnisse erklären nun, dass wir bei der homogen geladenen Kugel (Nichtleiter!) keine Unstetigkeiten gefunden haben: dort gibt es keine geladenen Grenzflächen, sondern nur eine ausgedehnte Ladungsverteilung.

Bemerkung: Natürlich ist eine „Flächenladung“ eine mathematische Idealisierung, weil:

- (a) Ladungsträger selbst eine Ausdehnung haben (Ionen!) und
- (b) die Anordnung der Ladungsträger nicht in einer unendlich dünnen Schicht erfolgt (sondern üblicherweise in einer Schicht der Dicke von 1-2 Atom- bzw. Moleküldurchmessern). Allerdings sind diese Schichtdicken im Allgemeinen sehr (sehr!) viel kleiner als typische Leiterdurchmesser, so dass die Idealisierung sinnvoll ist.

3.6.2 Poisson- und Laplace-Gleichungen

Zur Lösung elektrostatischer Probleme, bei denen sich Leiter im elektrostatischen Feld befinden, wird meist von (vgl. 3.4)

$$\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \quad \text{Poisson-Gleichung} \quad \boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = 0} \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

ausgegangen. Die **allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung** erhält man formal aus

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_{homog}(\vec{r}) + \Phi_{inhomog}(\vec{r})$$

wobei $\Phi_{homog}(\vec{r})$ die allgemeine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung, also der Laplace-Gleichung ist und $\Phi_{inhomog}(\vec{r})$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der Poisson-Gleichung, und daher

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\Delta\Phi_{homog}(\vec{r})}_{=0} + \Delta\Phi_{inhomog}(\vec{r}) = \Delta\Phi_{inhomog} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

gilt. Die homogene Gleichung besitzt unendlich viele voneinander unabhängige Lösungen, wie zum Beispiel:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z) = \exp\{\alpha x + \beta y\} \sin\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z\right); \quad \alpha, \beta \text{ beliebig}$$

Eine eindeutige Lösung für das Potential $\Phi(\vec{r})$ erhält man nur bei Vorgabe geeigneter Randbedingungen. Man unterscheidet das **erste, zweite und dritte Randwertproblem der Potentialtheorie** je nach Art der Randbedingungen:

- (1) Vorgabe der Potentialwerte am Rand $\partial V = \sum_{i=1}^N A_i$ eines von einem (oder mehreren) Leiter(n) eingeschlossenen Volumens V :

$$\Phi\Big|_{A_i} = \Phi_i = const. \quad \hat{=} \quad \text{Dirichlet-Problem}$$

(2) Vorgabe der Normalkomponente des Potentialgradienten auf dem Rand:

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \Big|_R = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{=} \text{ von Neumann-Problem}$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial n}}$$

(3) Vorgabe einer Kombination gemäß (1) und (2) auf verschiedenen Teilstücken des Randes

$$\hat{=} \text{ (kombiniertes) Dirichlet- von Neumann-Problem}$$

Bemerkung: Das in der Elektrostatik häufigste Randwertproblem ist das Dirichlet-Problem, auf das im Folgenden der Schwerpunkt gelegt wird.

Bemerkung: Bei Vorgabe von Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ an derselben Stelle des Randes spricht man von **Cauchy-Randbedingungen**, bei denen das Problem in Ausnahmen überbestimmt ist.

Das Problem der Lösung der Poisson-Gleichung in einem gegebenen Volumen besteht also in der Berechnung:

- (a) einer partikulären Lösung $\Phi_{inhomog}(\vec{r})$ der Poisson-Gleichung
- (b) der allgemeinen Lösung $\Phi_{homog}(\vec{r})$ der Laplace-Gleichung

Im Rahmen der Vorlesung wird nur auf eine Methode näher eingegangen, nämlich

3.6.3 Die Methode der Spiegelladung(en)

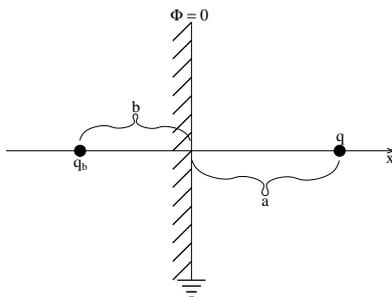
... bedient sich des Potentials einer fiktiven Ladungsverteilung außerhalb des betrachteten Volumens, welche eine einfache Erfüllung der Randbedingungen auf dem Rand des Volumens erlaubt. Die Grundidee von Spiegelladungen ($\hat{=}$ Bild-, Scheinladungen) ist also die Ersetzung des Problems

“Bestimme $\Phi(\vec{r})$ in V bei vorgegebenen $\rho(\vec{r}')$ und vorgegebenen Randbedingungen auf ∂V .“

durch das Problem:

“Bestimme $\Phi(\vec{r})$ in V bei vorgegebenen $\rho(\vec{r}')$ und vorgegebenen Spiegelladungen (deren Hinzunahme die Erfüllung der Randbedingungen garantiert).“

Die Methode sei an einem einfachen **Standardbeispiel** illustriert, nämlich einer Punktladung vor einer (geerdeten), unendlich ausgedehnten, planaren Metalloberfläche:



Die Erdung der Metallplatte garantiert $\Phi(x=0) = 0$.
Das betrachtete Volumen V ist der Halbraum für $x \geq 0$.

Abbildung 3.8: geerdete Platte

Das Dirichlet-Problem lautet:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\vec{r}) &= -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x) \\ \Phi(x=0, y, z) &= 0 \\ \lim_{|\vec{r}|\rightarrow\infty} \Phi(\vec{r}) &= 0\end{aligned}$$

Aus Symmetrieüberlegungen bietet sich eine Positionierung einer zweiten Punktladung, also der Bildladung q_b bei $\vec{r} = -b\vec{e}_x$ an, so dass gilt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} + \frac{q_b}{|\vec{r} + b\vec{e}_x|} \right\}$$

Die Idee ist nun, die Unbekannten b und q_b aus der Randbedingung bei $x=0$ zu bestimmen:

$$\Phi(x=0, y, z) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{(0-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_b}{\sqrt{(0+b)^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

was durch

$$b = a \quad \text{und} \quad q_b = -q$$

erfüllt werden kann. Demnach erfüllt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} - \frac{q}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} \right\}$$

die Randbedingung bei $x=0$ und es gilt offenkundig auch $\lim_{|\vec{r}|\rightarrow\infty} \Phi(\vec{r}) = 0$. Da zudem $\Delta \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} \right\} = -4\pi \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x)$ gilt, ist die eindeutige Lösung des Problems gefunden.

Interessant ist nun meist die Berechnung

- (i) des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ in V .
- (ii) der auf der Metallplatte influenzierten Ladungsdichte σ und der entsprechenden Gesamtladung q_{infl} .
- (iii) der Kraft, die von der Metallplatte auf die Ladung q ausgeübt wird.

Für obiges Beispiel gilt:

- (i) **das elektrische Feld** ergibt sich direkt aus

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} + \frac{\vec{r} + a\vec{e}_x}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|^3} \right\}$$

- (ii) **die influenzierte Flächenladung** erfüllt

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left| \vec{E}(x=0, y, z) \right| = -\frac{\varepsilon_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{2a}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}^3} \right\} = -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}^3}$$

Es gilt somit auch: $\lim_{|\vec{r}|\rightarrow\infty} \sigma(\vec{r}) = 0$

Veranschaulichung für $q > 0$:

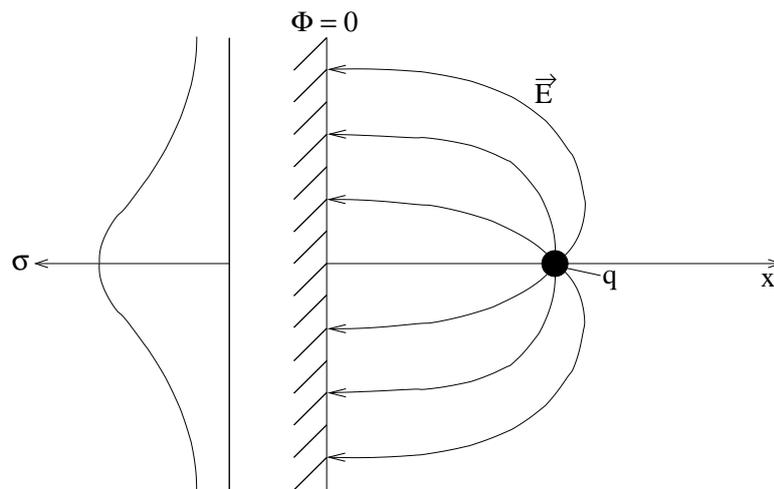


Abbildung 3.9: Ladungsverteilung auf geerdeter Metallplatte mit Punktladung davor

Die gesamte auf der Metallplatte influenzierte Ladung ist dann:

$$\begin{aligned}
 q_{infl} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y, z) dy dz \stackrel{\substack{\text{Ebene Polarkoordinaten:} \\ y = r \cos \phi, z = r \sin \phi}}{=} 2\pi \int_0^{\infty} \sigma(r) r dr \\
 &= -2\pi \frac{q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{ar}{\sqrt{a^2 + r^2}^3} dr = +qa \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right]_0^{\infty} = -q
 \end{aligned}$$

(iii) Die **Kraft auf die Ladung q** ergibt sich schließlich aus (Spiegelladungs-Feld!)

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{|a\vec{e}_x + a\vec{e}_x|^3} (a\vec{e}_x + a\vec{e}_x) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_x$$

und zeigt also in Richtung Metallplatte.

Bemerkung: Es gibt zahlreiche weitere Beispiele zur erfolgreichen Verwendung der Methode der Spiegelladung. Dennoch bleibt sie in der Regel auf Probleme mit einfacher Geometrie beschränkt.

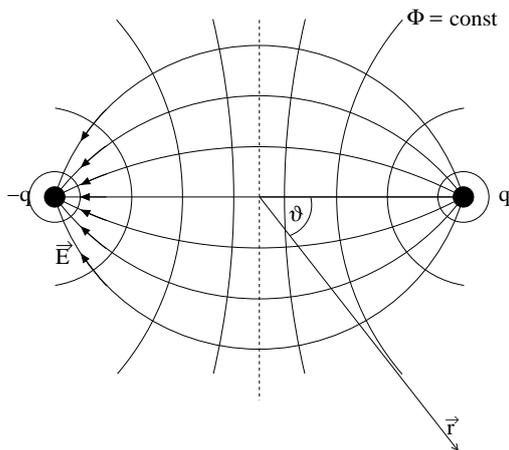
Bemerkung: Dehnt man den Gültigkeitsbereich des oben berechneten Potentials auf den gesamten \mathbb{R}^3 aus, handelt es sich um das Potential eines **elektrischen Dipols**.

3.7 Der elektrische Dipol

Ein System aus zwei Ladungen gleichen Betrags, aber unterschiedlichen Vorzeichens nennt man elektrischen **Dipol**. Wie in 3.6.3 gesehen ist das Dipolpotential gegeben durch:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right\}; \quad \text{mit } q \text{ bei } \vec{r}_1 \text{ und } -q \text{ bei } \vec{r}_2$$

Veranschaulichung von Potential und Feld $\vec{E} = -\nabla\Phi$:



Sei der Koordinatenursprung in der Mitte zwischen beiden Ladungen (Symmetrie!) dann gilt mit $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$\vec{r}_1 = -\frac{1}{2}\vec{d} \quad ; \quad \vec{r}_2 = +\frac{1}{2}\vec{d}$$

Abbildung 3.10: elektrischer Dipol

Für das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ soll stets die natürliche Randbedingung $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0$ gelten (siehe Abschnitt 3.6). Wie aber das Potential gegen Null geht, hängt von der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ab und man kann prinzipiell zwei Situationen unterscheiden:

- (a) die Gesamtladung ist verschieden von Null: $Q = \int \rho(\vec{r}) d^3r \neq 0$
- (b) die Gesamtladung ist gleich Null: $Q = \int \rho(\vec{r}) d^3r = 0$

Im Fall (a) ist anschaulich klar, dass das Potential in großem Abstand von der Ladungsverteilung sich dem einer („Netto“-) Punktladung Q annähert, da $\int \rho(\vec{r}) d^3r$ aus hinreichend großer Entfernung als solche erscheint.

Wie aber ist der asymptotische Potentialverlauf falls die Gesamtladung Q verschwindet, wie es gerade beim Dipol der Fall ist? Dazu macht man folgende Näherung:

$$|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}|^2 = r^2 \mp r d \cos \theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = r^2 \left[1 \mp \left(\frac{d}{r}\right) \cos \theta + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{r}\right)^2 \right]$$

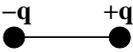
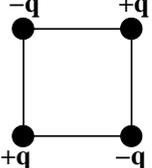
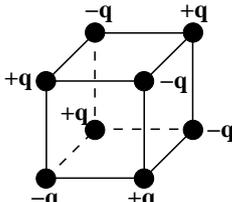
$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}|} \underset{\boxed{|\vec{r}| \gg |\vec{d}|}}{\approx} \frac{1}{r} \left[1 \mp \left(\frac{d}{r}\right) \cos \theta \right]^{-\frac{1}{2}} \underset{\boxed{\sqrt{1 \pm x}^{-1} \approx 1 \mp \frac{x}{2}; |x| \ll 1}}{\approx} \frac{1}{r} \left[1 \pm \left(\frac{d}{2r}\right) \cos \theta \right]$$

Damit gilt für das **Dipolpotential**:

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} \left[1 + \left(\frac{d}{2r}\right) \cos \theta \right] - \frac{q}{r} \left[1 - \left(\frac{d}{2r}\right) \cos \theta \right] \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d \cos \theta}{r^2}$$

das heißt es fällt für große $|\vec{r}| \gg d$ wie $\frac{1}{r^2}$ und damit stärker als das Punktladungspotential $\frac{1}{r}$ ab.

Bemerkung Analoge Überlegungen (siehe Hauptvorlesung) liefern:

	≅	Monopol:	$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r}$
	≅	Dipol:	$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^2}$
	≅	Quadrupol:	$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^3}$
	≅	Oktupol:	$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^4}$

für große Abstände von diesen so genannten **Multipolen**. Die zunächst für diskrete Ladungsverteilungen durchgeführte Überlegung lässt sich auf beliebige kontinuierliche Ladungsverteilungen übertragen. Daraus resultiert dann die so genannte Multipolentwicklung eines elektrostatischen Potentials, mit der man die dominanten Beiträge bestimmen und anschaulich interpretieren kann.

In der Physik ist auch der Fall $|\vec{d}| \rightarrow 0$ interessant, also ein Dipolpotential, welches man sich aus zwei Punktladungen gleichen Betrags und unterschiedlichen Vorzeichens am selben Ort zusammengesetzt denken kann. Die Beschreibung erfolgt dann über das **elektrische Dipolmoment** $\vec{p} = q \vec{d}$:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{Potential eines elektrischen Dipols}$$

$\vec{p} \cdot \vec{r} = q d r \cos\theta$

Diese Definition kann dann auch im Grenzfall $|\vec{d}| \rightarrow 0$ für gegebenes \vec{p} verwendet werden (z.B. können Punktteilchen ein Dipolmoment haben, obwohl ihre elektrische Ladung verschwindet). Das elektrische Feld eines Dipols ergibt sich zu:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}$$

Feld eines elektrischen Dipols

Bemerkung: Über seine Rolle bei der Multipolentwicklung elektrostatischer Felder hinaus ist der Begriff des Dipols auch bedeutsam in der Behandlung elektromagnetischer Strahlung. Im Rahmen der **Elektrodynamik** (im Unterschied zur **Elektrostatik**) wird die Dipolstrahlung behandelt (siehe Hauptvorlesung!)

4 Magnetostatik

... ist charakterisiert durch $\rho \neq 0$, $\vec{j} \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, so dass die Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

mit der Lorentz-Kraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

Es gibt demnach zusätzlich zu einem elektrostatischen Quellenfeld \vec{E} nun auch ein statisches, magnetisches Wirbelfeld \vec{B} . Diese Felder sind entkoppelt, da wegen $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ die Maxwell-Gleichungen nicht gekoppelt sind. Es genügt also im Folgenden die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \vec{F} &= q(\vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

zu untersuchen.

Wie im elektrostatischen Fall gibt es verschiedene Methoden, ein Magnetfeld zu berechnen:

- (i) mit Hilfe des Stokes'schen Satzes aus dem Ampère-Gesetz
- (ii) durch direkte Lösung der Maxwell-Gleichungen
- (iii) aus dem zu einem Problem gehörenden magnetischen Vektorpotential
- (iv) aus dem (verallg.) Biot-Savart-Gesetz

4.1 Anwendung des Stokes'schen Satzes

Offenbar gilt (vgl. 2.2.3):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} &\Rightarrow \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \\ \Leftrightarrow \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}; \quad d\vec{A} = dA \vec{n}; \quad \vec{n} = \text{Flächennormaleneinheitsvektor} \end{aligned}$$

Ist nun die Geometrie hinreichend einfach, \vec{B} konstant entlang des geschlossenen Weges (also des Randes ∂A der stromdurchsetzten Fläche A) und parallel zu letzterem ($\vec{B} \parallel d\vec{s}$), so gilt

$$B = \frac{\mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}}{\int_{\partial A} ds}$$

Bemerkung: Aufgrund der „Wirbelnatur“ von \vec{B} ist diese allgemeine Beziehung auf die Angabe von $B = |\vec{B}|$ beschränkt.

Beispiel: gerader, mit konst. Stromdichte durchflossenen Leiter mit Radius R

$$\vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} j \vec{e}_z, & j = \text{const.}; & r \leq R \\ 0; & & r > R \end{cases}$$

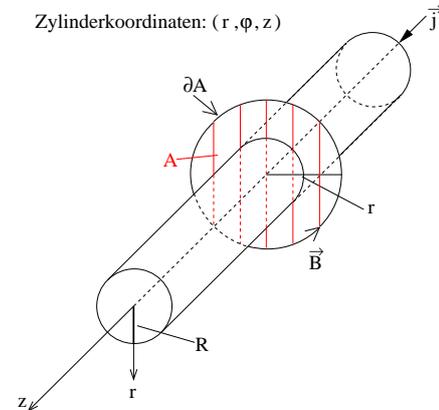


Abbildung 4.1: stromdurchfl. Leiter

Für das Feld im **Leiterinneren** gilt:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B \vec{e}_\varphi; \quad d\vec{s} = d\vec{r} = r \, d\varphi \vec{e}_\varphi \\ \Rightarrow \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= B \int_0^{2\pi} r \, d\varphi = B 2\pi r \\ \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A} \Leftrightarrow B_i 2\pi r \stackrel{!}{=} \mu_0 j \pi r^2 \\ \Rightarrow \vec{B}_i &= \mu_0 \frac{j r}{2} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Im **Außenraum** des Leiters gilt wegen

$$\begin{aligned} \int \vec{j} \cdot d\vec{A} &= j \pi R^2 \quad (\text{Integrand} = 0 \text{ für } r > R): \\ B_a 2\pi r &= \mu_0 j \pi R^2 =: \mu_0 I \\ \Rightarrow \vec{B}_a &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Insgesamt also:

4.2 Direkte Lösung der Maxwell-Gleichungen

Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Lösung (wie immer !) durch Wahl geeigneter Koordinaten und Beachtung der gegebenen Randbedingungen.

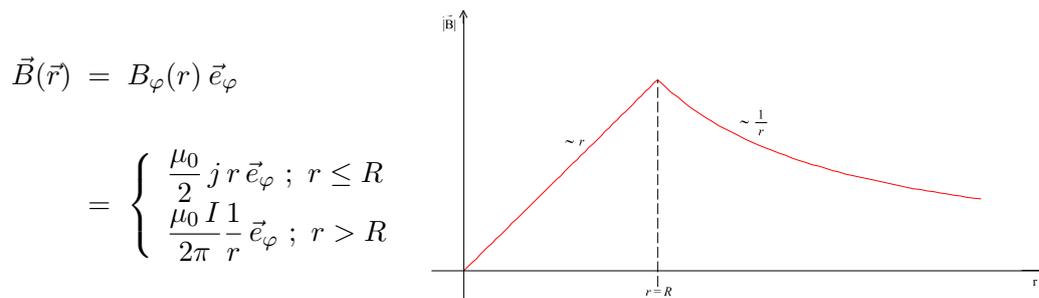


Abbildung 4.2: B-Feldverlauf

Beispiel:**gerader, mit konst. Stromdichte durchflossener Leiter mit Radius R**Wähle wieder Zylinderkoordinaten: $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\varphi \vec{e}_\varphi + B_z \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

Wegen $\mu_0 \vec{j} = \mu_0 j \vec{e}_z$ folgen die Gleichungen:

(I)
$$\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0$$

(II)
$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$$

(III)
$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) = \mu_0 j$$

Die Problemsymmetrie liefert $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$. Gleichung (I) ist daher erfüllt.

Aus Gleichung (II) folgt:

$$B_z \neq B_z(r) \Rightarrow B_z = \text{const.} = 0$$

$$\text{nat. Randbed: } \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Gleichung (III) liefert für den **Innenraum** ($r \leq R$):

$$r B_\varphi = \frac{1}{2} \mu_0 j r^2 + C_1 \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0}{2} j r + \frac{C_1}{r} = \frac{\mu_0}{2} j r$$

$$C_1 = 0, \text{ wegen } B < \infty \text{ für } r \rightarrow 0$$

und für den **Außenraum** ($r > R$):

$$r B_\varphi = \text{const.} \Rightarrow B_\varphi = \frac{C_2}{r} = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r} = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Anschlussbedingung bei $r = R$:

$$\frac{C_2}{R} \stackrel{!}{=} \frac{\mu_0}{2} j R \Rightarrow C_2 = \frac{\mu_0}{2} j R^2$$

$$I = j \pi R^2$$

also die erwartete Lösung.

Bemerkung: Aus $\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) = 0$ folgt noch:
 $B_r = \frac{C_3}{r} = 0$, da $C_3 = 0$, wegen $B < \infty$ für $r \rightarrow 0$

4.3 Das magnetische Vektorpotential

Ähnlich wie im Falle des elektrostatischen Feldes (vgl. 3.4) legt hier die Gleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ die Definition eines Potentials nahe:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{ist stets erfüllt für} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Damit folgt aus dem Ampère'schen Gesetz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Vektoranalytisches
„BAC-CAB“ ☺

Ähnlich wie im Falle des skalaren elektrostatischen Potentials $\Phi(\vec{r})$ ist auch das magnetische Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ nicht eindeutig festgelegt: Offenbar gilt nämlich für eine beliebige Funktion $\lambda(\vec{r})$ mit $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \lambda$ die Gleichung:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \lambda = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0$$

Diese Wahlfreiheit bzgl. $\lambda(\vec{r})$ kann genutzt werden, um $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ zu erreichen („Coulomb-Eichung“, s.u.), denn:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \lambda) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \Delta \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0$$

Dazu ist also die Funktion $\lambda(\vec{r})$ lediglich als Lösung einer Poisson-Gleichung zu bestimmen (vgl. 3.6.3). Mit dieser Coulomb-Eichung hat man dann (s.o.)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

d.h. die Komponente von $\vec{A}(\vec{r})$ erfüllen jeweils eine Poisson-Gleichung:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Die formale Lösung ist uns längst bekannt (siehe 3.4):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Für den Spezialfall von Linien- (\vec{I}) und Flächenströmen (\vec{K}) gilt entsprechend:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\vec{I}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr' \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_A \frac{\vec{K}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2 r'$$

Insgesamt demnach:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_z(r) \vec{e}_z = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{4} j (r^2 - R^2) \vec{e}_z & ; r \leq R \\ -\frac{\mu_0}{2} j R^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) \vec{e}_z & ; r > R \end{cases}$$

Und damit schließlich wieder:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} +\frac{\mu_0}{2} j r \vec{e}_\varphi & ; r \leq R \\ +\frac{\mu_0}{2} j R^2 \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi & ; r > R \end{cases}$$

4.4 Das Biot-Savart-Gesetz

Aus der Integraldarstellung des Vektorpotentials im vorherigen Abschnitt folgt eine entsprechende Darstellung für das Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times (\vec{A} \Phi) = \Phi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla} \Phi \\ \vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}') = 0 \end{array} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad \text{ („Verallgemeinertes“ } \\ &\quad \text{Biot-Savart-Gesetz} \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist analog zu der in 3.3 hergeleiteten für das elektrostatische Feld. Offenkundig gilt auch für Magnetfelder das Superpositionsprinzip.

Die in der Praxis oft (meist?) „unhandliche“ Integralformel kann durch Spezialisierung auf Linienströme, d.h. durch

$$\vec{j}(\vec{r}) d^3r' = I d\vec{r}'$$

auf das ursprüngliche Biot-Savart-Gesetz (1820) reduziert werden:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{Biot-Savart-Gesetz für Linienströme}$$

Bemerkung: Oft wird das Biot-Savart-Gesetz nur für geschlossene Linienströme angegeben.

Beispiel: **gerader, Stromdurchflussener, ausdehnungsloser Leiter**

Wähle Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= z' \vec{e}_z \Rightarrow d\vec{r}' = dz' \vec{e}_z \\ \wedge \quad \vec{r} - \vec{r}' &= \rho \vec{e}_\rho + (z - z') \vec{e}_z \\ \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' &= -\rho \vec{e}_\varphi dz' \end{aligned}$$

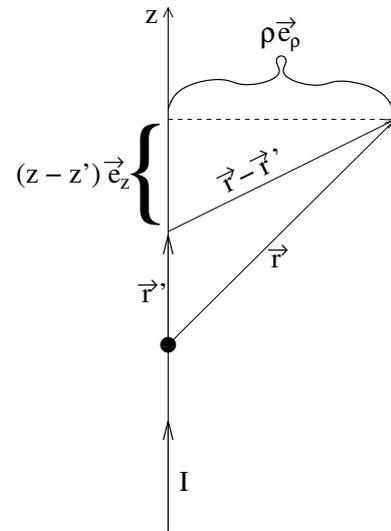


Abbildung 4.3: stromdurchflussener Leiter

Also:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= + \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \vec{e}_\varphi}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}^3} dz' \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi \rho} I \vec{e}_\varphi \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}^3} dt \\ &\quad \left. \begin{array}{l} z - z' = \rho t \\ \Rightarrow dz' = -\rho dt \end{array} \right\} \\ &= + \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \vec{e}_\varphi \underbrace{\left[\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=2} = + \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Das entspricht (natürlich!) dem oben gefundenen Ergebnis für das Magnetfeld außerhalb eines geraden Drahtes endlicher Dicke.

Beispiel: **Magnetfeld im Mittelpunkt P einer kreisförmigen Leiterschleife**

In Zylinderkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R \vec{e}_\rho \Rightarrow d\vec{r}' = R d\varphi \vec{e}_\varphi \\ \wedge \quad \vec{r} - \vec{r}' &= \vec{0} - R \vec{e}_\rho = -R \vec{e}_\rho \\ \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' &= -R^2 d\varphi \vec{e}_z \end{aligned}$$

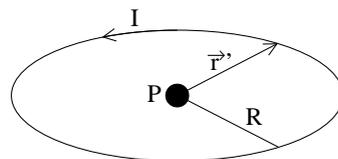


Abbildung 4.4: Leiterschleife

Also:

$$\vec{B}(\vec{r} = 0) = + \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \vec{e}_z}{\sqrt{(-R)^2}^3} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$$

In Übereinstimmung mit der Erwartung verschwindet das Magnetfeld für $R \rightarrow \infty$.

4.5 Die Kraft auf einen Strom im Magnetfeld

Bisher wurde das Magnetfeld für gegebene stationäre Strom(dichte)verteilungen berechnet. Was geschieht aber mit einem Strom, der sich im Magnetfeld einer anderen Stromverteilung befindet? Die Antwort ergibt sich mit Hilfe des magnetischen Anteils der Lorentz-Kraft $q(\vec{v} \times \vec{B})$ auf eine Ladung:

Für mehrere Ladungsträger mit Ladung q mit der Teilchenzahldichte n (= Teilchenzahl pro Volumen) gilt:

$$\vec{j}(\vec{r}') = q n(\vec{r}') \vec{v}$$

so dass sich eine (Lorentz-)Kraftdichte (s.o.)

$$\vec{f}(\vec{r}') = q n \vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B}$$

definieren lässt. Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}(\vec{r}') d^3 r' = \int_V \vec{j} \times \vec{B} d^3 r'$$

Dies erklärt z.B. die Anziehung/Abstoßung von gleichsinnig/entgegengesetzt von Strom durchflossenen parallelen Leitern (Schulversuch?):

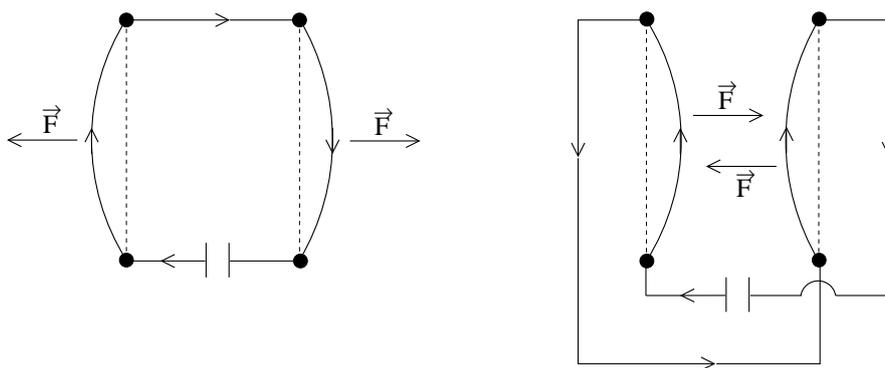


Abbildung 4.5: Kraft auf stromdurchflossene Leiter

Kraftrichtung ergibt sich aus

- rechte-Hand-Regel für stromdurchflossenen Draht $\Rightarrow \vec{B}$
- Stromrichtung in jeweils anderen Draht (Elektronen mit $q < 0$!)
- $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$

4.6 Verhalten von $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ an Grenzflächen

Aufgrund der gesehenen Analogie zwischen Elektro- und Magnetostatik stellt sich die Frage nach der Auswirkung von Flächenströmen (analog zu Flächenladungen). Dazu eine zu 3.6.1 analoge Betrachtung:

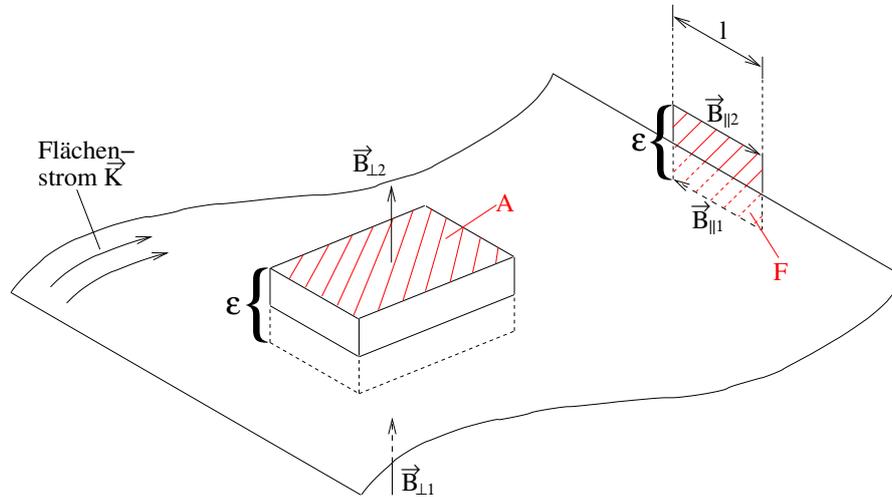


Abbildung 4.6: Flächenstrom

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{B}_1 &= \vec{B}_{\parallel 1} + \vec{B}_{\perp 1} \hat{=} \text{ Feld unterhalb eines Flächenstroms } \vec{K} \\ \vec{B}_2 &= \vec{B}_{\parallel 2} + \vec{B}_{\perp 2} \hat{=} \text{ Feld oberhalb eines Flächenstroms } \vec{K} \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Gauß'schen Satzes auf ein hinreichend kleines quaderförmiges Volumen $V = A \cdot \varepsilon$ findet man:

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} (B_{\perp 2} - B_{\perp 1}) A$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{\perp 2} = B_{\perp 1}} \hat{=} \text{ Senkrechtkomponente immer stetig}$$

Anwendung des Stokes'schen Satzes auf eine hinreichend kleine Fläche F :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} &\Rightarrow \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{F} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{F} \\ \Leftrightarrow \int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 |\vec{I}| &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\Rightarrow} (B_{\parallel 2} - B_{\parallel 1}) l = \mu_0 |\vec{I}| \underset{\vec{I} = \vec{K} l}{=} \mu_0 |\vec{K}| l \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{\parallel 2} - B_{\parallel 1} = \mu_0 |\vec{K}|} \hat{=} \text{ Unstetigkeit der Parallelkomponente, wenn } |\vec{K}| \neq 0$$

Insgesamt gilt demnach ($\vec{n} \hat{=}$ Flächennormaleneinheitsvektor):

$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{K} \times \vec{n})}$$

Verhalten des magnetischen Feldes an stromdurchflossenen Grenzflächen

Für das magnetische Vektorpotential gilt in Coulomb-Eichung ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$):

$$A_{\perp 2} - A_{\perp 1} = 0 \quad (\text{analog zur Folgerung aus } \text{div } \vec{B} = 0)$$

und wegen $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ folgt:

$$\int_F (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0 \Rightarrow A_{\parallel 2} - A_{\parallel 1} = 0$$

$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow F \rightarrow 0$

Das magnetische Vektorpotential ist also an stromdurchflossenen Grenzflächen insgesamt stetig:

$$\boxed{\vec{A}_2 - \vec{A}_1 = 0}$$

Für seine Normalenableitung gilt hingegen:

$$\boxed{(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}_2 - (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}_1 = \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}}$$

Bemerkung: Diese Ergebnisse erklären (a posteriori) die Wahl der Anschlussbedingungen in den Abschnitten 4.2 und 4.3

Bemerkung: Ähnlich wie eine „Flächenladung“ ist ein „Flächenstrom“ natürlich eine Idealisierung, vgl. die entsprechende Bemerkung bezüglich σ .

Bemerkung: Wie in der Elektrostatik kann auch für das magnetische Vektorpotential eine Multipolentwicklung gemacht werden. Man findet wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, dass der Monopolbeitrag immer verschwindet. Mit dem **magnetischen Moment** $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r'$ findet man für den **magnetischen Dipol**:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\}$$

5 Elektrodynamik

Im Unterschied zu den vorangehenden Kapiteln sei nun auch $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$, so dass keine Vereinfachung der Maxwell-Gleichungen mehr vorliegt. Sie lauten also:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

mit der Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ und der aus den Maxwell-Gleichungen herleitbaren Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$.

Wie zuvor bemerkt, können die Maxwell-Gleichungen auch äquivalent als Integralgleichungen formuliert werden (Anwendung des Gauß'schen und Stokes'schen Satzes!):

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{qV}{\varepsilon_0} \\ \int_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} \\ \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= 0 \\ \int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \int_F \vec{j} \cdot d\vec{F} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} \cdot d\vec{F} \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist aber die Lösung der Differentialgleichungen einfacher, so dass wir uns im Folgenden auf die differentielle Formulierung beschränken.

Im Unterschied zu den Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik sind die vollen Maxwell-Gleichungen gekoppelt, d.h. \vec{E} und \vec{B} sind ebenso wenig unabhängig voneinander wie ρ und \vec{j} . Um eine Entkopplung zu erreichen, betrachten wir

5.1 Die elektrodynamischen Potentiale

Die **Idee** ist die gleiche wie im statischen Fall: man versucht durch Definition geeigneter Potentialfunktionen die Formulierung der Maxwell-Gleichungen zu vereinfachen. Wie zuvor (vgl. 4.3) scheint die Einführung des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} vielversprechend:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

Damit folgt:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left\{ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} = 0$$

In Verallgemeinerung des elektrostatischen Falles gilt hier:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Damit sind die beiden homogenen Gleichungen stets erfüllt, wenn Φ und \vec{A} bekannt sind. Zu ihrer Bestimmung setzt man \vec{E} und \vec{B} in die inhomogenen Gleichungen ein:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\Delta \Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

und:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ &= \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right\} \vec{A} + \nabla \left\{ (\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\square \vec{A} - \nabla \left\{ (\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = -\mu_0 \vec{j}}$$

$$\boxed{\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

Bemerkung: Man löst also zunächst für gegebene Ladungs- und Stromdichteverteilung die inhomogenen Gleichungen für die Potentiale Φ und \vec{A} und mit diesen dann die homogenen Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} .

Bemerkung: Man beachte, dass die elektrodynamischen Potentiale Φ und \vec{A} **nicht** mit denen aus der Elektro- und Magnetostatik identisch sind, sondern diese verallgemeinern (Zeitabhängigkeit!).

Die Lösung der beiden Potentialgleichungen ist nicht trivial, da auch diese Gleichungen in der gegebenen Formulierung gekoppelt bleiben. Um eine Entkopplung zu erreichen bedient man sich sogenannter

5.2 Eichtransformationen

Die Grundidee hierbei ist (erneut wie früher gesehen!), dass für die Bestimmung der elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} die Potentiale Φ und \vec{A} nicht eindeutig bestimmt sein müssen. Wir erinnern uns (vgl. 4.3), dass (jetzt zeitabhängig!)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}, t) + \nabla\lambda(\vec{r}, t)$$

unabhängig von $\lambda(\vec{r}, t)$ verträglich ist mit

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad , \quad \text{da} \quad \nabla \times \nabla\lambda(\vec{r}, t) = 0$$

Da nun im Allgemeinen auch \vec{E} vom Vektorpotential abhängt (s.o.), muss gefordert werden:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda \\ &\stackrel{!}{=} -\nabla\Phi_0 - \frac{\partial\vec{A}_0}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \Phi_0 = \Phi + \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \vec{A}_0(\vec{r}, t) + \nabla\lambda(\vec{r}, t) \\ \Phi(\vec{r}, t) &= \Phi_0(\vec{r}, t) - \frac{\partial\lambda(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

liegt eine **Eichtransformation** vor, unter der die physikalischen Felder \vec{E} und \vec{B} invariant sind. Diese Nichteindeutigkeit der Potentiale kann nun genutzt werden, um die inhomogenen Gleichungen für die Potentiale weiter zu vereinfachen. Es bietet sich zunächst die **Coulomb-Eichung** (vgl. 4.3) an, die hier aber nicht weiter verfolgt wird. Der wesentliche Nachteil der Coulomb-Eichung ist die Tatsache, dass die Potentialgleichungen gekoppelt bleiben.

Vorteilhafter ist

Die Lorenz(t)z-Eichung:

Vorbemerkung: Ursprünglich gefunden vom dänischen Physiker Ludwig V. Lorenz, also nicht vom Holländer Hendrick A. Lorentz. Dennoch wird die Eichung in vielen Lehrbüchern nach Letzterem benannt (vgl. Jackson, Griffiths)

Setzt man die allgemeine Form der Eichtransformation (s.o.) in die inhomogenen Potentialgleichungen ein, so findet man:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0 - \frac{\partial}{\partial t}\Delta\lambda + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}_0) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \nabla\lambda) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \Delta\Phi_0 + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}_0) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \vec{A}_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\lambda) + \Delta(\nabla\lambda) - \nabla \left\{ (\nabla \cdot \vec{A}_0) + (\nabla \cdot \nabla\lambda) \right\} - \nabla \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} \right] &= -\mu_0 \vec{j} \\ \Rightarrow \square \vec{A}_0 - \nabla \left\{ (\nabla \cdot \vec{A}_0) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} \right\} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Und dadurch motiviert schreibt man:

$$\square \Phi_0 + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right\} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Die zur Entkopplung der Gleichungen notwendige Wahl ist offensichtlich

$$\nabla \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0$$

was als Loren(t)z-Eichung bekannt ist. Im statischen Fall ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) geht sie in die Coulomb-Eichung über.

Diese bedingt:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} &= \nabla \cdot \vec{A} - \Delta \lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow -\square \lambda &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \Delta \lambda = \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned}$$

Es genügt demnach

$$\begin{aligned} \square \Phi_0 &= - \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} - \Delta \Phi_0 \right\} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \square \vec{A}_0 &= - \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_0}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}_0 \right\} = -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

zu lösen. Damit ist das Ziel erreicht: die beiden inhomogenen Gleichungen ($\hat{=}$ 4 partielle Differentialgleichungen für 4 Funktionen) sind entkoppelt, d.h. Φ_0 und \vec{A}_0 können für gegebenes ρ und \vec{j} unabhängig voneinander bestimmt werden.

Bemerkung: Aufgrund der Symmetrie der beiden Gleichungen in Loren(t)z-Eichung bieten sie sich als „natürlicher“ Ausgangspunkt für eine **kovariante Formulierung** der Elektrodynamik an.

Die Lösungen der Potentialgleichungen in Loren(t)z-Eichung werden in der Hauptvorlesung zur E-Dynamik behandelt. Hier untersuchen wir noch

5.3 Erhaltungssätze in der Elektrodynamik

Wie immer sollte natürlich auch in der Elektrodynamik die Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls gewährleistet sein. Das sei für die zuerst genannte Größe (Energie) explizit gezeigt...

Der Energiesatz der Elektrodynamik:

Die für die Physik grundlegenden Erhaltungssätze für z.B. Impuls, Energie oder auch Drehimpuls gelten (natürlich) auch in der Elektrodynamik. Für die klassische Elektrodynamik ist der Energiesatz (neben dem Ladungserhaltungssatz) von besonderer Bedeutung, wie im Folgenden gezeigt wird.

Man geht dazu üblicherweise aus von der von einem elektromagnetischen Feld an einem geladenen Teilchen geleisteten Arbeit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \right\} \cdot \{ \vec{v} dt \} = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

Für eine Ladungsverteilung ρ folgt:

$$\frac{dW}{V} = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \left\{ \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B} \right\} \cdot \{ \vec{v} dt \} = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} dt = \underbrace{\vec{j}}_{\vec{j} = \rho\vec{v}} \cdot \vec{E} dt$$

Das heißt: Die pro Volumen- und Zeiteinheit vom Feld an der Ladungsverteilung geleistete Arbeit ist durch $\vec{j} \cdot \vec{E}$ gegeben. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen findet man:

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \\ &= \underbrace{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\left(\nabla \times \vec{B} \right) \cdot \vec{E} = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})} \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}_{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= -\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right\} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck führt auf folgende **Definitionen**:

$$U_{em}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \quad \text{Energiedichte des elektromagnetischen Feldes}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right\} \quad \text{Energiestromdichte bzw. Poynting-Vektor}$$

mit denen man findet:

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{(Differentialles) Poynting-Theorem}$$

Das Theorem besagt, dass die (explizite) zeitliche Änderung der elektromagnetischen Feldenergiedichte durch die Energiestromdichte und eine „Senke“ gegeben ist. Anders formuliert: Die pro Zeiteinheit an den Ladungen im Volumen V geleistete Arbeit ist gleich der Summe der Änderungen (Abnahme!) der Feldenergie in V und des Energieflusses durch die Oberfläche ∂V des Volumens.

Bemerkung: Für die Energie(dichte) des elektromagnetischen Feldes gilt das Superpositionsprinzip **nicht**. Sei z.B. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \stackrel{i.A.}{\Rightarrow} \vec{E}^2 \neq \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2$, d.h. die Gesamtenergiedichte ist ungleich der Summe der Einzelenergiedichten.
Beispiel: $\vec{E}_1 = \vec{E}_0, \vec{E}_2 = -\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$, d.h. die Gesamtenergiedichte verschwindet obwohl die Einzelenergiedichten von Null verschieden sind.

Für alles Weitere siehe die Hauptvorlesung...

5.4 Ein kurzer Überblick über elektromag. Wellen im Vakuum

5.4.1 Homogene Wellengleichung

Für ladungs- und stromfreie Bereiche gilt für die elektromagnetischen Potentiale in Loren(t)z-Eichung:

$$\begin{aligned}\square \Phi(\vec{r}, t) &= 0 \\ \square \vec{A}(\vec{r}, t) &= 0\end{aligned}$$

Für die Felder erhalten wir aus den Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} &= \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \\ \Rightarrow -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta \vec{E} \\ \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\boxed{\Delta \vec{E} = 0} \quad \text{und entsprechend auch} \quad \boxed{\Delta \vec{B} = 0}$$

Das heißt: In kartesischen Koordinaten erfüllt jede Komponentenfunktion f die Wellengleichung.

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} \quad \text{oder alternativ} \quad \boxed{\square f = 0}$$

5.4.2 Ebene Wellen

Im **1-dimensionalen Fall** sehen wir, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

gelöst wird durch:

$$f(x, t) = f_1(kx - \omega t) + f_2(kx + \omega t), \quad \text{o.B.d.A.: } \omega \geq 0$$

$$\Rightarrow k^2 f_1''(kx - \omega t) + k^2 f_2''(kx + \omega t) - \frac{1}{c^2} f_1''(kx - \omega t) \omega^2 - \frac{1}{c^2} f_2''(kx + \omega t) \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) f(x, t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = k^2 c^2} \quad \text{Dispersionsrelation der elektromagnetischen Wellen}$$

Im **3-dimensionalen Fall** gilt entsprechend: $f(\vec{r}, t) = f_1(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + f_2(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$

Untersuchung von $f_1(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}_{\text{Phase } \phi(\vec{r}, t)})$

feste Zeit: Fläche konstanter Phase ist durch $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$ gegeben. $\vec{k} \cdot \vec{r}$ ist die Gleichung der Wellenfront-Ebene.

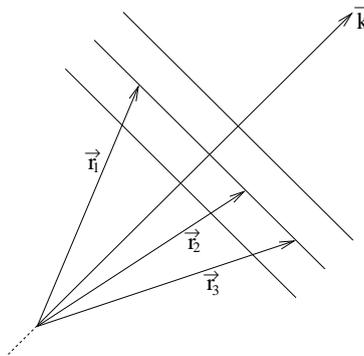


Abbildung 5.1: Wellenfront-Ebene

Zeitablauf: für den **Zeitablauf** (Bewegung der Ebene) gilt

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t &= k r_{\parallel} - \omega t = c_1 = \text{const.} \\ \Rightarrow r_{\parallel} &= \frac{c_1}{k} + \frac{\omega}{k} t \end{aligned}$$

Die Ebene bewegt sich mit (Phasen)geschwindigkeit: $\frac{dr_{\parallel}}{dt} = \frac{\omega}{k}$ in Richtung \vec{k} .

wähle f_1 : z.B. ebene Welle:

$$f_1(\vec{r}, t) = A \exp \left\{ i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right\} \quad (\text{eigentlich nur der Realteil})$$

\vec{k} : Wellenvektor, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$: Wellenlänge (Abstand nächstbenachbarter Wellenfronten)

fester Ort \vec{r}_0 : Wiederholung nach $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\nu = \frac{1}{\tau}: \text{Frequenz, } \omega = 2\pi\nu: \text{Kreisfrequenz und es gilt } c = \lambda\nu = \frac{\lambda}{\tau}$$

Übertragung auf elektromagnetisches Feld (nur der Realteil ist physikalisch relevant) mit

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \exp \left\{ i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right\} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \exp \left\{ i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right\} \end{aligned}$$

Die Wellengleichung ist erfüllt. Die Kopplung erfolgt über die Maxwell-Gleichungen durch

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Mit den Nebenrechnungen

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_x &= i\bar{\omega} B_x \\
 &= i\bar{\omega} B_{0x} \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \bar{\omega} t\right)\right\} \\
 \left(\nabla \times \vec{E}\right)_x &= \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \\
 &= (E_{0z} i k_y - E_{0y} i k_z) \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} \\
 &= i\left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right)_x \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\}
 \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$i\left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right) \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} = i\bar{\omega} \vec{B}_0 \exp\left\{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \bar{\omega} t\right)\right\}$$

Da dies für alle Raum-Zeit-Punkte gelten soll, fordern wir:

$$\omega = \bar{\omega} \quad ; \quad \vec{k} = \vec{k}$$

Wir erhalten die Beziehung

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

und mit $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ erhalten wir

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

Weiterhin folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ entsprechend

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$$

$\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$ bilden also ein Rechtssystem:

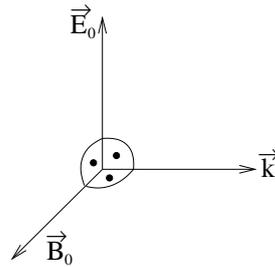


Abbildung 5.2: Rechtssystem

Da die Auslenkung senkrecht zu \vec{k} ist, handelt es sich um **transversale Wellen**. Sei o.B.d.A. $\vec{k} = k \vec{e}_z$, so folgt \vec{E} direkt und \vec{B} kann man aus \vec{E} bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y) \exp\{i(kz - \omega t)\} \\
 \vec{B} &= \frac{1}{c} (-E_{0y} \vec{e}_x + E_{0x} \vec{e}_y) \exp\{i(kz - \omega t)\}
 \end{aligned}$$

$$\text{z.B. wegen } \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -k E_{0y} \\ k E_{0x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_{0y} \\ E_{0x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nehmen wir nun $E_{0y} = 0$ an, ergibt sich für die (physikalisch relevanten) Realteile

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x \\ \vec{B} &= \frac{1}{c} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_y\end{aligned}$$

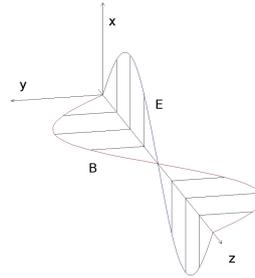


Abbildung 5.3: Transversale Welle

5.4.3 Polarisation ebener Wellen

Die o.a. Lösung ist eine sich in positiver z-Richtung fortpflanzende, monochromatische Welle. Sie ist allein durch \vec{E} (oder \vec{B}) festgelegt.

O.B.d.A. betrachte nun: \vec{E} -Feld mit E_{0x} und E_{0y} komplex:

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\phi} \quad \text{und} \quad E_{0y} = |E_{0y}| e^{i(\phi+\delta)}$$

Dabei ist $\phi(\vec{r}, t)$ die oben eingeführte Phase. Für das reale physikalische Feld gilt:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

mit

$$\begin{aligned}E_x &= |E_{0x}| \cos(kz - \omega t) \\ E_y &= |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \delta)\end{aligned}$$

Der Wert von δ bestimmt die Art der Polarisation, deshalb gibt es eine

Fallunterscheidung der Polarisationen

- **linear polarisiert:** $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$

fester Vektor $\vec{E} = (|E_{0x}| \vec{e}_x \pm |E_{0y}| \vec{e}_y) \cdot \cos(kz - \omega t + \phi)$

$$|\vec{E}| = \sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2} \cdot |\cos(kz - \omega t + \phi)|, \quad \tan \alpha = \pm \frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|}$$

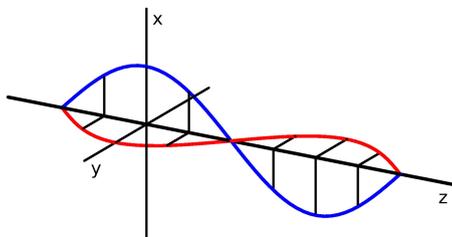


Abb. 5.4: E-Feld Komponenten

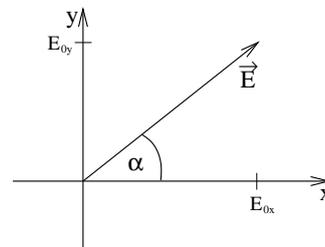


Abb. 5.5: E-Feld Ausrichtung

- **zirkular polarisiert:** $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ und $|E_{0x}| = |E_{0y}|$

$$\vec{E} = E \{ \cos(kz - \omega t + \phi) \vec{e}_x \mp \sin(kz - \omega t + \phi) \vec{e}_y \}, |\vec{E}| = \text{const.}$$

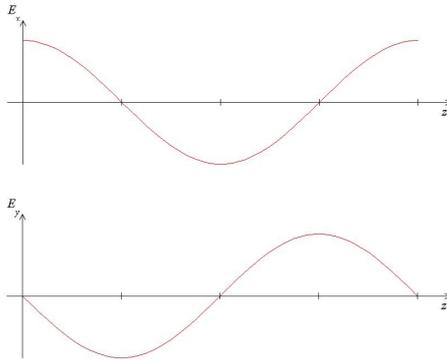


Abb. 5.6: E-Feld Komponenten

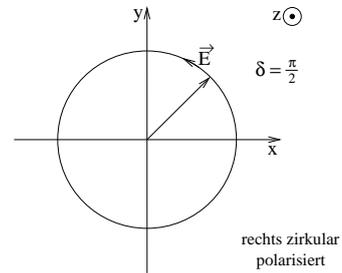


Abb. 5.7: E-Feld Ausrichtung

Blickt man in positive z -Richtung (Ausbreitungsrichtung), so dreht sich \vec{E} nach rechts.

- **elliptisch polarisiert (in x, y):** $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \phi), \quad E_y = \mp |E_{0y}| \sin(kz - \omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_x}{|E_{0x}|} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|} \right)^2 = 1$$

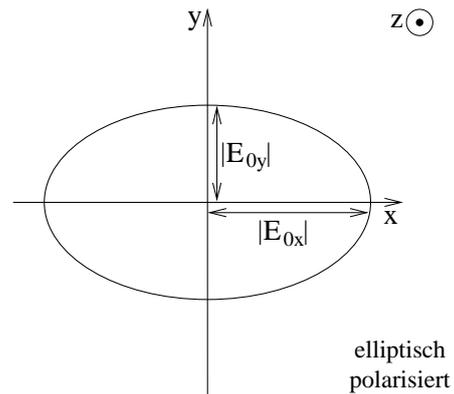


Abbildung 5.8: E-Feld Ausrichtung

- **elliptisch polarisiert (beliebig):** δ beliebig und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$

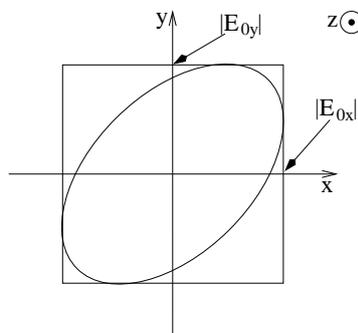


Abbildung 5.9: E-Feld Ausrichtung

Teil III

Spezielle Relativitätstheorie

1 Grundlagen

Ursprüngliche Erwartung:

Licht ist an ein materielles Medium, den „Äther“ (gr.: „aither“ $\hat{=}$ „die obere Luft“) gebunden, wie z.B. Schallwellen an Luft.

Die daraus folgende Überlegung, dass die Lichtgeschwindigkeit dann vom Bewegungszustand des Bezugssystems abhängen sollte, sollte überprüft werden mit dem

1.1 Michelson-Morley-Experiment

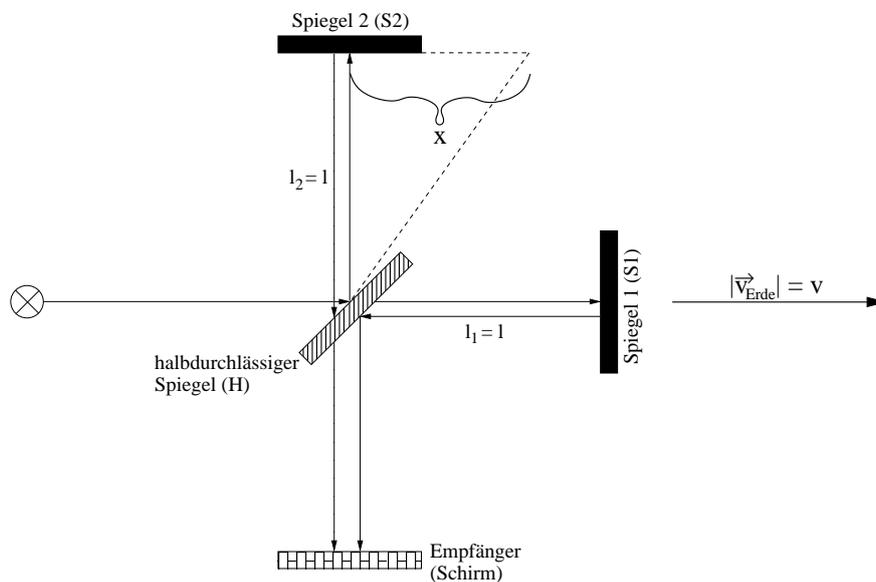


Abbildung 1.1: Versuchsaufbau

Berechnung der Laufzeiten

$$H \rightarrow S_1 \rightarrow H : t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$H \rightarrow S_2 \rightarrow H : t_2 = \frac{2\sqrt{l^2 + x^2}}{c}; \quad x = \frac{1}{2} v t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die Laufzeitdifferenz

$$t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = \frac{2l}{c} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \right] = l \frac{v^2}{c^2}$$

$|\vec{v}_{Erde}| \approx 30 \frac{km}{s} \Rightarrow \frac{v}{c} \approx 10^{-4}$

führt zu einem Phasenunterschied (ν = Wellenfrequenz) $\Delta\phi = \nu(t_2 - t_1) \approx \nu \frac{lv^2}{c^3}$

Es wurde aber $\Delta\phi = 0$ beobachtet!

Bemerkung: Um die eventuelle Ungenauigkeit in den Armlängen $l_1 = l_2 = l$ auszuschließen wurde der Apparat um -90° gedreht, so dass dann eine Phasendifferenz von $-\Delta\phi$ erwartet würde. Damit ergibt sich zur Orientierung 0° und -90° eine **Gesamtphasendifferenz** $2\Delta\phi$, die im Experiment zu $2\Delta\phi \sim \frac{1}{3}$ erwartet wurde. Das Instrument hätte um den Faktor 40 kleinere Phasendifferenzen detektieren können - eine solche wurde aber nicht beobachtet.

Es gab verschiedene Deutungen dieses Negativresultats:

- (1) **Michelson:** Äther bewegt sich mit der Erde.
- (2) **Lorentz/Fitzgerald/Lodge:** Der Instrumentenarm in Bewegungsrichtung ist (um den Faktor $1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$) verkürzt (infolge eines Ätherdrucks).
- (3) **Einstein:** (i) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ist unabhängig vom Bewegungszustand des Systems. (ii) In allen gleichförmig bewegten Systemen gelten dieselben Naturgesetze („Kovarianz“ der Naturgesetze).

Heute wissen wir, dass Einsteins Deutung die richtige ist.

1.2 Die Lorentztransformation

Betrachte zwei relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit v bewegte Bezugssysteme Σ, Σ' (o.B.d.A. sei $\vec{v} = v \vec{e}_z$). Wenn zum Zeitpunkt $t = 0$, zu dem beide Koordinatensysteme denselben Ursprung haben, ein Lichtsignal von dort ausgesendet wird, sehen Beobachter in Σ und Σ' eine sphärische Lichtausbreitung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{bzw.} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Da $c = \text{const.}$ und in Σ und Σ' gleich ist, sind die beiden Rechnungen nicht mit einer Galilei-Transformation $z' = z - vt$ verträglich.

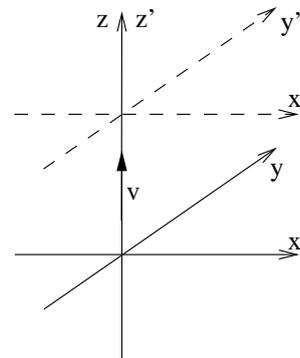


Abb. 1.2: Bezugssysteme

Daher:

1.2.1 Idee: Lineare Transformation

$$\left. \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \\ z' = a_{11} z + a_{12} t \\ t' = a_{21} z + a_{22} t \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Da nun der Beobachter in Σ das System Σ' mit dem Bewegungsgesetz $z = vt$ sieht, liegt (insbesondere für $z' = 0$) der Ansatz:

$$\begin{cases} z' = \gamma(z - vt) \\ t' = \delta(\varepsilon z + t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = \gamma & ; & a_{12} = -\gamma v \\ a_{21} = \delta \varepsilon & ; & a_{22} = \delta \end{cases}$$

nahe, in dem also nur noch drei Koeffizienten unbekannt sind.

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 & x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + \gamma^2 (z^2 - 2zvt + v^2 t^2) - c^2 \delta^2 (\varepsilon^2 z^2 + 2\varepsilon zt + t^2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 \underbrace{(\gamma^2 - c^2 \delta^2 \varepsilon^2)}_{\stackrel{!}{=} 1} - c^2 t^2 \underbrace{\left(\delta^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\stackrel{!}{=} 1} - 2zt \underbrace{(v\gamma^2 + \varepsilon c^2 \delta^2)}_{\stackrel{!}{=} 0} = 0
 \end{aligned}$$

Also:

$$\gamma^2 - c^2 \delta^2 \varepsilon^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 - c^2 \delta^2 \frac{v^2 \gamma^4}{c^4 \delta^4} = 1 \quad (\text{I})$$

$$c^2 \delta^2 - \gamma^2 v^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 \delta^2 = c^2 + \gamma^2 v^2 \quad (\text{II})$$

$$v\gamma^2 + \varepsilon c^2 \delta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{v\gamma^2}{c^2 \delta^2} \quad (\text{III})$$

$$(\text{II}) \text{ in } (\text{I}) : \quad \gamma^2 - \frac{v^2 \gamma^4}{c^2 + \gamma^2 v^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 c^2 + \underbrace{\gamma^4 v^2 - v^2 \gamma^4}_{=0} = c^2 + \gamma^2 v^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$(\text{II}) : \quad \delta^2 = \frac{c^2 + \gamma^2 v^2}{c^2} = \frac{c^2 + \frac{c^2 v^2}{c^2 - v^2}}{c^2} = \frac{c^4 - v^2 c^2 + c^2 v^2}{c^2 (c^2 - v^2)} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \gamma}$$

$$(\text{III}) : \quad \boxed{\varepsilon = -\frac{v}{c^2}}$$

Damit lautet die **Lorentztransformation** explizit:

$ \begin{aligned} x' &= x & x &= x' \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= \gamma(z - vt) & z &= \gamma(z' + vt') \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) & t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right) \end{aligned} $	bzw:	Lorentztransformation
---	-------------	------------------------------

Bemerkung: So wie die Galilei-Transformationen die **Galilei-Gruppe** bilden, bildet die Gesamtheit der Lorentztransformationen die **Lorentz-Gruppe**.

2 Folgerungen

2.1 Gleichzeitigkeit

Ereignisse, die in einem für einen Beobachter ruhenden Inertialsystem Σ gleichzeitig erscheinen, erscheinen von einem relativ zu Σ bewegten System nicht mehr gleichzeitig. Leuchten z.B. in Σ zwei Lampen an den beiden Orten z_1 und z_2 gleichzeitig auf ($t_1 = t_2$), dann gilt in Σ' :

$$t'_2 - t'_1 = \underbrace{\gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} z_2 \right)}_{L\text{-Trafo}} - \underbrace{\gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1 \right)}_{t_1 = t_2} = \gamma \frac{v}{c^2} (z_1 - z_2) \neq 0$$

D.h. in Σ' leuchten die beiden Lampen **nicht** gleichzeitig auf.

Folgerung: Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist nur sinnvoll in Bezug auf ein gegebenes Inertialsystem, nicht aber für die Gesamtheit aller Inertialsysteme.

2.2 Zeitdilatation¹

Gemäß der Lorentz-Transformation ist die Zeit **keine** absolute Größe mehr, wird also mit-transformiert: Uhren in bewegten Systemen gehen langsamer als in ruhenden Systemen. Ein Beobachter im ruhenden System Σ beobachtet eine im relativ zu Σ gleichförmig bewegten System Σ' ruhende Uhr.

Er findet:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \underbrace{\gamma \left(t'_2 + \frac{v z'_2}{c^2} \right)}_{L\text{-Trafo}} - \underbrace{\gamma \left(t'_1 + \frac{v z'_1}{c^2} \right)}_{Uhr\ ruht\ in\ \Sigma' \Rightarrow z'_1 = z'_2} = \gamma (t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'$$

Wegen $\gamma > 1$ findet er $\Delta t' < \Delta t$. Die bewegte Uhr geht also langsamer, die Zeit in Σ' ist „gedehnt“. Diese sog. **Zeitdilatation** ist symmetrisch, d.h. ein Beobachter in Σ' findet für das mit einer in Σ ruhenden Uhr gemessene Zeitintervall:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \underbrace{\gamma \left(t_2 - \frac{v z_2}{c^2} \right)}_{L\text{-Trafo}} - \underbrace{\gamma \left(t_1 - \frac{v z_1}{c^2} \right)}_{Uhr\ ruht\ in\ \Sigma \Rightarrow z_1 = z_2} = \gamma (t_2 - t_1) = \gamma \Delta t$$

Also: $\Delta t < \Delta t' \hat{=} \text{bewegte Uhr geht langsamer.}$

Nachweis: Zwei Flugzeuge in Ost- und Westrichtung; die Uhren an Bord zeigen eine andere Zeit als eine (z.B. am Nordpol) ruhende Uhr. Wegen $\vec{v}_{West} = \vec{v}_{Flugzeug} - \vec{v}_{Erdrrot.}$ und $\vec{v}_{Ost} = \vec{v}_{Flugzeug} + \vec{v}_{Erdrrot.}$ gilt $|\vec{v}_{West}| < |\vec{v}_{Ost}|$ und es ergibt sich eine Zeitdifferenz der Beobachter von $\Delta t \approx 323ns$.

¹lat. dilatabilis $\hat{=}$ dehnbar, Dehnung

2.3 Längenkontraktion

Die Ausdehnung eines bewegten Körpers ist in Bewegungsrichtung verkürzt. Ein Beobachter in Σ , der einen in Σ' ruhenden Stab der Länge $L' = z'_2 - z'_1$ beobachtet, findet:

$$L' = z'_2 - z'_1 \stackrel{\boxed{L\text{-Trafo.}}}{=} \gamma(z_2 - vt_2) - \gamma(z_1 - vt_1) \stackrel{\boxed{t_1 = t_2}}{=} \gamma(z_2 - z_1) = \gamma L$$

Mit $\gamma > 1 \Rightarrow L' > L$: der bewegte Stab ist also kürzer. Entsprechendes gilt für einen in Σ ruhenden Stab der von Σ' aus beobachtet wird.

Anwendung: Zerfall von μ -Mesonen:

μ -Mesonen entstehen durch die Wechselwirkung der kosmischen Strahlung mit der Erdatmosphäre in einer Höhe von etwa $h = 10$ km mit etwa Lichtgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2499}{2500}} c \approx c$ und werden auf dem Erdboden ($h = 0$) nachgewiesen. Bei einer Lebensdauer von $\tau_\mu = 2 \cdot 10^{-6}$ s können die Teilchen also einen Weg

$$s \approx \tau_\mu \cdot c \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 600 \text{ m} \ll 10 \text{ km}$$

zurücklegen. Warum gelangen die Teilchen also dennoch zum Erdboden? Die spezielle Relativitätstheorie sagt, dass ein (hochrelativistisches) μ -Mesonen den Weg vom Entstehungsort bis zum Erdboden um $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 50$ verkürzt „sieht“, d.h. lediglich der Weg $h/\gamma = \frac{10 \text{ km}}{50} = 200$ m zurücklegen muss, was mit seiner Lebensdauer verträglich ist. Umgekehrt gilt für einen Beobachter auf der Erde, dass die Lebensdauer eines μ -Mesons verlängert („gedehnt“) ist:

$$\tau_B = \gamma \tau_\mu = 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

so dass das Teilchen einen Weg von

$$s \approx \tau_B \cdot c \approx 1 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} = 3 \cdot 10^4 \text{ m} = 30 \text{ km}$$

zurücklegen kann, also ausreichend lange „lebt“ um den Erdboden zu erreichen.

2.4 Geschwindigkeitsaddition

Wie transformiert sich die Geschwindigkeit eines Objektes zwischen zwei relativ zueinander gleichförmig bewegten Systemen Σ und Σ' ?

Es gilt (relative Bewegung in z -Richtung):

$$\left. \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dx' \\ dy = dy' \\ dz = \gamma(dz' + v dt') \\ dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dz'\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{u} &= (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\
&= \left(\frac{dx'}{\gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dz' \right)}, \frac{dy'}{\gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dz' \right)}, \frac{\gamma (dz' + v dt')}{\gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dz' \right)} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dz'}{dt'} \right)} \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \gamma \left[\frac{dz'}{dt'} + v \right] \right) \\
&= \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_z \right)} (u'_x, u'_y, \gamma [u'_z + v]) = \vec{u}'
\end{aligned}$$

Explizit also:

$$u_x = \frac{u'_x}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_z \right)} ; \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_z \right)} ; \quad u_z = \frac{u'_z + v}{1 + \frac{v u'_z}{c^2}}$$

**Additionstheorem
der Geschwindigkeit**

Es gelten die Grenzfälle:

$$(1) \quad v \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1 \Rightarrow u_x = u'_x, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z + v$$

Das aber ist gerade die Galilei-Transformation der Geschwindigkeiten.

$$(2) \quad v \rightarrow c \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty \Rightarrow u_x \rightarrow 0, \quad u_y \rightarrow 0, \quad u_z \rightarrow \frac{u'_z + c}{1 + \frac{u'_z}{c}} = \left(\frac{u'_z + c}{c + u'_z} \right) c = c$$

Das heißt die beobachteten Geschwindigkeiten sind stets durch die Lichtgeschwindigkeit nach oben begrenzt.

3 Kovariante Formulierung

3.1 Der Minkowski-Raum

Die Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie legen eine Erweiterung des (klassischen) 3-dim Konfigurationsraumes (z.B. $\vec{r} = (x, y, z)$) auf eine 4-dim „Raum-Zeit“ nahe:

3.1.1 Vierervektoren

Die Lorentz-Transformation kann als Drehung in einem 4-dim. Vektorraum betrachtet werden, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\gamma v \\ 0 & 0 & -\gamma \frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma \frac{v}{c} \\ 0 & 0 & -i\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix } D_L} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} =: D_L \vec{r}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \gamma \\ \sin \alpha = i\gamma \frac{v}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = -\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} + \gamma^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \\ \Rightarrow \det D_2 = |D_2| = 1$$

Bemerkung: Der Drehwinkel α ist imaginär, da wegen $\cos \alpha = \gamma > 1$ gilt und da $\sin \alpha$ rein imaginär ist.

Da Drehungen Längen unverändert lassen, gilt weiter:

$$|\vec{r}'| = |\vec{r}| \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Das ist gerade der Ausgangspunkt zur Herleitung der Lorentz-Transformation (siehe 1.2 oben).

Definition: Die 4-dim **Vierervektoren** \vec{r}, \vec{r}' sind Verallgemeinerungen der Ortsvektoren im 3-dim Konfigurationsraum. Allgemein gilt:

$$\vec{r} = (\vec{r}, ict) \quad ; \quad \vec{r}' = (\vec{r}', ict')$$

Vierervektoren heißen auch **Weltvektoren**.

Definition: Der **Minkowski-Raum** oder die **Raum-Zeit** ist der 4-dim Vektorraum, der die Vierervektoren enthält. Punkte im Minkowski-Raum sind **Ereignisse** (vgl.: Punkte im Konfigurationsraum sind Orte). Kurven im Minkowski-Raum nennt man **Weltlinien**.

Veranschaulichung:

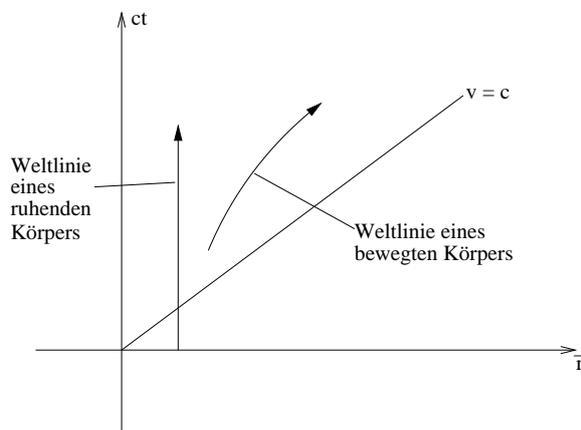


Abbildung 3.1: Minkowski-Raum

Bemerkung: Wegen $v < c$ ist die kleinste mögliche Steigung m einer Weltlinie $m = 1$.

Das Längenelement im Minkowski-Raum

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

ist invariant unter Lorentz-Transformation. Da ds^2 nicht positiv definit ist, unterscheidet man:

- (1) raumartige Abstände: $ds^2 > 0$
- (2) null- oder lichtartige Abstände: $ds^2 = 0$
- (3) zeitartige Abstände: $ds^2 < 0$

Veranschaulichung:

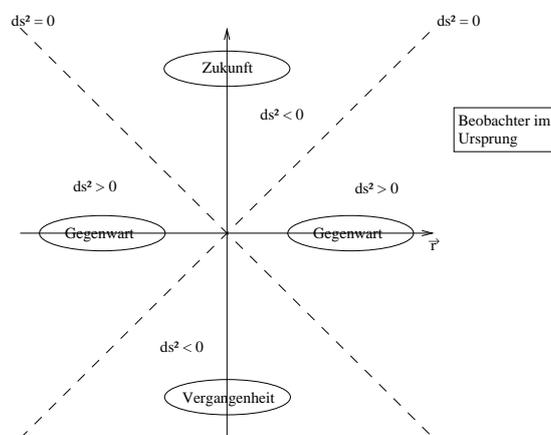


Abbildung 3.2: Längenelement im Minkowski-Raum

Für einen Beobachter im Ursprung sind Ereignisse mit

- raumartigen Abstand unerfahrbar, wegen $c < \infty$
- zeitartigen Abstand entweder in der Vergangenheit oder Zukunft

Bemerkung: Je zwei Ereignisse im raumartigen Bereich des Minkowski-Raumes können in einem geeignet gewählten Inertialsystem gleichzeitig beobachtet werden.

3.1.2 Die Eigenzeit

Um weitere Größen im Minkowski-Raum sinnvoll einführen zu können, ist die Definition einer Lorentz-invarianten Zeiteinheit $d\tau$ erforderlich. Dies erreicht man durch:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad \Big| : (-c^2) \\
 \Rightarrow d\tau &:= \sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} [dx^2 + dy^2 + dz^2]} \\
 &= dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]} \\
 &= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \quad \text{Eigenzeit (eines Systems)}
 \end{aligned}$$

Offenkundig ist $d\tau$ wegen der Lorentz-Invarianz von ds^2 und c ebenfalls invariant unter der Lorentz-Transformation.

Bemerkung: Die **Eigenzeit** $d\tau$ ist im Ruhesystem ($v = 0 \Rightarrow \gamma = 1$) identisch mit der Koordinatenzeit dt .

Bemerkung: Die Eigenzeit kann auch aus der Beziehung für die Zeitdilatation (siehe 2.2 oben) abgeleitet werden.

Bemerkung: Mit Hilfe der Eigenzeit lassen sich die Naturgesetze in Lorentz-invarianter Form formulieren, d.h. in allen Inertialsystemen gelten die (form-)gleichen Naturgesetze („Relativitätsprinzip“).

3.2 Vierergeschwindigkeit, Viererimpuls und Viererkraft

Die Vierergeschwindigkeit \vec{v} wird unter Verwendung der Eigenzeit $d\tau$ analog zur Newton'schen Mechanik definiert:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) = \gamma(\vec{v}, ic) \quad \text{Vierergeschwindigkeit}$$

$\vec{r} = (\vec{r}, ict)$

$\frac{dt}{d\tau} = \gamma$

Ähnlich erfolgt die Definition des Viererimpulses:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} = m_0 \gamma (\vec{v}, ic) = (m\vec{v}, imc) = (\vec{p}, imc) \quad \text{Viererimpuls}$$

$$\boxed{m = m_0 \gamma}$$

Aus der letzten Gleichsetzung folgt für den dreidimensionalen Konfigurationsraum:

$$\vec{p} = m \vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

d.h. die **Teilchenmasse** $m = m_0 \gamma$ ist **geschwindigkeitsabhängig**. m_0 heißt **Ruhemasse**.

Bemerkung: Die Massenzunahme bewegter Teilchen wurde tatsächlich bereits 1902 von Kaufmann experimentell nachgewiesen.

Auch die Definition der Viererkraft erfolgt in Analogie zur Newton'schen Mechanik:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}} \quad \text{Viererkraft}$$

3.3 Viererstromdichte und Viererpotential

Die im Falle der Lorentz-Eichung gegebene Formgleichheit der Potentialgleichungen (vgl. II.5.2)

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

legt die Zusammenfassung der Potentiale und Ladungs- und Stromdichte zu je einem Vierervektor nahe. Wie das zu erfolgen hat, folgt aus der Kontinuitätsgleichung, die infolge der Ladungserhaltung in jedem Inertialsystem gelten muss.

Also:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad c \frac{\partial \rho}{\partial(ct)} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla} \right)}_{\text{4-dim. Divergenzoperator}} \cdot (c\rho, \vec{j}) = 0$$

Folglich ist $J := (c\rho, \vec{j})^T$ eine geeignete **Viererstromdichte**. Damit und mit $\frac{1}{\varepsilon_0} = c^2 \mu_0$ folgt weiter:

$$\Delta \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = -\mu_0 (c\rho, \vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \Omega = -\mu_0 J$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\square \Omega = -\mu_0 J} \quad \text{Potentialgleichungen in Vierervektornotation}$$

mit dem **Viererpotential** $\Omega := (\phi/c, \vec{A})^T$

Bemerkung: Die obigen kovarianten Potentialgleichungen sind die kompakteste (und eleganteste?) Formulierung der Elektrodynamik.

Mit dem Viererpotential lautet die Lorenz-Eichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla} \right) \cdot \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = 0$$

und ist damit äquivalent zum Verschwinden der (4-dimensionalen) Divergenz des Viererpotentials - also eine "relativistische Coulomb-Eichung".

Bemerkung: Hier ist eine **andere** Definition eines Vierervektors (als die in 3.1.1 verwendete) erfolgt. In der Wahl des Vierervektors besteht in der Tat Freiheit, siehe z.B. die Bücher von

$$\text{Greiner: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}; \text{ Griffiths: } \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \text{ Jackson: } \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3.4 Der Feldstärketensor

Für das elektrische und magnetische Feld gilt bekanntlich:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

bzw. in Komponenten:

$$-\frac{E_i}{c} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\phi}{c} \right) + \frac{\partial A_i}{\partial(ct)} \quad ; \quad B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned} \text{kontravarianter Vektor: } x^\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x_1, x_2, x_3) \\ \text{kovarianter Vektor: } x_\mu &= (-x_0, x_1, x_2, x_3) = (-ct, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

gilt für die Lorentztransformation von Vierervektoren:

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$$

Bemerkung: Diese Notation erlaubt die Darstellung

$$x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -c^2 t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bedeutet

$$\sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2$$

in allen Inertialsystemen (Kugelwellenfront!).

Insbesondere ist

$$(\Delta s)^2 := \sum_{\mu=0}^3 (\Delta x_\mu) (\Delta x^\mu) = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - c^2 (\Delta t)^2$$

das invariante Intervall oder der Abstand zweier Ereignisse im Minkowski-Raum. Es wird unterschieden:

$$(\Delta s)^2 < 0: \text{zeitartiger Abstand}$$

$$(\Delta s)^2 > 0: \text{raumartiger Abstand}$$

$$(\Delta s)^2 = 0: \text{lichtartiger Abstand}$$

Für $(\Delta s)^2 < 0$ gibt es ein Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse am selben Ort stattfinden. Für $(\Delta s)^2 > 0$ gibt es eines, in dem sie gleichzeitig sind.

Da das Vektorpotential sich entsprechend transformiert, gilt:

$$A^\mu := \left(\frac{\phi}{c}, A_1, A_2, A_3 \right)$$

und damit lassen sich die obigen Gleichungen für die Felder (als 4-dimensionale Rotation) schreiben:

$$F^{\mu\nu} := \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dieser antisymmetrische **kontravariante Feld(stärke)tensor** ist die relativistische Verallgemeinerung der elektrischen und magnetischen Felder, die somit beide in diese neue Größe vereinigt werden.

Bemerkung: Die Felder werden also nicht einfach zu einem Vierervektor verallgemeinert (was angesichts der 2×3 Komponenten ohnehin nicht möglich wäre), sondern sind als Elemente eines Tensors aufzufassen.

Die Maxwell-Gleichungen lauten in dieser Notation:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \mu_0 c^2 \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Bemerkung: Die Komponenten des kovarianten Tensors $F_{\mu\nu}$ ergeben sich analog zu einem Vierer-Vektor ($\hat{=}$ Minuszeichen bei $\mu = \nu = 0!$).

3.5 Die Lorentz-Transformation der Felder

... ergibt sich aus der Tatsache, dass sie als Komponenten eines Tensors aufgefasst werden müssen. Für die Transformation des Letzteren gilt

$$F'^{mn} = L_\mu^m L_\nu^n F^{\mu\nu} \quad ; \quad L_\nu^n = L_\mu^m = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

|
gewählt wie oben

Demnach gilt offenbar:

$$\begin{aligned} \frac{E'_x}{c} &= (F')^{01} = L_\mu^0 L_\nu^1 F^{\mu\nu} = \gamma L_\nu^1 F^{0\nu} - \gamma\beta L_\nu^1 F^{1\nu} \\ &= -\gamma^2\beta F^{00} + \gamma^2 F^{01} + \gamma^2\beta^2 F^{10} - \gamma^2\beta F^{11} \\ &= 0 + \gamma^2 \frac{E_x}{c} - \gamma^2\beta^2 \frac{E_x}{c} - 0 \\ &= \frac{E_x}{c} \gamma^2 (1 - \beta^2) = \frac{E_x}{c} \\ \frac{E'_y}{c} &= (F')^{02} = L_\mu^0 L_\nu^2 F^{\mu\nu} = \gamma L_\nu^2 F^{0\nu} - \gamma\beta L_\nu^2 F^{1\nu} \\ &= \gamma F^{02} - \gamma\beta F^{12} = \gamma \frac{E_y}{c} - \gamma\beta B_z \end{aligned}$$

usw.

Also:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) \end{aligned}$$

oder vektoriell:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

d.h. also: die „Anteile“ von \vec{E} und \vec{B} sind in den verschiedenen Inertialsystemen i.A. verschieden. Es gibt zwei interessante Spezialfälle, die das illustrieren:

(a) Mit $\vec{B} = 0$ folgt:

$$\vec{B}' = \gamma \frac{v}{c^2} (E_z \vec{e}_y - E_y \vec{e}_z) = \frac{v}{c^2} (E'_z \vec{e}_y - E'_y \vec{e}_z) = -\frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}')$$

|
 $\vec{v} = v \vec{e}_x$

(b) Mit $\vec{E} = 0$ folgt:

$$\vec{E}' = -\gamma v (B_z \vec{e}_y - B_y \vec{e}_z) = -v (B'_z \vec{e}_y - B'_y \vec{e}_z) = \vec{v} \times \vec{B}'$$

|
 $\vec{v} = v \vec{e}_x$

Wenn also in irgendeinem Punkt im Koordinatensystem Σ $\vec{E} = 0$ oder $\vec{B} = 0$ gilt, gilt in Σ' $\vec{E}' \neq 0$ oder $\vec{B}' \neq 0$: ein reines \vec{E} - oder \vec{B} -Feld in Σ kann niemals zu einem „reinen“ Feld in Σ' werden.

Bemerkung: Die Uminterpretation von \vec{E} und \vec{B} von einem Inertialsystem (Σ) in ein anderes (Σ') unterliegt Einschränkungen durch die Invariante $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B}$ und $\vec{E}'^2 - c^2 \vec{B}'^2 = \vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2$ d.h. \vec{E} und \vec{B} sind in jedem Inertialsystem senkrecht zueinander und es gilt in jedem Inertialsystem $\frac{E}{B} = c$. Elektromagnetische Wellen behalten also ihre grundsätzliche Struktur.

Bemerkung: Die Maxwell-Gleichungen können noch tiefer gehend motiviert werden: es ist möglich, sie aus einem „Prinzip der extremalen Wirkung“ herzuleiten. Dann wird die Lagrange-Funktion der klass. Mechanik auf eine „Lagrange-Dichte“ verallgemeinert (siehe z.B. Landau-Lifschitz oder Schlickeiser-Skript). Diese Vorgehensweise führt dann in Richtung allgemeiner Quantenfeldtheorie.