Anwesenheitsübung IX [21.06.2011]

Aufgabe 16: Die Delta-Distribution

In der Vorlesung wurde die Delta-Distribution vorgestellt, die z. B. zur weiteren Behandlung von Problemstellungen mit Punktladungen benötigt wird. Dazu einige Übungen:

(a) Für die eindimensionale Delta-Funktion gilt (mit $x_0 = const.$)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} f(x_0) & ; x_0 \in (x_1, x_2) \\ 0 & ; x_0 \notin [x_1, x_2] \end{cases} \tag{1}$$

Berechnen Sie nun $\int\limits_{3/2}^{10} g(x)\,[\delta(x-1)+\delta(x-2)]\,dx.$

(b) Für die dreidimensionale Delta-Funktion gilt (mit einem konstanten Vektor $\vec{a}$)

$$\int_V f(\vec{r})\,\delta^3(\vec{r}-\vec{a})\,d^3r = \begin{cases} f(\vec{a}) & ; \vec{a} \in V \\ 0 & ; sonst \end{cases} \tag{2}$$

(i) Bestimmen Sie das Integral

$$I_1 = \int_V (r^2 + \vec{r}\cdot\vec{r}_0 + r_0^2)\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)d^3r \tag{3}$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Ausdruck $\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}$ die Delta-Distribution reproduziert:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\delta^3(\vec{r})\,. \tag{4}$$

Hinweis: Gehen Sie hier so vor, dass Sie den Ausdruck auf der linken Seite erst für $r \neq 0$ berechnen und zeigen Sie dann für $r = 0$, dass der Ausdruck gegen unendlich geht. Die Divergenz in Kugelkoordinaten lautet:

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,A_r) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi\,. \tag{5}$$

(iii) Berechnen Sie nun mit der Hilfe von Gleichung (4)

$$I_2 = \int_V \exp(-r)\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)d^3r \tag{6}$$

Aufgabe 17: Unendlich langer Kreiszylinder

In der Vorlesung wird die homogen geladene Kugel als Standardbeispiel der Elektrostatik genutzt. In dieser Aufgabe sollen Potential und elektrisches Feld für einen homogen geladenen, unendlich langen Kreiszylinder bestimmt werden. Der Zylinder habe den konstanten Radius R, die Länge $L \to \infty$ und das konstante Verhältnis von Ladung zu Länge von q/L.

(a) Bestimmen Sie die (homogene) Ladungsdichte d_q und machen Sie sich Gedanken über mögliche Symmetrien des Problems.

(b) Als Methode soll die integrale Form des Gaußschen Gesetzes verwendet werden:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V d_q \, dV \, . \tag{7}$$

Wandeln Sie die linke Seite von Gleichung (7) mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral um und lösen Sie das Integral

(c) Lösen Sie auch die Rechte Seite von Gleichung (7). Beachten Sie hier die Fallunterscheidung der Rechnung innerhalb und außerhalb des Leiters. Bestimmen Sie das elektrische Feld.

(d) Zeichnen Sie den Verlauf des Feldbetrags in Abhängigkeit des radialen Abstands.