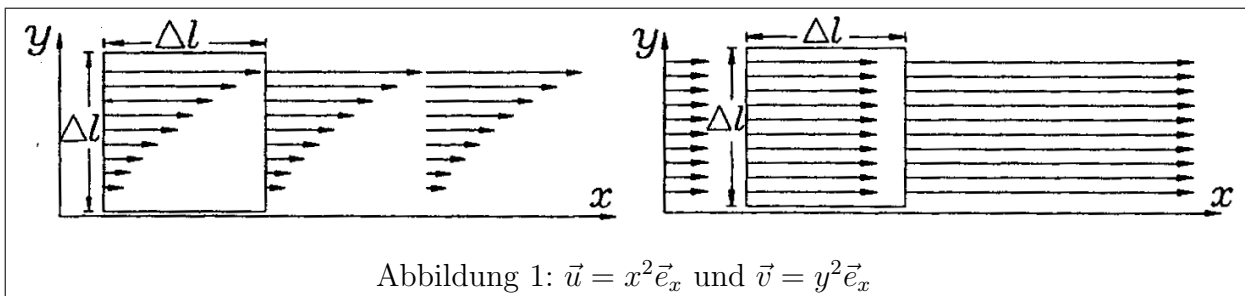


Aufgabe 13: Divergenz und Rotation

Betrachten Sie die beiden Vektorfelder

$$\vec{u} = x^2 \vec{e}_x \quad \text{und} \quad \vec{v} = y^2 \vec{e}_x.$$

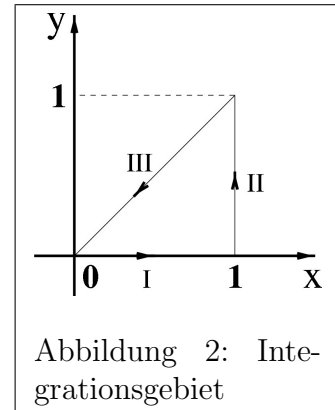
- (a) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation beider Felder. Welches stellt ein divergenzfreies und welches ein rotationsfreies Feld dar?
- (b) Welche der beiden Zeichnungen in Abb. 1 stellt \vec{u} und welche \vec{v} dar? Woran kann man das erkennen?



Aufgabe 14: Stokesscher Satz

Gegeben sei das elektrische Feld:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 2bxy \\ x^2 + ay^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c = \text{const.}$$



- (a) Prüfen Sie den Satz von Stokes, indem Sie das Linienintegral

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

entlang des in Abb. ?? skizzierten, geschlossenen Weges, sowie das Flächenintegral

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{F}$$

über die umschlossene Fläche berechnen.

- (b) Wie müssen die Konstanten a und b gewählt werden, damit das Feld quellen- und wirbelfrei wird, also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

gilt?

- (c) Aus der Wirbelfreiheit des in Teil (b) bestimmten speziellen Feldes folgt, dass es in der Form

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

dargestellt werden kann. Bestimmen Sie die skalare Funktion Φ , die man auch als elektrostatisches Potential bezeichnet.

Aufgabe 15: Nützliche Rechenregeln I

- (a) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des Ortsvektors \vec{r} .
- (b) Zeigen Sie, dass für beliebiges $\phi = \phi(\vec{r})$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ und $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ folgende Relationen gelten:

i) $\text{rot}(\phi\vec{u}) = \phi \text{rot}(\vec{u}) + \vec{\nabla}\phi \times \vec{u}$

ii) $\text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u} \times \text{rot}\vec{v} + \vec{v} \times \text{rot}\vec{u}$

Hinweis: Hier reicht es, die Gültigkeit dieser Relationen für nur eine Komponente (z.B. x) zu zeigen. Die anderen Komponenten folgen durch Vertauschen von x , y und z .