

Aufgabe 11: Trägheitstensor einer homogenen Kugel

- (a) Berechnen Sie den Trägheitstensor für die Hauptträgheitsachsen einer Kugel mit Radius R und homogener Massendichte $\rho = konst$ (Achse $\overline{AA'}$ in der Zeichnung). Bestimmen Sie die Rotationsenergie der Kugel bei vorgegebener Winkelfrequenz $\vec{\omega}^t = (0, \omega, 0)$.

Hinweis 1: Verwenden Sie hierzu Kugelkoordinaten mit

$$\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$dV = r^2 \cdot d\phi d(\cos\theta) dr. \tag{2}$$

Hinweis 2: Sie können sich einen Großteil der Rechnung sparen, indem Sie sich erst die Symmetrien des Kugelkreisels überlegen.

- (b) Die Rotation soll nun nicht mehr im Schwerpunkt erfolgen, sondern um einen Punkt auf dem Rand der Kugel (Rotationsachse entspricht dann der Achse $\overline{BB'}$ in der Zeichnung). Verschieben Sie hierzu den Trägheitstensor mit Hilfe des Steinerschen Satzes um einen konstanten Vektor. Wie lautet der Trägheitstensor für die Rotation um den Randpunkt, und wie groß ist die Rotationsenergie für die Winkelfrequenz $\vec{\omega}^t = (0, \omega, 0)$ (Achse $\overline{BB'}$ in der Zeichnung)?
- (c) Vergleichen Sie die Rotationsenergie für den Fall der Hauptträgheitsachsen (a) und der Rotation um einen Punkt auf dem Rand der Kugel (b). Was fällt Ihnen auf?

