Übung Grundlagen Mechanik & Elektrodynamik (SoSe 2011)
Vorlesung: Jun-Prof Dr. J. Becker
Übungsgruppen:
**I:** Dr. Udo Arendt, Tobias Wiengarten; **II:** Katharina Brodatzki & Christopher Körber
**III:** Tobias Wiengarten & Denis Wittor; **IV:** Isaac Saba & Philipp Graeser

**Anwesenheitsübung IV** [03.05.2011]

## Aufgabe 8: Lenz-Runge Vektor

Neben dem linearen Impuls (3 Erhaltungsgrößen), der Energie (eine Erhaltungsgröße) und dem Drehimpuls (3 Erhaltungsgrößen) existiert für das Potential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \text{mit} \qquad \alpha = GMm \tag{1}$$

eine weitere vektorielle Erhaltungsgröße: der **Lenz-Runge Vektor**:

$$\vec{\Lambda} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\vec{p}\times\vec{L}}{m} + V(r)\,\vec{r}\right) = \frac{\vec{p}\times\vec{L}}{\alpha\, m} - \frac{\vec{r}}{r}. \tag{2}$$

Da das Potential in Gleichung (1) der Gravitationskraft zugeordnet ist, lohnt es sich, den Lenz-Runge Vektor als Erhaltungsgröße genauer unter die Lupe zu nehmen:

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{\Lambda}$ eine Erhaltungsgröße ist, indem Sie mit folgenden Schritten zeigen, dass $d\vec{\Lambda}/dt = 0$ ist:

(i) Verwenden Sie bei der zeitlichen Ableitung von $\vec{\Lambda}$ folgende mathematischen Regeln:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dot{\vec{b}} \tag{3}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})\,. \tag{4}$$

(ii) Drücken Sie die radiale Geschwindigkeit $\dot{r}$ mit Hilfe von Impuls und Ortsvektor aus:

$$\dot{r} = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{e}_r = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{m\cdot r}\,. \tag{5}$$

(iii) Verwenden Sie für $\dot{\vec{p}}$ die Bewegungsgleichung:

$$m\cdot\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}} = -\alpha\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\,. \tag{6}$$

(b) Deuten Sie $\vec{\Lambda}$:

(i) Überlegen Sie sich, warum $\vec{\Lambda}$ per Definition in der Bahnebene liegt.

(ii) Zeichnen Sie $\vec{\Lambda}$ für verschiedene Orte auf der Ellipse, welche der Umlaufbahn des Planeten um die Sonne entspricht, ein. In welche Richtung zeigt $\vec{\Lambda}$?