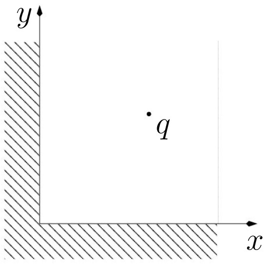
Anwesenheitsübung X [28.06.2011]

Aufgabe 18: Spiegelladungen



Die Abbildung zeigt eine Konfiguration aus zwei senkrecht zueinander liegenden, geerdeten Metallplatten ($\phi = 0$) und einer Punktladung q. Die Metallplatten seien in der positiven x–z– bzw. y–z–Halbebene (also $y = 0$ und $x > 0$ bzw. $x = 0$ und $y > 0$) unendlich ausgedehnt. Die z–Achse weise aus der Papierebene heraus. Die Punktladung sei am Ort $(x_q, y_q, 0)$ positioniert.

(a) Wie viele und welche solcher Spiegelladungen sind notwendig, um am Ort der beiden Metallplatten ein verschwindendes Potential zu erhalten? Wo müssen diese platziert werden? Fertigen Sie eine Skizze dieser Konfiguration an.

(b) Begründen Sie anschaulich, warum das elektrische Feld im Ursprung verschwinden muss.

(c) Bestimmen Sie das elektrische Potential ϕ und das elektrische Feld $\vec{E}$ in dem Viertelraum $(x, y > 0)$, sowie die Flächenladungsdichten σ_1 und σ_2 der beiden Metallplatten.

Aufgabe 19: Elektrischer Dipol

Das Potential $\Phi(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ eines im Ursprung befindlichen elektrischen Dipols mit dem (konstanten) Dipolmoment $\vec{p}$ sind durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \quad ; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

gegeben, wobei $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

(a) Leiten Sie $\vec{E}(\vec{r})$ aus der Beziehung $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\,\Phi(\vec{r})$ her.

(b) Berechnen Sie $\Delta\Phi(\vec{r})$ mit der kartesischen Darstellung $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ des Laplace-Operators.

(c) Das Dipolmoment zeige in Richtung der x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Wie lautet das Dipolpotential $\Phi(\vec{r})$ in Zylinderkoordinaten?

(d) Bestimmen Sie daraus die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ in Zylinderkoordinaten, indem Sie den $\vec{\nabla}$-Operator ebenfalls in Zylinderkoordinaten verwenden.

(e) In (a) haben Sie $\vec{E}(\vec{r})$ in koordinatenfreier Form hergeleitet. Bestätigen Sie das Ergebnis von (d), indem Sie in der in (a) bewiesenen Formel explizit Zylinderkoordinaten verwenden.