Anwesenheitsübung III [26.04.2011]

Aufgabe 6: Zweites und drittes Keplersches Gesetz

In dieser Aufgabe sollen das zweite und dritte Keplersche Gesetz hergeleitet werden.

(a) Das **Zweite Keplersche Gesetz (Flächensatz)** besagt, dass der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, d.h.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = const. \tag{1}$$

Hier ist A die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche, während L den Drehimpulsbetrag des Planeten mit der Masse m bezeichnet.

Um diese Beziehung herzuleiten, überlegen Sie zunächst, wie man die Änderung der Fläche mit Hilfe des Ortsvektors $\vec{r}$ des Planeten und dessen Änderung $d\vec{r}$ geometrisch darstellen kann (Stichwort Kreuzprodukt).

(b) Nach dem **Dritten Keplerschen Gesetz** verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten wie die Kuben der großen Halbachsen der von den Planeten beschriebenen Ellipsenbahnen,

$$\frac{{T_1}^2}{{T_2}^2} = \frac{{a_1}^3}{{a_2}^3} \quad . \tag{2}$$

Nutzen Sie für die Herleitung dieser Relation den eben gezeigten Flächensatz, und integrieren Sie diesen über eine Umlaufzeit T, also über die gesamte Ellipse, d.h. von $A(0)$ bis $A(T)$.

Über welche Konstante hängen T^2 und a^3 zusammen?

Aufgabe 7: Impuls und Drehimpuls in Zylinderkoordinaten

Als nächstes soll das Rechnen in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) wieder ins Gedächtnis gerufen werden. Zeigen Sie, dass für den Impuls $\vec{p}$ eines Teilchens der Masse m und seinen Drehimpuls $\vec{L}$ bzgl. des Koordinatenursprungs gilt:

$$\vec{p} = m\dot{r}\vec{e}_r + mr\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad \text{und} \qquad \vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z, \tag{3}$$

falls die Bewegung nur in der x-y-Ebene stattfindet.

Hinweis:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$